











# REELLE FUNKTIONEN

VON

HANS HAHN

O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT WIEN

ERSTER TEIL

PUNKTFUNKTIONEN

Published and Distributed in the Public Interest by Authority  
of the Attorney General under License No. A-1304

CHELSEA PUBLISHING COMPANY  
231 WEST 29TH STREET, NEW YORK 1, N. Y.  
1948

COPYRIGHT 1932  
BY AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT M. B. H., LEIPZIG

Copyright vested in the Attorney General  
pursuant to law

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

## Vorbemerkungen.

Im Jahre 1921 habe ich eine „Theorie der reellen Funktionen“ veröffentlicht; sie ist seit langem vergriffen. Die großen Fortschritte, die dieses Wissensgebiet seither gemacht hat, ließen es zweckmäßig erscheinen, statt einer Neuauflage des früheren Werkes ein ganz neues herauszugeben. Es wird zwei Bände umfassen. Der vorliegende erste behandelt die „Punktfunktionen“; der zweite, der bald folgen soll, wird die „Mengenfunktionen“ behandeln.

An Vorkenntnissen wird lediglich vorausgesetzt, was jedem Studenten, der die Anfängervorlesungen gehört hat, geläufig ist. Insbesondere werden die erforderlichen Hilfsmittel aus der Mengenlehre im Buche selbst entwickelt; da aber dabei die Mengenlehre nicht Selbstzweck ist, wird auf die logischen Grundlagenfragen nicht eingegangen.

Ich habe mich bemüht, so weit als möglich in die Gebiete der aktuellen Forschung hineinzuführen. Nur wo die Dinge noch allzusehr im Flusse sind, mußte ich mir dies versagen; lediglich aus diesem Grunde wurde die verheißungsvolle Lehre von den projektiven Mengen nicht aufgenommen.

Einige historische Hinweise findet der Leser am Schlusse jedes Abschnittes zusammengestellt; sie erheben keinerlei Ansprüche auf Vollständigkeit; insbesondere war nicht beabsichtigt zu jedem Satze, jedem Begriffe seinen ersten Urheber namhaft zu machen; solche Fragen scheinen mir für die Mathematik wenig bedeutungsvoll.

Die Sätze sind, um das Nachschlagen zu erleichtern, durchgehend numeriert mit Nummern wie 27.4.81; dabei bedeutet die Zahl vor dem ersten Punkt den Paragraph, die Zahl zwischen erstem und zweitem Punkte den Abschnitt des Paragraphen, in dem sich der Satz findet (Satz 27.4.81 steht also in § 27, Abschnitt 4); die Ziffern nach dem zweiten Punkte sind zu lesen wie die Stellen eines Dezimalbruches, so daß also Satz 27.4.72 dem Satze 27.4.8 vorangeht, hingegen Satz 27.4.81 dem Satze 27.4.8 nachfolgt.

In ähnlicher Weise wurden auch einzelne Formeln mit Nummern versehen. Die Formeln § 33 (5), § 33 (5.1) z. B. findet man in § 33, Ab-

schnitt 5. Wo eine Formelnummer ohne Angabe des Paragraphen zitiert ist, ist immer der Paragraph selbst gemeint, den man eben liest.

Eine Reihe von Fachgenossen haben mich freundlichst durch Verbesserungs- und Ergänzungsvorschläge unterstützt: ich danke den Herren Gödel, Hausdorff, Hurewicz, Knaster, Kuratowski, Lindенbaum, Menger, Nöbeling, Radakovic, Sierpiński, Szpilrajn für ihre gütige Unterstützung. Besonders aber möchte ich noch betonen, daß ich aus Hausdorffs Darstellungen der Mengenlehre mehr Nutzen gezogen habe, als durch Zitate belegt werden kann.

Noch habe ich der Akademischen Verlagsgesellschaft und den Herausgebern der Sammlung „Mathematik und ihre Anwendungen in Monographien und Lehrbüchern“ zu danken, daß sie — trotz der Ungunst der Zeit — den Druck meines Buches ermöglichten. Möge dieses Buch einem schönen und ertragreichen, in Deutschland noch zu wenig bekannten Zweige der Mathematik neue Kenner und Forscher zuführen!

Wien, August 1932.

Hans Hahn.

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
<b>I. Kapitel. Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre. . . . .</b>	<b>1</b>
§ 1. Menge, Relation . . . . .	1
1. Aussagen 1; 2. Aussagenfunktionen 1; 3. Mengen 2; 4. Relationen 2; 5. Eindcutige Relationen. Funktionen 4; 6. Komplexe, Folgen 5.	
§ 2. Verknüpfungen von Mengen . . . . .	6
1. Summe, Durchschnitt, Differenz 6; 2. Auswahl, Produkt 8; 3. Potenz 10.	
§ 3. Mengensysteme, Mengenfolgen . . . . .	10
1. Abgeschlossene Mengensysteme 10; 2. Ringe 11; 3. Körper 12; 4. $\sigma$ -Systeme, $\delta$ -Systeme 14; 5. $\sigma$ -Ringe, $\delta$ -Ringe 16; 6. $\sigma$ -Körper, $\delta$ -Körper 16; 7. Limesbildung 17; 8. $\lambda$ -Systeme 19.	
§ 4. Die Mächtigkeiten . . . . .	20
1. Gleichheitsrelationen 20; 2. Äquivalenz, Mächtigkeit 20; 3. Rechnen mit Mächtigkeiten 21.	
§ 5. Beispiele von Mächtigkeiten . . . . .	23
1. Abzählbare Mengen 23; 2. Die Mächtigkeit des Kontinuums 26; 3. Die Mächtigkeit $2^{\aleph}$ 28.	
§ 6. Geordnete Mengen . . . . .	29
1. Ordnende Relationen 29; 2. Ähnliche Abbildungen, Ordnungstypen 30; 3. Addition von Ordnungstypen 31; 4. Der Ordnungstypus $\eta$ 31; 5. Der Ordnungstypus $\lambda$ 32.	
§ 7. Die wohlgeordneten Mengen . . . . .	34
1. Wohlgeordnete Mengen 34; 2. Abschnitte 35; 3. Ordinalzahlen 36; 4. Transfinite Induktion 38.	
§ 8. Die Vergleichung der Mächtigkeiten . . . . .	39
1. Der Wohlordnungssatz 39; 2. Vergleichung von Mächtigkeiten 41; 3. Zahlklassen, Anfangszahlen, die Alephs 43; 4. Die Zahlklasse $Z_0$ 44.	
<b>II. Kapitel. Punktmengen . . . . .</b>	<b>46</b>
§ 9. Topologische und metrische Räume . . . . .	46
1. Topologische Räume 46; 2. Metrische Räume 47; 3. Beispiele metrischer Räume 49; 4. Entfernung eines Punktes von einer Menge 51; 5. Entfernung zweier Mengen 51; 6. Durchmesser. Beschränkte Mengen 52; 7. $\varrho$ -Netze 53.	
§ 10. Offene, abgeschlossene Mengen . . . . .	54
1. Offene Mengen 54; 2. Abgeschlossene Mengen 54; 3. Innere	

	Seite
Punkte. Offener Kern 55; 4. Häufungspunkte 56; 5. Abgeschlossene Hülle 57; 6. Rand, Begrenzung 59; 7. Die $G_\delta$ - und $F_\sigma$ -Mengen 60; 8. Offen, abgeschlossen als Relativbegriffe 61; 9. Relative $G_\delta$ und $F_\sigma$ 62.	
§ 11. Dichte, nirgends dichte Mengen . . . . .	63
1. Dichte Mengen 63; 2. Nirgends dichte Mengen 64; 3. Dicht, nirgends dicht als Relativbegriffe 65.	
§ 12. Isolierte, separierte, insichdichte Mengen . . . . .	68
1. Absolute Eigenschaften 68; 2. Isolierte Punkte 68; 3. Isolierte Mengen 70; 4. Insichdichte Mengen 71; 5. Perfekte Mengen 72; 6. Separierte Mengen 73; 7. Insichdichter Kern 74; 8. Kohärenzen, Adhärenzen 75; 9. Ableitungen 76.	
§ 13. Separable Mengen. . . . .	77
1. Separable Mengen 77; 2. Mächtigkeitsätze 80; 3. Überdeckungssatz 81; 4. Verdichtungspunkte 82; 5. Verdichteter, unverdichteter Teil 83.	
§ 14. Reguläre und normale Räume . . . . .	85
1. Abgesonderte Mengen 85; 2. Reguläre, normale Räume 86; 3. Metrisierung 88.	
§ 15. Kompakte Mengen . . . . .	91
1. Kompakte Mengen 91; 2. In sich kompakte Mengen 92; 3. Durchschnittssatz 94; 4. Halbkompakte Mengen 95; 5. Überdeckungssätze 95.	
§ 16. Zusammenhängende Mengen . . . . .	97
1. Zusammenhängende Mengen 97; 2. $q$ -Ketten 100; 3. Komponenten 101; 4. Kontinua 102; 5. Gebiete 102; 6. Nulldimensionale Mengen 103.	
§ 17. Mengenfolgen, Punktfolgen . . . . .	104
1. Mengenfolgen 104; 2. Häufungspunkte von Punktfolgen 108; 3. Grenzpunkte von Punktfolgen 109.	
§ 18. Vollständige Mengen . . . . .	112
1. Cauchysche Folgen 112; 2. Vollständige Mengen 113; 3. Kompakte Mengen in vollständigen Räumen 115; 4. Vervollständigung eines Raumes 115; 5. Absolut abgeschlossene Mengen 118; 6. Durchschnittssätze 119; 7. Dyadische Schemata 119; 8. Dyadisch darstellbare Mengen 121; 9. Dyadische Diskontinua 122; 10. Beschränkte Mengen in vollständigen Räumen 124.	
§ 19. Youngsche Mengen . . . . .	126
1. Absolute $G_\delta$ 126; 2. Mächtigkeitsätze 127; 3. Perfekte Mengen in Youngschen Räumen 129; 4. Mengen erster und zweiter Kategorie 130; 5. Von erster und zweiter Kategorie in einem Punkte 131; 6. In sich von erster (zweiter) Kategorie 134; 7. Residualmengen 134; 8. Residual in einem Punkte 136; 9. Offen bis auf eine Menge erster Kategorie 137.	



§ 20. Produkträume . . . . .	141
1. Produktraum 141; 2. Produktmengen 141; 3. Intervalle im $R_n$ 146; 4. Schichten 147.	
III. Kapitel. Der Begriff der Stetigkeit . . . . .	148
§ 21. Halbstetige Abbildungen . . . . .	148
1. Unterhalb stetige Abbildungen 148; 2. Oberhalb stetige Abbildungen 149; 3. In sich kompakte Abbildungen 150; 4. Zusammenhängende Abbildungen 151; 5. Charakterisierung durch Urbildmengen 152; 6. Inverse Abbildung 152; 7. Zusammensetzung 154.	
§ 22. Stetige Abbildungen . . . . .	154
1. Stetige Abbildungen 154; 2. Gleichmäßige Stetigkeit 155; 3. Teilabbildungen 156; 4. Erweiterung einer Abbildung 156.	
§ 23. Eindeutige stetige Abbildungen . . . . .	159
1. Eindeutige stetige Abbildungen 159; 2. Urbildmengen 160; 3. Eindeutige stetige Abbildungen in sich kompakter Mengen 160; 4. Erweiterung 164; 5. Eindeutige stetige Abbildungen lokal-zusammenhängender Mengen 164; 6. Projektion 168.	
§ 24. Homöomorphe Abbildungen . . . . .	169
1. Homöomorphe Abbildungen 169; 2. Beispiele 171; 3. Erweiterung einer Homöomorphie 174; 4. Youngsche Mengen 175.	
§ 25. Stetige Funktionen . . . . .	177
1. Die unendlichen Zahlen $+\infty$ , $-\infty$ 177; 2. Die Schränkungs-transformation 178; 3. Der Raum $R_1$ 178; 4. Reelle Funktionen 180; 5. Grenzwert 181; 6. Stetigkeit in einem Punkte 183; 7. Stetige Funktionen 184; 8. Urbildmengen 187.	
§ 26. Unstetige Funktionen . . . . .	188
1. Die Hülle einer Funktion 188; 2. Die Schrankenfunktionen 190; 3. Die Schwankung 191; 4. Verteilung der Unstetigkeitspunkte 192; 5. Punktweise unstetige Funktionen 194.	
§ 27. Vernachlässigung von Teilmengen . . . . .	196
1. Die reduzierte Hülle einer Funktion 196; 2. Die reduzierten Schrankenfunktionen 197; 3. Die reduzierte Schwankung 199; 4. Vernachlässigung von Teilmengen 200; 5. Teilfunktionen 205; 6. Einseitige Hüllen 208; 7. Einseitige Schrankenfunktionen 209.	
§ 28. Konvergente Funktionenfolgen . . . . .	211
1. Uniforme, einfach-gleichmäßige, völlig uniforme Konvergenz 211; 2. Quasigleichmäßige Konvergenz 213; 3. Gleichmäßige Konvergenz in einem Punkte 214; 4. Gleichmäßige Konvergenz 215; 5. Der Ungleichmäßigkeitsgrad 217; 6. Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz 217; 7. Punktweise ungleichmäßige Konvergenz 219; 8. Konvergente Folgen stetiger Funktionen 220; 9. Stetige Konvergenz 222; 10. Der Wertebereich einer Folge stetiger Funktionen 225.	
§ 29. Funktionenmengen. . . . .	227
1. Grenzwandlung 227; 2. Gleichgradige Stetigkeit 228; 3. Der normale Kern 229; 4. Kompakte Funktionenmengen 231.	

	Seite
IV. Kapitel. Borelsche Mengen und Bairesche Funktionen. . . . .	232
§ 30. Die Urbildmengen einer Funktion . . . . .	232
1. Urbildmengen 232; 2. Urbildmengen und Funktionensysteme 234;	
3. Antarke Funktionensysteme 236; 4. Völlig antarke Funktionensysteme 238; 5. Symmetrische Funktionensysteme 239.	
§ 31. Erweiterung von Mengen- und Funktionensystemen . . . . .	241
1. Die Mengensysteme $\mathfrak{M}^1$ und $\mathfrak{M}_1$ 241; 2. Die Funktionensysteme $\mathfrak{C}^1$ und $\mathfrak{C}_1$ 241; 3. Das Funktionensystem $\mathfrak{C}_1^1$ 244; 4. Das Funktionensystem $\mathfrak{C}^*$ 246; 5. Das Mengensystem $\mathfrak{M}_1^1$ 249; 6. Das Mengensystem $\mathfrak{M}^*$ 250.	
§ 32. Einschiebungs- und Erweiterungssätze. . . . .	251
1. Einschabungssatz für Mengen 251; 2. Einschabungssatz für Funktionen 252; 3. Erweiterungssätze für Mengen 253; 4. Erweiterungssätze für Funktionen 254; 5. Treppenfunktionen 256.	
§ 33. Die Borelschen Mengen . . . . .	258
1. Die Borelschen Mengen über $\mathfrak{M}$ 258; 2. Ambige Borelsche Mengen 261; 3. Einschabung, Erweiterung 263; 4. Die Borelschen Mengen eines metrischen Raumes 264; 5. Absolut Borelsche Mengen 268; 6. Abbildung Borelscher Mengen 269; 7. Borelsche Mengen in Produkträumen 270; 8. Universalmengen 271; 9. Existenzsätze 274.	
§ 34. Die Baireschen Funktionen . . . . .	276
1. Die Baireschen Funktionen über $\mathfrak{C}$ 276; 2. Ambige Bairesche Funktionen 279; 3. Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen 280; 4. Einschabung und Erweiterung 283.	
§ 35. Die Baireschen Funktionen eines metrischen Raumes 284	
1. Die Baireschen Funktionen eines metrischen Raumes 284; 2. Die Baireschen Funktionen und Borelschen Mengen eines metrischen Raumes 285; 3. Einschabung und Erweiterung 287; 4. Zusammensetzung 288; 5. Stetigkeitseigenschaften der Baireschen Funktionen 289; 6. Näherungseigenschaften 291; 7. Verhalten in einem Punkte 292; 8. Existenzsatz 294; 9. Die eine Funktion darstellende Menge 294.	
§ 36. Halbstetige Funktionen . . . . .	296
1. Halbstetigkeit in einem Punkte 296; 2. Halbstetige Funktionen 298; 3. Beispiele halbstetiger Funktionen 300; 4. Bairesche Funktionen und halbstetige Funktionen 302.	
§ 37. Funktionen erster, zweiter und dritter Klasse . . . . .	302
1. Funktionen erster Klasse 302; 2. Funktionen erster Klasse und halbstetige Funktionen 304; 3. Funktionen zweiter Klasse 305; 4. Funktionen dritter Klasse 307.	
§ 38. Folgen Bairescher Funktionen . . . . .	309
1. Konvergente Folgen Bairescher Funktionen 309; 2. Kompakte Mengen von $\mathfrak{C}_{\frac{1}{2}}$ -Funktionen 310; 3. Folgen Borelscher Mengen 312; 4. Supremum und Infimum einer Folge Bairescher Funktionen 315; 5. Limes superior und inferior einer Folge Bairescher Funk-	

tionen 316; 6. Konvergenz- und Divergenzmenge 320; 7. Unvollständige Grenzfunktionen 321.	
§ 39. Funktionen in Produkträumen . . . . .	325
1. Hilfsbetrachtungen 325; 2. Partiell stetige Funktionen 327;	
3. Stetigkeitspunkte partiell stetiger Funktionen 332.	
V. Kapitel. Die analytischen Mengen . . . . .	339
§ 40. Analytische Mengen . . . . .	339
1. Suslinsche Schemata 339; 2. Die analytischen Mengen über $\mathfrak{M}$ 342; 3. Die analytischen Mengen eines metrischen Raumes 344;	
4. Absolut analytische Mengen 346; 5. Abbildungssätze 347;	
6. Projektion 350; 7. Analytische Mengen in Produkträumen 351;	
8. Universalismen 352; 9. Existenzsatz 352.	
§ 41. Eigenschaften analytischer Mengen . . . . .	353
1. Die Bairesche Eigenschaft 353; 2. Perfekte Teile analytischer Mengen 356; 3. Die Wertmenge einer Funktion 359; 4. Mehrfache Punkte einer Abbildung 361.	
§ 42. Analytische und Borelsche Mengen . . . . .	369
1. Trennbarkeit 369; 2. Disjunkte Suslinsche Schemata 370; 3. Abbildungssätze 374; 4. Halbschlichte Abbildungen 375; 5. Borelsche Mengen, deren Schichten abzählbar sind 379; 6. Minimalpunkte 383.	
§ 43. Implizite Funktionen . . . . .	385
1. Umkehrfunktionen 385; 2. Die eine Funktion darstellende Menge 387; 3. Implizite Funktionen 389.	
§ 44. Lusinsche Siebe . . . . .	391
1. Abzählbare Siebe 391; 2. Analytische Siebe 393; 3. Spezielle Borelsche Siebe 394; 4. Die Konstituenten 396.	
Nachträge und Ergänzungen . . . . .	399
Sachregister . . . . .	403
Verzeichnis der verwendeten Symbole . . . . .	411



## Erstes Kapitel.

# Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre.

### § 1. Menge, Relation.

1. Aussagen. Um zu den Begriffen „Menge“, „Relation“ zu gelangen, gehen wir aus vom Begriffe der Aussage. Seien  $p, q, r, \dots$  Aussagen, wie z. B.: „Der Schnee ist weiß;“, „Sokrates war ein Grieche“. Jeder Aussage kommt einer und nur einer der beiden Wahrheitswerte  $w$  (wahr) oder  $f$  (falsch) zu. Zwei Aussagen  $p$  und  $q$ , die denselben Wahrheitswert haben, heißen äquivalent, in Zeichen  $p \equiv q$ . Je zwei wahre Aussagen sind also äquivalent, ebenso je zwei falsche. Zu jeder Aussage  $p$  gibt es ihre Negation  $\sim p$ ; die Aussagen  $p$  und  $\sim p$  haben entgegengesetzte Wahrheitswerte.

Aus je zwei Aussagen  $p$  und  $q$  können durch „Verknüpfung“ neue Aussagen gebildet werden; wir führen an: die Summe  $p \vee q$ ; sie sagt aus, daß sei es  $p$ , sei es  $q$  den Wert  $w$  hat, d. h. daß mindestens eine der beiden Aussagen  $p$  und  $q$  wahr ist; es hat also  $p \vee q$  den Wert  $f$  dann und nur dann, wenn sowohl  $p$  als  $q$  den Wert  $f$  hat; in allen anderen Fällen hat  $p \vee q$  den Wert  $w$ . Sodann das Produkt  $p \cdot q$ ; es sagt aus, daß sowohl  $p$  als  $q$  den Wert  $w$  hat;  $p \cdot q$  hat also den Wert  $w$  dann und nur dann, wenn sowohl  $p$  als  $q$  den Wert  $w$  hat; in allen anderen Fällen hat  $p \cdot q$  den Wert  $f$ . Endlich die Implikation  $p \supset q$ , die nur eine andere Schreibweise für die Summe  $(\sim p) \vee q$  ist; sie hat also den Wert  $f$  dann und nur dann, wenn  $p$  den Wert  $w$  und  $q$  den Wert  $f$  hat, in allen anderen Fällen hat sie den Wert  $w$ .

2. Aussagenfunktionen. Wir gehen nun aus von irgendeiner Gesamtheit von Gegenständen (den „Individuen“), die wir auch den „Grundbereich“ nennen; wir bezeichnen diese Gegenstände mit  $x$ . Es heiße  $\varphi(x)$  eine „Aussagenfunktion“, wenn  $\varphi(x)$  für jedes Individuum  $x$  eine Aussage ist; z. B. „ $x$  ist weiß“. Gilt für jedes  $x$  die Äquivalenz  $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ , so schreiben wir  $\varphi(x) \equiv_x \psi(x)$  und nennen  $\varphi(x)$  und  $\psi(x)$  formal äquivalent; gilt für jedes  $x$  die Implikation  $\varphi(x) \supset \psi(x)$ , so schreiben wir  $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$  (formale Implikation).

**3. Mengen.** Eine Aussagenfunktion  $\varphi(x)$  wird für gewisse  $x$  den Wert  $w$ , für andere den Wert  $f$  haben. Wir sagen: die Aussagenfunktion  $\varphi(x)$  definiert eine Menge<sup>1)</sup>  $M$ , nämlich die Menge aller  $x$ , für die  $\varphi(x)$  den Wert  $w$  hat; und wir setzen fest: formal äquivalente Aussagenfunktionen definieren dieselbe Menge. Ist  $M$  die durch  $\varphi(x)$  definierte Menge, so sagen wir: „ $x$  ist Element von  $M$ “ oder „ $x$  gehört zu  $M$ “, in Zeichen  $x \varepsilon M$ , wenn  $\varphi(x)$  den Wert  $w$  hat, hingegen: „ $x$  gehört nicht zu  $M$ “, in Zeichen  $x \sim \varepsilon M$ , wenn  $\varphi(x)$  den Wert  $f$  hat. Die durch  $\varphi(x)$  definierte Menge bezeichnen wir mit  $[\varphi(x)]$ . Es ist also die Aussage  $x \varepsilon [\varphi(x)]$  äquivalent mit der Aussage  $\varphi(x)$ .

Es gibt Aussagenfunktionen, die für alle  $x$  den Wert  $w$  haben, z. B.  $\varphi(x) \supset \varphi(x)$ ; also bildet der Grundbereich selbst eine Menge, die volle Menge, in Zeichen  $V$ . — Es gibt auch Aussagenfunktionen, die für kein  $x$  den Wert  $w$  haben, z. B.  $\varphi(x) \cdot (\sim \varphi(x))$ ; also gibt es auch eine Menge, die kein Element besitzt, die leere Menge, in Zeichen  $\Lambda$ . Je zwei Aussagenfunktionen, die für kein  $x$  den Wert  $w$  haben, sind formal äquivalent, definieren also dieselbe Menge: es gibt (bei gegebenem Grundbereiche) nur eine leere Menge. Die Aussagenfunktion  $x = a$  (das Zeichen = bedeutet Identität) definiert die nur aus dem Elemente  $a$  bestehende Menge, die mit  $\{a\}$  bezeichnet wird. Ebenso definiert, wenn  $a \neq b$ , die Aussagenfunktion  $(x = a) \vee (x = b)$  die aus den beiden Elementen  $a$  und  $b$  bestehende Menge  $\{a, b\}$  usw. Wir bezeichnen die aus den endlich vielen Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bestehende Menge mit  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ .

Es definiere  $\varphi(x)$  die Menge  $M$  und  $\psi(x)$  die Menge  $N$ . Gilt  $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$ , so gehört jedes Element von  $M$  auch zu  $N$ ; wir sagen:  $M$  ist Teil von  $N$ , in Zeichen  $M \subseteq N$ , oder  $N \supseteq M$ . Ist insbesondere  $M = \Lambda$ , d. h. hat  $\varphi(x)$  für alle  $x$  den Wert  $f$ , so gilt sicher  $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$ ; d. h. für jede Menge  $N$  gilt:  $\Lambda \subseteq N$ , die leere Menge ist Teil jeder Menge.

Da  $\varphi(x) \supset_x \varphi(x)$ , gilt auch  $M \subseteq M$ . Gilt  $\varphi(x) \supset_x \psi(x)$ , aber nicht  $\psi(x) \supset_x \varphi(x)$ , so gilt  $M \subseteq N$ , aber nicht  $N \subseteq M$ : es gibt mindestens ein  $x$ , das zu  $N$ , aber nicht zu  $M$  gehört. In dem Falle sagen wir:  $M$  ist echter Teil von  $N$ , in Zeichen:  $M \subset N$ , oder  $N \supset M$ .

Die Aussagenfunktion  $\sim \varphi(x)$  hat für jedes  $x$  den entgegengesetzten Wert, wie  $\varphi(x)$ . Ist  $M$  die durch  $\varphi(x)$  definierte Menge, so heißt die durch  $\sim \varphi(x)$  definierte Menge das Komplement von  $M$ , in Zeichen  $-M$ . Aus  $M \subseteq N$  folgt  $-M \supseteq -N$ . Wegen  $\sim(\sim \varphi(x)) \equiv_x \varphi(x)$  ist  $-(-M) = M$ .

**4. Relationen.** Wir haben bisher Aussagenfunktionen  $\varphi(x)$  betrachtet, die von einem variablen Gegenstande abhängen; wir betrachten nun Aus-

<sup>1)</sup> In der Logik sagt man „Klasse“ statt „Menge“.

sagenfunktionen  $\varphi(x, y)$  (z. B. „ $x$  ist Sohn von  $y$ “), wobei sehr wohl  $x$  und  $y$  verschiedene Grundbereiche durchlaufen können. Gilt für jedes  $x$  und jedes  $y$  die Äquivalenz  $\varphi(x, y) \equiv \psi(x, y)$ , so sagen wir auch hier:  $\varphi(x, y)$  und  $\psi(x, y)$  sind formal äquivalent und schreiben  $\varphi(x, y) \equiv_{xy} \psi(x, y)$ .

Eine Aussagenfunktion  $\varphi(x, y)$  wird für gewisse Paare  $(x, y)$  den Wert  $w$ , für andere den Wert  $f$  haben. Wir sagen: die Aussagenfunktion  $\varphi(x, y)$  definiert eine Relation  $R$  (und zwar definieren formal äquivalente Aussagenfunktionen dieselbe Relation); wir sagen „von  $x$  zu  $y$  besteht die Relation  $R$ “, in Zeichen:  $x R y$ , wenn  $\varphi(x, y)$  den Wert  $w$  hat; anderenfalls:  $x \sim R y$ . Die durch die Aussagenfunktion  $\varphi(x, y)$  definierte Relation bezeichnen wir auch mit  $[\varphi(x, y)]$ . Durch die (untereinander formal äquivalenten) Aussagenfunktionen  $\varphi(x, y)$ , die für alle Paare  $(x, y)$  den Wert  $f$  haben, wird eine Relation  $R$  definiert, für die  $x R y$  stets falsch ist; sie heißt die leere Relation.

Zu jeder Relation gibt es eine inverse Relation  $R^{-1}$ , die definiert ist durch:  $(x R^{-1} y) \equiv_{xy} (y R x)$ . Es ist  $(R^{-1})^{-1} = R$ .

Ist  $R$  eine gegebene Relation, und bezeichnen wir mit  $\varphi(x)$  die (nur von  $x$  abhängige) Aussage: „Es gibt mindestens ein  $y$ , für das  $x R y$  gilt“, so heißt die durch  $\varphi(x)$  definierte Menge  $[\varphi(x)]$  der Bereich der Relation  $R$ , in Zeichen  $B(R)$ ; analog heißt die durch die Aussage: „Es gibt mindestens ein  $x$ , für das  $x R y$  gilt“ definierte Menge der Gegenbereich von  $R$ , in Zeichen  $\mathcal{G}(R)$ . Offenbar ist  $\mathcal{G}(R) = B(R^{-1})$ .

Sind  $P$  und  $Q$  zwei Relationen, und bezeichnen wir mit  $\varphi(x, y)$  die (nur von  $x$  und  $y$  abhängige) Aussage: „Es gibt mindestens ein  $z$ , für das  $x P z$  und  $z Q y$  gilt“, so heißt die durch  $\varphi(x, y)$  definierte Relation: die aus  $P$  und  $Q$  zusammengesetzte Relation, in Zeichen  $P|Q$ . Diese Zusammensetzung zweier Relationen ist i. a. nicht kommutativ. Offenbar ist  $(P|Q)^{-1} = Q^{-1}|P^{-1}$ . Von besonderem Interesse ist der Fall, daß  $\mathcal{G}(P) \subseteq B(Q)$ ; in diesem Falle ist  $B(P|Q) = B(P)$ ; ebenso: ist  $\mathcal{G}(P) \supseteq B(Q)$ , so ist  $\mathcal{G}(P|Q) = \mathcal{G}(Q)$ . Ist also  $\mathcal{G}(P) = B(Q)$ , so ist  $B(P|Q) = B(P)$ ,  $\mathcal{G}(P|Q) = \mathcal{G}(Q)$ .

Wir bezeichnen in üblicher Weise eine Relation  $R$  auch als eine Abbildung des Bereiches  $B(R)$  auf den Gegenbereich  $\mathcal{G}(R)$ . Ist  $x \in B(R)$ , so heißt jedes  $y$ , für das  $x R y$  gilt, ein Bild von  $x$ ; ist  $y \in \mathcal{G}(R)$ , so heißt jedes  $x$ , für das  $x R y$  gilt, ein Urbild von  $y$ . Die Menge aller Bilder von  $x$  heißt die Bildmenge von  $x$ , in Zeichen  $R(x)$ ; die Menge aller Urbilder von  $y$  heißt die Urbildmenge von  $y$ ; sie kann offenbar mit  $R^{-1}(y)$  bezeichnet werden. Ist  $A \subseteq B(R)$ , so heißt die Menge aller Bilder aller  $x \in A$  die Bildmenge von  $A$ , in Zeichen  $R(A)$ ; ist  $O \subseteq \mathcal{G}(R)$ , so

heißt die Menge aller Urbilder aller  $y \in C$  die Urbildmenge von  $C$ ; sie kann offenbar mit  $R^{-1}(C)$  bezeichnet werden. Offenbar gilt für jedes  $A \subseteq B(R)$  und jedes  $C \subseteq \mathcal{H}(R)$ :

$$(4) \quad R^{-1}(R(A)) \supseteq A; \quad R(R^{-1}(C)) \supseteq C.$$

Ist  $R = P \mid Q$  und  $\mathcal{H}(P) \subseteq B(Q)$ , so ist (für jedes  $A \subseteq B(P)$ ):  $R(A) = Q(P(A))$ .

**5. Eindeutige Relationen. Funktionen.** Die Relation (Abbildung)  $R$  heißt mehr-eindeutig oder kurz eindeutig, wenn jedes  $x \in B(R)$  nur ein Bild hat; sie heißt ein-mehrdeutig, wenn jedes  $y \in \mathcal{H}(R)$  nur ein Urbild hat; sie heißt ein-eindeutig (oderschlicht), wenn sie sowohl mehr-eindeutig als ein-mehrdeutig ist. Ist  $R$  mehr-eindeutig, ein-mehrdeutig, ein-eindeutig, so ist  $R^{-1}$  ein-mehrdeutig, mehr-eindeutig, ein-eindeutig.

**1.5.1.** *Damit für jedes  $A \subseteq B(R)$  gelte:  $R^{-1}(R(A)) = A$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $R$  ein-mehrdeutig sei.*

Notwendig: Ist  $R$  nicht ein-mehrdeutig, so gibt es ein  $y \in \mathcal{H}(R)$  mit zwei verschiedenen Urbildern  $x_1, x_2$ . Sei nun  $A = \{x_1\}$ , so ist  $y \in R(A)$ ; also  $\{x_1, x_2\} \subseteq R^{-1}(R(A))$ , also  $R^{-1}(R(A)) \supset A$ . Hinreichend: Sei  $x \in R^{-1}(R(A))$ ; d. h. es gibt ein  $y \in R(A)$ , so daß  $x R y$ ; d. h. es gibt ein  $z \in A$ , so daß  $z R y$  und  $x R y$ ; da  $R$  ein-mehrdeutig, folgt aus  $z R y$  und  $x R y$  aber:  $z = x$ , und weil  $z \in A$ , ist auch  $x \in A$ . Also: aus  $x \in R^{-1}(R(A))$  folgt  $x \in A$ , d. h.  $R^{-1}(R(A)) \subseteq A$ . Da nach (4) auch  $R^{-1}(R(A)) \supseteq A$ , ist also  $R^{-1}(R(A)) = A$ .

Ersetzt man in 1.5.1  $R$  durch  $R^{-1}$ , so erhält man:

**1.5.11.** *Damit für jedes  $C \subseteq \mathcal{H}(R)$  gelte:  $R(R^{-1}(C)) = C$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $R$  mehr-eindeutig sei.*

**1.5.2.** *Damit für je zwei fremde Mengen  $A \subseteq B(R), A' \subseteq B(R)$  auch die Bildmengen  $R(A), R(A')$  fremd seien, ist notwendig und hinreichend, daß  $R$  ein-mehrdeutig sei.*

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

Eine eindeutige Relation (Abbildung) ordnet jedem  $x \in B(R)$  genau ein Bild  $y$  zu; es ist also in diesem Falle  $R(x) = \{y\}$ . Wo kein Mißverständnis möglich, schreiben wir statt dessen auch  $R(x) = y$ . Man sagt auch: eine mehr-eindeutige Relation  $R$  definiert auf (oder in)  $B(R)$  eine Funktion;  $B(R)$  heißt auch der Bereich dieser Funktion. Zur Bezeichnung der eindeutigen Funktionen verwenden wir statt der Buchstaben  $R, P, Q$  usw. auch die Buchstaben  $f, g, h$  usw.

Sei  $A$  eine beliebige Menge; wir betrachten die mehr-eindeutige Relation, die jedem  $x \in A$  die Zahl 1, jedem  $x \sim \varepsilon A$  die Zahl 0 zuordnet. Die durch





## § 2. Verknüpfungen von Mengen.

1. **Summe, Durchschnitt, Differenz.** Seien  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  zwei Aussagenfunktionen,  $[\varphi(x)] = A$ ,  $[\psi(x)] = B$  die durch sie definierten Mengen. Die durch die Aussagenfunktion  $\varphi(x) \vee \psi(x)$  definierte Menge wird bezeichnet mit  $A + B$  und heißt die Summe der Mengen  $A$  und  $B$ ; sie besteht aus allen Elementen, die zu mindestens einer der beiden Mengen  $A$  und  $B$  gehören. Die durch die Aussagenfunktion  $\varphi(x) \cdot \psi(x)$  definierte Menge wird bezeichnet mit  $A \cdot B$  oder  $A B$  und heißt der Durchschnitt der Mengen  $A$  und  $B$ ; sie besteht aus allen Elementen, die sowohl zu  $A$  als zu  $B$  gehören. Offenkundig gelten die kommutativen und assoziativen Gesetze:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} A + B &= B + A, & (A + B) + C &= A + (B + C); \\ A B &= B A, & (A B) C &= A (B C); \end{aligned}$$

ferner erkennt man unmittelbar das Bestehen der beiden Distributivgesetze:

$$(1.2) \quad A \cdot (B + C) = A B + A C; \quad A + B C = (A + B) \cdot (A + C).$$

Die folgenden drei Aussagen sind zu je zweien äquivalent:

$$(1.3) \quad A \subseteq B, \quad A + B = B, \quad A B = A.$$

Die Differenz zweier Mengen wird definiert durch:

$$A - B = A \cdot (-B),$$

wo  $-B$  das Komplement von  $B$  bedeutet; sie besteht aus allen nicht zu  $B$  gehörenden Elementen von  $A$ . Bedeutet  $V$  die volle Menge, so ist:  $-B = V - B$ . Ist  $B \subseteq A$ , so bezeichnen wir die Differenz  $A - B$  auch als das Komplement von  $B$  zu  $A$ . Man erkennt ohne weiteres:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} (A - B) + B &= A + B, & A - (A - B) &= A B, \\ -(A - B) &= (-A) + B. \end{aligned}$$

Für die Differenzbildung gilt:

$$(1.5) \quad \begin{aligned} A - (B + C) &= (A - B) \cdot (A - C) = (A - B) - C, \\ A - B C &= (A - B) + (A - C); \end{aligned}$$

insbesondere also für die Komplementbildung:

$$(1.50) \quad -(B + C) = (-B) \cdot (-C); \quad -(B C) = (-B) + (-C).$$

Wegen  $B - C = B \cdot (-C)$  folgt aus der zweiten Formel (1.5), indem man  $C$  durch  $-C$  ersetzt:

$$(1.51) \quad A - (B - C) = (A - B) + A C.$$

Für die Differenzbildung gelten die Distributivgesetze:

$$(1.6) \quad \begin{aligned} (A + B) - C &= (A - C) + (B - C), \\ A (B - C) &= A B - A C = A B - C = (A - C) (B - C). \end{aligned}$$

Ist  $A \cdot B = A$ , so heißen  $A$  und  $B$  fremd. Durch

$$(1.7) \quad A = A \cdot B + (A - B)$$

ist eine Zerlegung der Menge  $A$  in zwei fremde Summanden gegeben. Die Summe  $A + B$  wird durch die beiden folgenden Formeln in eine Summe verwandelt, deren Summanden (zu je zweien) fremd sind:

$$(1.71) \quad A + B = A + (B - A); \quad A + B = A \cdot B + (A - B) + (B - A).$$

Aus der Definition von Summe und Durchschnitt zweier Mengen ergibt sich unmittelbar auch die Definition von Summe und Durchschnitt endlich vieler Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_k$ . Wir schreiben:

$$A_1 + A_2 + \dots + A_k = \sum_{i=1}^k A_i, \quad A_1 \cdot A_2 \dots A_k = \prod_{i=1}^k A_i;$$

die Summe ist die Menge aller Elemente, die zu mindestens einer der Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_k$  gehören; der Durchschnitt ist die Menge aller Elemente, die zu sämtlichen Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_k$  gehören. Auf folgende Weise wird auch Summe und Durchschnitt aus unendlich vielen Mengen definiert.

Sei  $M$  eine Menge von Elementen  $m$ ; durch eine eindeutige Relation, deren Bereich  $M$  ist, sei jedem  $m \in M$  eine Menge  $A_m$  zugeordnet. Die durch die Aussagenfunktion: „Es gibt ein  $m \in M$ , so daß  $x \in A_m$ “ definierte Menge wird bezeichnet mit  $\sum_{m \in M} A_m$  und heißt die Summe der Mengen  $A_m$ ; sie besteht

aus allen Elementen  $x$ , die zu mindestens einer Menge  $A_m$  gehören. Die durch die Aussagenfunktion: „Für alle  $m \in M$  gilt  $x \in A_m$ “ definierte Menge wird bezeichnet mit  $\prod_{m \in M} A_m$  und heißt der Durchschnitt der

Mengen  $A_m$ ; sie besteht aus allen Elementen  $x$ , die zu sämtlichen Mengen  $A_m$  gehören. Ist  $M$  die Menge der natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, n, \dots$ , so haben wir es mit einer Mengenföge  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  zu tun,

deren Summe und Durchschnitt wir mit  $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$  und  $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$  oder kurz

mit  $\sum_n A_n$  und  $\prod_n A_n$  bezeichnen. Ist  $M$  die Menge  $(k, n)$  der Paare

natürlicher Zahlen, so haben wir es mit einer Doppelföge von Mengen  $A_{k,n}$  zu tun, deren Summe und Durchschnitt wir mit  $\sum_{k,n} A_{k,n}$ ,

$\prod_{k,n} A_{k,n}$  bezeichnen. Ist  $M = A$ , so ist auch  $\sum_{m \in M} A_m = A$ , hingegen  $\prod_{m \in M} A_m$

$= V$ , denn die den Durchschnitt definierende Aussagenfunktion kann als formale Implikation geschrieben werden:  $(y \in M) \supset (x \in A_y)$ ; ist nun  $M = A$ , so hat  $y \in M$  für alle  $y$  den Wahrheitswert  $f$ , die Implikation hat also für alle  $y$  den Wahrheitswert  $w$ , definiert also die volle Menge.

In Verallgemeinerung von (1.5) gelten, wie unmittelbar einzusehen, die Formeln:

$$(1.8) \quad C - \bigcup_{m \in M} A_m = D \bigcap_{m \in M} (C - A_m); \quad C - \bigcap_{m \in M} A_m = \bigcup_{m \in M} (C - A_m).$$

Sei nun  $R$  eine Relation,  $B(R)$  ihr Bereich und sei  $A_m \subseteq B(R)$ ,  $A \subseteq B(R)$ ,  $A' \subseteq B(R)$ ; dann gilt:

$$(1.9) \quad \begin{aligned} R \left( \bigcup_{m \in M} A_m \right) &= \bigcup_{m \in M} R(A_m); & R \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right) &\subseteq \bigcap_{m \in M} R(A_m); \\ R(A' - A) &\supseteq R(A') - R(A). \end{aligned}$$

**2.1.1.** Damit stets gelte  $R \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right) = \bigcap_{m \in M} R(A_m)$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $R$  ein-mehrdeutig sei.

Notwendig: Ist  $R$  nicht ein-mehrdeutig, so gibt es ein  $y \in \mathcal{R}(R)$  mit zwei verschiedenen Urbildern  $x_1, x_2$ . Sei  $A_1 = \{x_1\}$ ,  $A_2 = \{x_2\}$ ; dann ist  $A_1 A_2 = A$ , also auch  $R(A_1 A_2) = A$ , hingegen gilt  $y \in R(A_1) \cdot R(A_2)$ ; also ist  $R(A_1) \cdot R(A_2) \neq A$ . Hinreichend: Wegen (1.9) ist nur mehr zu zeigen:  $\bigcap_{m \in M} R(A_m) \subseteq R \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right)$ . Sei  $y \in \bigcap_{m \in M} R(A_m)$ , d. h.  $y \in R(A_m)$  für alle  $m \in M$ ; da  $R$  ein-mehrdeutig, hat  $y$  nur ein Urbild  $x$ , und wegen  $y \in R(A_m)$  ist  $x \in A_m$  für alle  $m \in M$ , d. h. es ist  $x \in \bigcap_{m \in M} A_m$ , und für das Bild  $y$  von  $x$  gilt also:  $y \in R \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right)$ . Aus  $y \in \bigcap_{m \in M} R(A_m)$  folgt also:  $y \in R \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right)$ , d. h. es ist  $\bigcap_{m \in M} R(A_m) \subseteq R \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right)$ .

**2.1.2.** Damit stets gelte  $R(A' - A) = R(A') - R(A)$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $R$  ein-mehrdeutig sei.

Notwendig: Es habe  $y$  zwei verschiedene Urbilder  $x_1, x_2$  und sei  $A' = \{x_1\}$ ,  $A = \{x_2\}$ , also  $y \in R(A')$ ,  $y \in R(A)$ , und mithin:  $y \sim_{\mathcal{R}} R(A') - R(A)$ ; da aber  $A' - A = \{x_1\}$ , ist  $y \in R(A' - A)$ , also  $R(A' - A) \neq R(A') - R(A)$ . Hinreichend: Wegen  $A' - A \subseteq A'$  ist  $R(A' - A) \subseteq R(A')$ ; nach 1.5.2 ist  $R(A' - A)$  fremd zu  $R(A)$ ; also ist  $R(A' - A) \subseteq R(A') - R(A)$ . Aus (1.9) folgt also die Behauptung.

Aus 2.1.1 und 2.1.2 folgt, indem man  $R$  durch  $R^{-1}$  ersetzt:

**2.1.3.** Ist  $R$  eindeutig, so gilt:

$$R^{-1} \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right) = \bigcap_{m \in M} R^{-1}(A_m); \quad R^{-1}(A' - A) = R^{-1}(A') - R^{-1}(A).$$

**2. Auswahl, Produkt.** Die Summe  $\bigcup_{m \in M} A_m$  und der Durchschnitt  $\bigcap_{m \in M} A_m$  sind offenkundig kommutativ und assoziativ. Um für sie auch die Distributivgesetze formulieren zu können, benötigen wir die Definition des Mengenproduktes  $\bigcap_{m \in M} P A_m$ .

Unter einer Auswahlrelation, oder kürzer: einer Auswahl aus den  $A_m$  ( $m \in M$ ) verstehen wir eine eindeutige Relation  $f$ , deren Bereich  $B(f) = M$  ist, und für die  $f(m) \in A_m$  (für alle  $m \in M$ ) ist; sie ordnet also jeder Menge  $A_m$  eines ihrer Elemente zu. Die Auswahlrelation, die jeder Menge  $A_m$  ( $m \in M$ ) das Element  $a_m \in A_m$  zuordnet, bezeichnen wir als die Auswahl  $((a_m))$  ( $m \in M$ ).

Besteht die Menge  $M$  aus den natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, k$ , so ist eine Auswahl aus  $A_1, A_2, \dots, A_k$  nichts anderes als ein  $k$ -tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  mit  $a_i \in A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Besteht die Menge  $M$  aus allen natürlichen Zahlen, so ist eine Auswahl aus den  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) nichts anderes als eine Folge  $((a_n))$  mit  $a_n \in A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Das Auswahlaxiom besagt: Ist  $A_m \neq \Lambda$  für alle  $m \in M$ , so gibt es eine Auswahl aus den  $A_m$ . Während diese Aussage für endliche Mengen  $M$  ohne weiteres bewiesen werden kann, scheint sie für unendliche Mengen  $M$  von den übrigen Prinzipien der Logik unabhängig zu sein. Sie stellt eine zur Begründung vieler Sätze der Mengenlehre — wie es scheint — unentbehrliche Annahme dar.

Unter dem Produkte  $\prod_{m \in M} A_m$  versteht man die Menge aller Auswahlen aus den  $A_m$  ( $m \in M$ ). Besteht  $M$  aus den natürlichen Zahlen  $1, 2, \dots, k$ , so schreiben wir das Produkt in der Form  $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$  oder  $\prod_{i=1}^k A_i$ ; es besteht dann aus allen  $k$ -tupeln  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  mit  $a_i \in A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Insbesondere ist also  $A \times B$  die Menge aller Paare  $(a, b)$  mit  $a \in A, b \in B$ . Offenbar gilt:

$$(2) \quad (A \times B) - (A' \times B') = ((A - A') \times B) + (A \times (B - B')) \\ = ((A - A') \times (B - B')) + ((A - A') \times B \cap B') + (A \cap A' \times (B - B')),$$

und in dieser letzten Darstellung sind die drei Summanden zu je zweien fremd.

Es ist  $A \times B \supset A$  dann und nur dann, wenn sowohl  $A \supset A$  als  $B \supset \Lambda$ .

**2.2.1.** Damit  $A' \times B' \subseteq A \times B$  sei, ist hinreichend, und wenn  $A' \supset \Lambda, B' \supset \Lambda$  ist, auch notwendig, daß  $A' \subseteq A, B' \subseteq B$  sei.

**2.2.11.** Damit  $A' \times B' \subset A \times B$  sei, ist, wenn  $A' \supset \Lambda, B' \supset \Lambda$ , notwendig, und wenn  $A \supset \Lambda, B \supset \Lambda$ , hinreichend, daß sei es  $A' \subseteq A, B' \subset B$ , sei es  $A' \subset A, B' \subseteq B$  gelte.

Es gelten (wenn  $M \supset \Lambda$ ) die Distributivgesetze:

$$(2.1) \quad \left( \bigcup_{m \in M} A_m \right) \times B = \bigcup_{m \in M} (A_m \times B); \quad \left( \bigcap_{m \in M} A_m \right) \times B = \bigcap_{m \in M} (A_m \times B),$$

sowie analoge Gesetze für den zweiten Faktor.

Ist  $M = A$ , so gibt es genau eine Auswahlrelation aus den  $A_m$ : die leere Relation  $L$  (§ 1, 4). Also ist:

$$(2.2) \quad \underset{m \in M}{P} A_m = \{L\} \text{ für } M = A.$$

Nun sind wir in der Lage, die Distributivgesetze für Summen und Durchschnitte allgemein zu formulieren: Es sei zu bilden  $\underset{m \in M}{D} \underset{l \in L_m}{S} A_{ml}$  und

$\underset{m \in M}{S} \underset{l \in L_m}{D} A_{ml}$ ; sei  $P$  die Menge aller Auswahlen aus den  $L_m$ , also:

$P = \underset{m \in M}{P} L_m$ , und sei  $p \in P$ , etwa  $p = ((l_m))$ ; wir setzen:

$$D_p = \underset{m \in M}{D} A_{ml_m}, \quad S_p = \underset{m \in M}{S} A_{ml_m};$$

dann lauten die Distributivgesetze:

$$(2.3) \quad \underset{m \in M}{D} \underset{l \in L_m}{S} A_{ml} = \underset{p \in P}{S} D_p; \quad \underset{m \in M}{S} \underset{l \in L_m}{D} A_{ml} = \underset{p \in P}{D} S_p.$$

Literatur: Die Bedeutung des Auswahlaxioms hat zuerst E. Zermelo erkannt. Näheres bei W. Sierpiński, Bull. Crac. 1918, S. 97; Fund. math. 2 (1921) S. 112; A. Tarski, Fund. math. 5 (1924) S. 145; A. Fraenkel, Berl. Ber. 1922, S. 253; Whitehead-Russell, Princ. Math. I, Part II, Sect. D (Selections).

**3. Potenz.** Die Potenz  $A^B$  wird definiert als das Produkt  $\underset{b \in B}{P} A_b$ , in dem alle Faktoren  $A_b = A$  sind. Es ist also  $A^B$  die Menge aller Funktionen  $f(b)$ , deren Bereich  $= B$  ist, und für die  $f(b) \in A$  für alle  $b \in B$ . Aus (2.2) folgt insbesondere:

$$(3) \quad A^A = \{L\},$$

wo  $L$  die leere Relation bedeutet.

### § 3. Mengensysteme, Mengenfolgen.

**1. Abgeschlossene Mengensysteme.** Eine Menge von Mengen wollen wir als ein Mengensystem bezeichnen. Wir nennen ein Mengensystem disjunkt, wenn je zwei verschiedene seiner Mengen fremd sind. Sei ein Mengensystem  $\mathfrak{M}$  gegeben und eine endliche Anzahl Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , die aus je zwei Mengen von  $\mathfrak{M}$  wieder eine Menge herleiten; wir nennen das System  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen hinsichtlich der Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , wenn jede dieser Verknüpfungen, angewendet auf zwei Mengen aus  $\mathfrak{M}$ , wieder eine Menge aus  $\mathfrak{M}$  ergibt.

**3.1.1.** Zu jedem Mengensystem  $\mathfrak{M}$  gibt es ein kleinstes System  $\overline{\mathfrak{M}} \supseteq \mathfrak{M}$ , das hinsichtlich der Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$  abgeschlossen ist.

Wir fügen zu  $\mathfrak{M}$  alle Mengen hinzu, die aus je zwei Mengen von  $\mathfrak{M}$  durch Anwendung der Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$  hervorgehen; das so ent-

standene Mengensystem heiße  $\mathfrak{M}_1$ . In derselben Weise entstehe  $\mathfrak{M}_2$  aus  $\mathfrak{M}_1$ ,  $\mathfrak{M}_3$  aus  $\mathfrak{M}_2$  usf. Wir zeigen:  $\mathfrak{M} = S_n \mathfrak{M}_n$ . Jedenfalls muß jedes  $\mathfrak{M}$  haltende, hinsichtlich der Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$  abgeschlossene System  $\supseteq S_n \mathfrak{M}_n$  sein. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß  $S_n \mathfrak{M}_n$  hinsichtlich der Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$  abgeschlossen ist. Sei  $A \in S_n \mathfrak{M}_n$ ,  $B \in S_n \mathfrak{M}_n$ ; dann gibt es ein  $n'$  und ein  $n''$ , so daß  $A \in \mathfrak{M}_{n'}$ ,  $B \in \mathfrak{M}_{n''}$ ; sei etwa  $n' \leq n''$ ; wegen  $\mathfrak{M}_{n'} \subseteq \mathfrak{M}_{n''}$  ist dann auch  $A \in \mathfrak{M}_{n''}$ . Entsteht  $C$  aus  $A$  und  $B$  durch Anwendung von  $V_i$ , so ist  $C \in \mathfrak{M}_{n''+1}$ , also auch  $C \in S_n \mathfrak{M}_n$ .

Offenbar gilt:

**3.1.2.** *Sind die Mengensysteme  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  abgeschlossen hinsichtlich der Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , so auch ihr Durchschnitt  $\mathfrak{M} \mathfrak{N}$ .*

**2. Ringe.** Ein erstes Beispiel erhalten wir, wenn wir für die obigen Verknüpfungen  $V_i$  Summen- und Durchschnittsbildung wählen. Ein Mengensystem, das hinsichtlich Summen- und Durchschnittsbildung aus je zwei Mengen des Systemes abgeschlossen ist, heißt ein Ring. Beispiele: Das leere Mengensystem; jedes Mengensystem, das nur aus einer einzigen Menge besteht; das System aller Teile einer gegebenen Menge.

Wegen der Gültigkeit der Distributivgesetze zwischen Summen- und Durchschnittsbildung vereinfacht sich die Konstruktion des kleinsten Ringes  $\mathfrak{R} \supseteq \mathfrak{M}$  (des „kleinsten Ringes über  $\mathfrak{M}$ “) gegenüber dem eben auseinandergesetzten Verfahren in folgender Weise: Man füge zunächst zu  $\mathfrak{M}$  die Durchschnitte aus je endlichvielen Mengen von  $\mathfrak{M}$  hinzu; dadurch entstehe das Mengensystem  $\mathfrak{M}'$ ; sodann füge man zu  $\mathfrak{M}'$  die Summen aus je endlich vielen Mengen von  $\mathfrak{M}'$  hinzu; das so entstehende System  $\mathfrak{R}$  ist der kleinste Ring über  $\mathfrak{M}$ . Da offenbar jeder Ring über  $\mathfrak{M}$  das System  $\mathfrak{R}$  enthält, braucht nur gezeigt zu werden, daß  $\mathfrak{R}$  ein Ring ist; sei also  $A \in \mathfrak{R}$ ,  $B \in \mathfrak{R}$ , etwa  $A = P_1 + P_2 + \dots + P_m$ ,  $B = Q_1 + Q_2 + \dots + Q_n$ , wo jedes  $P_i \in \mathfrak{M}'$  und jedes  $Q_j \in \mathfrak{M}'$ ; daß nun auch  $A + B \in \mathfrak{R}$ , liegt auf der Hand; und nach dem ersten Distributivgesetz (§ 2, (1.2)) ist  $A + B = S_{i,j} P_i + Q_j$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ ); da hierin  $P_i + Q_j \in \mathfrak{M}'$ , ist  $A + B \in \mathfrak{R}$ . — Ebenso hätte man den kleinsten Ring  $\mathfrak{R}$  über  $\mathfrak{M}$  auch erhalten, indem man zuerst zu  $\mathfrak{M}$  die Summen aus je endlich vielen Mengen von  $\mathfrak{M}$  hinzufügt, wodurch das System  $\mathfrak{M}''$  entstehe, und dann zu  $\mathfrak{M}''$  die Durchschnitte aus je endlich vielen Mengen von  $\mathfrak{M}''$  hinzufügt.

**3-2-1.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so kann jede Summe<sup>1)</sup>  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$  ( $A_i \in \mathfrak{M}$ ) in der Form dargestellt werden:  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$ , wo  $B_i \in \mathfrak{M}$  und  $A_i \subseteq B_i \subseteq B_{i+1}$ .

Man hat nur zu setzen:  $B_i = A_1 + A_2 + \dots + A_i$ .

**3-2-11.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so kann jeder Durchschnitt<sup>1)</sup>  $\prod_{i=1}^{\infty} A_i$  ( $A_i \in \mathfrak{M}$ ) in der Form dargestellt werden:  $\prod_{i=1}^{\infty} A_i = \prod_{i=1}^{\infty} B_i$ , wo  $B_i \in \mathfrak{M}$  und  $A_i \supseteq B_i \supseteq B_{i+1}$ .

Man hat nur zu setzen:  $B_i = A_1 A_2 \dots A_i$ .

**3. Körper.** Ein zweites Beispiel erhalten wir, wenn wir für die Verknüpfungen  $V_i$  Summen- und Differenzenbildung wählen. Ein Mengensystem, das hinsichtlich Summen und Differenzenbildung aus je zwei Mengen des Systemes abgeschlossen ist, heißt ein Körper. Beispiele: Das leere Mengensystem; das nur aus der leeren Menge bestehende Mengensystem; jedes Mengensystem, das aus der leeren und einer nicht leeren Menge besteht; das System aller Teile einer gegebenen Menge.

Da vermöge der zweiten Formel § 2, (1-4) Durchschnittsbildung durch Differenzenbildung ausgedrückt werden kann, ist jeder Körper auch hinsichtlich der Durchschnittsbildung abgeschlossen; d. h. jeder Körper ist auch ein Ring.

Jeder nicht leere Körper  $\mathfrak{M}$  enthält die leere Menge  $A$ ; denn aus  $A \in \mathfrak{M}$  folgt  $A - A \in \mathfrak{M}$ , d. h.  $A \in \mathfrak{M}$ .

**3-3-1.** Ist das Mengensystem  $\mathfrak{M}$  abgeschlossen hinsichtlich der Summenbildung aus je zweien seiner Mengen, gibt es ein  $E \in \mathfrak{M}$ , so daß  $A \subseteq E$  für alle  $A \in \mathfrak{M}$ , und gilt neben  $A \in \mathfrak{M}$  stets  $E - A \in \mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper.

Denn nach § 2, (1-5) (erste Formel) ist:  $A - B = E - ((E - A) + B)$ .

Nach 3-1-1 gibt es über jedem Mengensysteme  $\mathfrak{M}$  einen kleinsten Körper  $\mathfrak{K}$ ; wir zeigen, wie er gebildet werden kann. Da  $A(-B) = A - B$ ,  $A(-B)(-C) = (A - B) - C$  usw., muß  $\mathfrak{K}$  alle Durchschnitte  $M_1 M_2 \dots M_k$  enthalten, in denen für jeden Faktor sei es  $M_i \in \mathfrak{M}$  sei es  $-M_i \in \mathfrak{M}$ , und für mindestens einen Faktor  $M_i \in \mathfrak{M}$  gilt. Man füge alle diese Durchschnitte zu  $\mathfrak{M}$  hinzu, wodurch  $\mathfrak{M}'$  entstehe. Mit  $\mathfrak{K}$  bezeichnen wir das System, das aus  $\mathfrak{M}'$  hervorgeht, indem man zu  $\mathfrak{M}'$  alle Summen aus endlich vielen in  $\mathfrak{M}'$  vorkommenden Mengen hinzufügt. Da offenbar jeder Körper über  $\mathfrak{M}$  das System  $\mathfrak{K}$  enthält, ist — um zu beweisen, daß  $\mathfrak{K}$  der kleinste Körper über  $\mathfrak{M}$  ist — nur mehr zu zeigen, daß  $\mathfrak{K}$  ein Körper ist; und da aus

<sup>1)</sup> Satz 3-2-1 gilt auch für Summen  $\sum_{i=1}^k$ , Satz 3-2-11 auch für Durchschnitte  $\prod_{i=1}^k$ .



$M \in \mathfrak{R}$ ,  $N \in \mathfrak{R}$  gewiß folgt:  $M + N \in \mathfrak{R}$ , ist nur mehr zu zeigen, daß auch  $M - N \in \mathfrak{R}$ . Sei also  $M = M_1 + M_2 + \dots + M_m$ ,  $N = N_1 + N_2 + \dots + N_n$ , wo  $M_i \in \mathfrak{M}$ ,  $N_i \in \mathfrak{M}'$ ; dann ist nach § 2 (1.50) (erste Formel):  $-N = (-N_1) \cdot (-N_2) \dots (-N_n)$ , also nach § 2 (1.2) (erste Formel):

$$\begin{aligned} M - N &= M_1(-N) + M_2(-N) + \dots + M_m(-N) \\ (3) \quad &= M_1(-N_1)(-N_2) \dots (-N_n) + M_2(-N_1)(-N_2) \dots (-N_n) + \\ &\quad \dots + M_m(-N_1)(-N_2) \dots (-N_n). \end{aligned}$$

Wegen  $N_j \in \mathfrak{M}'$  ist hierin jedes  $N_j$  Durchschnitt endlich vieler Mengen, die selbst, oder deren Komplemente zu  $\mathfrak{M}$  gehören; also ist nach § 2 (1.50) (zweite Formel)  $-N_j$  Summe endlich vieler Mengen, die selbst, oder deren Komplemente zu  $\mathfrak{M}$  gehören; also ist in (3) jeder Summand  $M_i(-N_1)(-N_2) \dots (-N_n)$  Summe endlich vieler Summanden aus  $\mathfrak{M}'$ , dasselbe gilt daher für  $M - N$ , also ist  $M - N \in \mathfrak{R}$ , w. z. b. w.

**3.3.11.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so kann jede Summe<sup>1)</sup>  $\sum_{i=1}^{\infty} A_i$  ( $A_i \in \mathfrak{M}$ ) in der Form dargestellt werden:  $\sum_{i=1}^{\infty} C_i$  ( $C_i \in \mathfrak{M}$ ), wo  $C_i \subseteq A_i$  und je zwei  $C_i$  fremd sind.

Man hat nur zu setzen:  $C_1 = A_1$ ,  $C_i = A_i - \sum_{j=1}^{i-1} A_j$  für  $i > 1$ .

Sei  $\mathfrak{M}$  ein Mengensystem; wir bezeichnen mit  $\mathfrak{M}_+$  das System aller Mengen, die Summen endlich vieler Mengen aus  $\mathfrak{M}$  sind. Dann gilt:

**3.3.2.** Wenn aus  $M \in \mathfrak{M}$ ,  $M' \in \mathfrak{M}$  folgt:  $M - M' \in \mathfrak{M}_+$ , so ist  $\mathfrak{M}_+$  ein Körper.

Da  $\mathfrak{M}_+$  jedenfalls hinsichtlich Summenbildung abgeschlossen ist, ist nur zu zeigen: aus  $N \in \mathfrak{M}_+$ ,  $N' \in \mathfrak{M}_+$  folgt  $N - N' \in \mathfrak{M}_+$ . Sei also  $N = M_1 + M_2 + \dots + M_m$ ,  $N' = M'_1 + M'_2 + \dots + M'_n$  ( $M_i \in \mathfrak{M}$ ,  $M'_i \in \mathfrak{M}$ ). Da dann  $N - N' = \sum_{i=1}^m (M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_n))$  und da  $\mathfrak{M}_+$  abgeschlossen hinsichtlich Summenbildung, genügt es zu zeigen, daß  $M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_n) \in \mathfrak{M}_+$ . Das ist nach Voraussetzung richtig für  $n = 1$ ; wir haben also noch zu zeigen: ist  $M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_n) \in \mathfrak{M}_+$  und  $M'_{n+1} \in \mathfrak{M}$ , so ist auch  $M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_{n+1}) \in \mathfrak{M}_+$ . Sei also  $M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_n) = M_i^* + M_2^* + \dots + M_k^*$  ( $M_j^* \in \mathfrak{M}$ ); dann ist  $M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_{n+1}) = \sum_{j=1}^k (M_j^* - M'_{n+1})$ ; da nach Voraussetzung  $M_j^* - M'_{n+1} \in \mathfrak{M}_+$ , so ist auch  $M_i - (M'_1 + M'_2 + \dots + M'_{n+1}) \in \mathfrak{M}_+$ , w. z. b. w.

<sup>1)</sup> Satz 3.3.11 gilt auch für Summen  $\sum_{i=1}^k$ .

**3.3.21.** Ist (für alle  $M \in \mathfrak{M}$ ,  $M' \in \mathfrak{M}$ )  $M - M'$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{M}$ , so ist auch jede Menge aus  $\mathfrak{M}_+$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{M}$ .

Sei  $N \in \mathfrak{M}_+$ , d. h.  $N = M_1 + M_2 + \dots + M_n$  ( $M_i \in \mathfrak{M}$ ). Die Behauptung ist richtig für  $n = 1$ . Wir haben also noch zu zeigen: gilt die Behauptung für  $N$ , und ist  $M_{n+1} \in \mathfrak{M}$ , so gilt sie auch für  $N + M_{n+1}$ . Sei also  $N = M'_1 + \dots + M'_k$ , wo die  $M'_i \in \mathfrak{M}$  und disjunkt. Dann ist  $N + M_{n+1} = M'_1 + \dots + M'_k + (M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_k))$ , und es genügt zu zeigen, daß  $M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_k)$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{M}$  ist. Das ist nach Voraussetzung richtig für  $k=1$ ; bleibt also noch zu zeigen: ist  $M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_k)$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{M}$  und ist  $M'_{k+1} \in \mathfrak{M}$ , so ist auch  $M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_{k+1})$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{M}$ . Sei also  $M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_k) = M''_1 + \dots + M''_l$ , wo die  $M''_i \in \mathfrak{M}$  und disjunkt; dann ist  $M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_{k+1}) = (M''_1 - M'_{k+1}) + \dots + (M''_l - M'_{k+1})$ ; hierin ist nach Voraussetzung jeder Summand Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus  $\mathfrak{M}$ , und da die Summanden  $M''_i - M'_{k+1}$  selbst disjunkt sind, ist auch  $M_{n+1} - (M'_1 + \dots + M'_{k+1})$  Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus  $\mathfrak{M}$ , w. z. b. w.

**3.3.22.** Seien  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  Mengensysteme, in denen die Differenz je zweier Mengen des Systems Summe endlich vieler disjunkter Mengen des Systemes ist, und sei  $\mathfrak{P}$  das System aller Mengen  $A \times B$  ( $A \in \mathfrak{A}$ ,  $B \in \mathfrak{B}$ ); dann ist  $\mathfrak{P}_+$  ein Körper, und jede Menge aus  $\mathfrak{P}_+$  ist Summe endlich vieler disjunkter Mengen aus  $\mathfrak{P}$ .

Sei  $A \times B \in \mathfrak{P}$ ,  $A' \times B' \in \mathfrak{P}$ . Nach 3.3.2 sind  $\mathfrak{A}_+$  und  $\mathfrak{B}_+$  Körper; da jeder Körper ein Ring, ist  $A A' \in \mathfrak{A}_+$ ,  $B B' \in \mathfrak{B}_+$ ; nach 3.3.21 ist also  $A A'$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{A}$ , und nach Voraussetzung gilt das auch für  $A - A'$ ; ebenso sind  $B B'$  und  $B - B'$  Summen endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{B}$ . Nach § 2 (2) ist also, auf Grund des Distributivgesetzes § 2 (2.1), auch  $(A \times B) - (A' \times B')$  Summe endlich vieler disjunkter Summanden aus  $\mathfrak{P}$ . Nun folgt die Behauptung aus 3.3.2 und 3.3.21.

**4.  $\sigma$ -Systeme,  $\delta$ -Systeme.** Betrachten wir nun an Stelle der in Nr. 1 betrachteten Verknüpfungen  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , die je zwei Mengen aus  $\mathfrak{M}$  eine Menge zuordneten, irgendwelche Operationen  $W_1, W_2, \dots, W_k$ , die jeder Mengenfolge aus  $\mathfrak{M}$  (oder auch nur gewissen solchen Mengenfolgen) eine Menge zuordnen. Gehören die einer solchen Mengenfolge durch die genannten Operationen zugeordneten  $k$  Mengen stets wieder zu  $\mathfrak{M}$ , so heißt  $\mathfrak{M}$  hinsichtlich der Operationen  $W_1, W_2, \dots, W_k$  abgeschlossen. Auch hier

kann man zeigen, daß es zu jedem Mengensystem  $\mathfrak{M}$  ein kleinstes System  $\mathfrak{M} \cong \mathfrak{M}$  gibt, das hinsichtlich  $W_1, W_2, \dots, W_k$  abgeschlossen ist; doch gehen wir auf diesen allgemeinen Satz nicht ein.

Zwei Beispiele erhalten wir, wenn wir die Summenbildung oder die Durchschnittsbildung aus einer Mengenfolge betrachten. Ein Mengensystem, das hinsichtlich der Summenbildung (der Durchschnittsbildung) aus Mengenfolgen abgeschlossen ist, heißt ein  $\sigma$ -System (ein  $\delta$ -System). Beispiele: Das leere Mengensystem; jedes Mengensystem, das nur aus einer einzigen Menge besteht; das System aller Teile einer Menge. Offenbar ist jedes  $\sigma$ -System (jedes  $\delta$ -System) auch abgeschlossen hinsichtlich der Summenbildung (der Durchschnittsbildung) aus je zweien seiner Mengen, denn  $A + B = A + B + A + B + \dots$ . Also ist ein Mengensystem, das sowohl  $\sigma$ - als auch  $\delta$ -System ist, ein Ring.

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{M}_\sigma$  (mit  $\mathfrak{M}_\delta$ ) das Mengensystem, das entsteht, indem man zu  $\mathfrak{M}$  die Summen  $S M_\nu$  (die Durchschnitte  $D M_\nu$ ) aller Mengenfolgen  $((M_\nu))$  aus  $\mathfrak{M}$  hinzufügt. Jede Menge  $M \in \mathfrak{M}_\sigma$  kann in der Form geschrieben werden:  $M = S M_\nu$ ,  $(M_\nu \in \mathfrak{M})$ : ist  $M \in \mathfrak{M}_\sigma - \mathfrak{M}$ , so folgt dies aus der Definition von  $\mathfrak{M}_\sigma$ ; ist  $M \in \mathfrak{M}$ , so setze man alle  $M_\nu = M$ . Ebenso: jede Menge  $M \in \mathfrak{M}_\delta$  kann in der Form geschrieben werden:  $M = D M_\nu$ ,  $(M_\nu \in \mathfrak{M})$ .

**3.4.1.**  $\mathfrak{M}_\sigma$  ist das kleinste  $\sigma$ -System,  $\mathfrak{M}_\delta$  das kleinste  $\delta$ -System über  $\mathfrak{M}$ .

Da offenbar  $\mathfrak{M}_\sigma$  in jedem  $\sigma$ -System über  $\mathfrak{M}$  enthalten ist, bleibt nur zu zeigen, daß  $\mathfrak{M}_\sigma$  ein  $\sigma$ -System ist; d. h. wir haben zu zeigen: ist  $A_k \in \mathfrak{M}_\sigma$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) und  $A = S_k A_k$ , so ist auch  $A \in \mathfrak{M}_\sigma$ . Wegen  $A_k \in \mathfrak{M}_\sigma$  ist  $A_k = S_n A_{kn}$  mit  $A_{kn} \in \mathfrak{M}$ , und daher  $A = S_{k,n} A_{kn}$ . Nach 1.6.1 kann die Doppelfolge der  $A_{kn}$  in eine einfache Folge  $B_1, B_2, \dots, B_\nu, \dots$  geordnet werden; somit ist auch  $A = S_\nu B_\nu$ , und wegen  $B_\nu \in \mathfrak{M}$  ist also  $A \in \mathfrak{M}_\sigma$ , wie behauptet.

Aus 3.4.1 folgt unmittelbar:

**3.4.11.** Die Aussage:  $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$  ist äquivalent mit: „ $\mathfrak{M}$  ist ein  $\sigma$ -System“. Die Aussage:  $\mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}$  ist äquivalent mit: „ $\mathfrak{M}$  ist ein  $\delta$ -System“.

**3.4.2.** Bilden die Mengen  $A$  ein  $\sigma$ -System (ein  $\delta$ -System) und ist  $C$  eine beliebige Menge, so bilden die Mengen  $C - A$  ein  $\delta$ -System (ein  $\sigma$ -System).

Dies folgt unmittelbar aus § 2, (1.8).

Wir nennen den Übergang von  $\mathfrak{M}$  zu  $\mathfrak{M}_\sigma$  (zu  $\mathfrak{M}_\delta$ ) den  $\sigma$ -Prozeß (den  $\delta$ -Prozeß). Das durch den  $\sigma$ -Prozeß aus  $\mathfrak{M}_\sigma$  entstandene System bezeichnen

wir mit  $\mathfrak{M}_{\sigma\sigma}$ , und analog ist die Bedeutung von  $\mathfrak{M}_{\delta\delta}$ . Aus 3.4.1 und 3.4.11 folgt:

$$(4) \quad \mathfrak{M}_{\sigma\sigma} = \mathfrak{M}_{\sigma}, \quad \mathfrak{M}_{\delta\delta} = \mathfrak{M}_{\delta}.$$

Die Aufgabe, über einem Mengensystem  $\mathfrak{M}$  das kleinste System zu bilden, das sowohl ein  $\sigma$ -System als auch ein  $\delta$ -System ist, werden wir in § 33, 1 behandeln.

**5.  $\sigma$ -Ringe,  $\delta$ -Ringe.** Ein  $\sigma$ -System ( $\delta$ -System), das gleichzeitig ein Ring ist, heißt ein  $\sigma$ -Ring ( $\delta$ -Ring).

**3.5.1.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{M}_{\sigma}$  ein  $\sigma$ -Ring,  $\mathfrak{M}_{\delta}$  ein  $\delta$ -Ring.

Nach 3.4.1 ist  $\mathfrak{M}_{\sigma}$  ein  $\sigma$ -System, also abgeschlossen hinsichtlich der Summenbildung; es ist also nur mehr zu zeigen: ist  $A \in \mathfrak{M}_{\sigma}$ ,  $B \in \mathfrak{M}_{\sigma}$ , so ist auch  $A \cdot B \in \mathfrak{M}_{\sigma}$ . Sei also  $A = \sum_k A_k$  ( $A_k \in \mathfrak{M}$ ),  $B = \sum_n B_n$  ( $B_n \in \mathfrak{M}$ ); nach dem ersten Distributivgesetz § 2, (2.3) ist  $A \cdot B = \sum_{k,n} A_k \cdot B_n$ , und weil  $\mathfrak{M}$  ein Ring, ist  $A_k \cdot B_n \in \mathfrak{M}$ ; nach 1.6.1 können die  $A_k \cdot B_n$  in eine einfache Folge geordnet werden; also ist  $A \cdot B \in \mathfrak{M}_{\sigma}$ , w. z. b. w.

**3.5.11.** Ist  $\mathfrak{R}$  der kleinste Ring über  $\mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{R}_{\sigma}$  der kleinste  $\sigma$ -Ring,  $\mathfrak{R}_{\delta}$  der kleinste  $\delta$ -Ring über  $\mathfrak{M}$ .

Denn jedenfalls muß  $\mathfrak{R}_{\sigma}$  im kleinsten  $\sigma$ -Ring über  $\mathfrak{M}$  enthalten sein; andererseits ist aber nach 3.5.1  $\mathfrak{R}_{\sigma}$  selbst ein  $\sigma$ -Ring.

Wir nennen die Mengenfolge  $((A_n))$  monoton wachsend, wenn  $A_n \subseteq A_{n+1}$ , monoton abnehmend, wenn  $A_n \supseteq A_{n+1}$ .

**3.5.2.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist jede Menge  $A \in \mathfrak{M}_{\sigma}$  in der Form darstellbar  $A = \sum_n A_n$ , wo  $((A_n))$  eine monoton wachsende Mengenfolge aus  $\mathfrak{M}$ , und jede Menge  $A \in \mathfrak{M}_{\delta}$  in der Form  $A = \bigcap_n A_n$ , wo  $((A_n))$  eine monoton abnehmende Mengenfolge aus  $\mathfrak{M}$ .

Sei  $A \in \mathfrak{M}_{\sigma}$ , d. h.  $A = \sum_n B_n$  mit  $B_n \in \mathfrak{M}$ ; wir setzen  $A_n = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ ; dann ist auch  $A = \sum_n A_n$ , ferner  $A_n \subseteq A_{n+1}$ , und weil  $\mathfrak{M}$  ein Ring, ist  $A_n \in \mathfrak{M}$ .

**6.  $\sigma$ -Körper,  $\delta$ -Körper.** Ein  $\sigma$ -System ( $\delta$ -System), das gleichzeitig ein Körper ist, heißt ein  $\sigma$ -Körper ( $\delta$ -Körper).

**3.6.1.** Jeder  $\sigma$ -Körper  $\mathfrak{K}$  ist auch ein  $\delta$ -Körper<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>) Hingegen ist keineswegs jeder  $\sigma$ -Ring auch ein  $\delta$ -Ring. Beispiel:  $\mathfrak{M}$  bestehe aus den Mengen  $A_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), wo  $A_{\nu+1} \subseteq A_\nu$ ,  $A_\nu \neq A$ ,  $\bigcap_\nu A_\nu = A$ . Da  $A \sim \varepsilon \mathfrak{M}$ , ist  $\mathfrak{M}$  kein  $\delta$ -System.

Es ist zu zeigen, daß aus  $A_n \in \mathfrak{R}$  auch folgt:  $D A_n \in \mathfrak{R}$ . Wir setzen  $B_1 = A_1$ ,  $B_n = A_1 A_2 \dots A_n$  ( $n > 1$ ); dann ist  $B_n \in \mathfrak{R}$ ,  $B_{n+1} \subseteq B_n$  und  $D A_n = D B_n$ ; ferner ist:  $D B_n = B_1 - S (B_n - B_{n+1})$ ; da hierin  $B_n - B_{n+1} \in \mathfrak{R}$ , und  $\mathfrak{R}$  ein  $\sigma$ -System, ist auch  $S (B_n - B_{n+1}) \in \mathfrak{R}$ , und da  $\mathfrak{R}$  ein Körper, ist auch  $B_1 - S (B_n - B_{n+1}) \in \mathfrak{R}$ ; d. h.  $D B_n \in \mathfrak{R}$ , d. h.  $D A_n \in \mathfrak{R}$ , w. z. b. w.

**3.6.11.** Jeder  $\delta$ -Körper  $\mathfrak{R}$ , in dem es eine größte Menge gibt<sup>1)</sup>, ist auch ein  $\sigma$ -Körper.

Sei  $E$  die größte Menge von  $\mathfrak{R}$  (d. h. es sei  $E \in \mathfrak{R}$  und  $A \subseteq E$  für alle  $A \in \mathfrak{R}$ ); wir bilden zu jedem  $A \in \mathfrak{R}$  die Menge  $E - A$ ; weil  $\mathfrak{R}$  ein  $\delta$ -System, ist nach 3.4.2 das System aller dieser Mengen  $E - A$  ein  $\sigma$ -System; weil aber  $\mathfrak{R}$  ein Körper, ist das System aller Mengen  $E - A$  identisch mit  $\mathfrak{R}$ , d. h.  $\mathfrak{R}$  ist ein  $\sigma$ -Körper.

Ein Analogon zu 3.5.1 gilt für Körper nicht; ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so wird i. a. weder  $\mathfrak{M}_\sigma$  noch  $\mathfrak{M}_\delta$  ein Körper sein. Dementsprechend kann auch die Aufgabe, zu einem Mengensystem  $\mathfrak{M}$  den kleinsten  $\sigma$ -Körper über  $\mathfrak{M}$  zu finden, nicht so einfach gelöst werden, wie in 3.5.11 die Aufgabe gelöst wurde, den kleinsten  $\sigma$ -Ring zu finden. Mit der Auffindung des kleinsten  $\sigma$ -Körpers über  $\mathfrak{M}$  werden wir uns in § 33, 2 beschäftigen.

**7. Limesbildung.** Sei  $((A_n))$  irgendeine Mengenfolge. Wir bezeichnen mit  $\varinjlim A_n$  die Menge aller Elemente  $x$ , die unendlich vielen  $A_n$  angehören ( $x \in A_n$  für unendlich viele  $n$ ), mit  $\varprojlim A_n$  die Menge aller  $x$ , die fast allen  $A_n$  angehören ( $x \in A_n$  für fast alle  $n$ ). Diese beiden Mengen können aus den  $A_n$  durch Summen- und Durchschnittsbildungen hergestellt werden; man setze:

$$(7) \quad S_n = S_{i \geq n} A_i = A_n + A_{n+1} + \dots; \quad D_n = D_{i \geq n} A_i = A_n A_{n+1} \dots;$$

dann ist:

$$(7.1) \quad \varinjlim A_n = S_n D_n; \quad \varprojlim A_n = D_n S_n.$$

Mithin gilt für alle  $k$ :

$$(7.11) \quad D_{i \geq k} A_i \subseteq \varinjlim A_n; \quad S_{i \geq k} A_i \supseteq \varprojlim A_n.$$

Läßt man aus  $((A_n))$  endlich viele Mengen weg oder fügt endlich viele hinzu, so ändern sich  $\varinjlim A_n$ ,  $\varprojlim A_n$  nicht. Man beweist ohne Schwierigkeit:

$$(7.2) \quad \varinjlim A_n \subseteq \varinjlim A_n.$$

<sup>1)</sup> Ohne diese Voraussetzung wäre der Satz nicht richtig; Beispiel: das System aller endlichen Teile einer unendlichen Menge.

$$(7.21) \quad \underline{\lim}_n (E - A_n) = E - \overline{\lim}_n A_n : \quad \overline{\lim}_n (E - A_n) = E - \underline{\lim}_n A_n.$$

$$(7.3) \quad \begin{aligned} \underline{\lim}_n A_n + \underline{\lim}_n B_n &\subseteq \underline{\lim}_n (A_n + B_n) \subseteq \underline{\lim}_n A_n + \overline{\lim}_n B_n \\ &\subseteq \overline{\lim}_n (A_n + B_n) = \overline{\lim}_n A_n + \overline{\lim}_n B_n. \end{aligned}$$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} \underline{\lim}_n A_n \cdot \underline{\lim}_n B_n &= \underline{\lim}_n A_n B_n \subseteq \underline{\lim}_n A_n \cdot \overline{\lim}_n B_n \subseteq \overline{\lim}_n A_n B_n \\ &\subseteq \overline{\lim}_n A_n \cdot \overline{\lim}_n B_n. \end{aligned}$$

$$(7.5) \quad \begin{aligned} \underline{\lim}_n A_n - \overline{\lim}_n B_n &= \underline{\lim}_n (A_n - B_n) \subseteq \left\{ \begin{array}{l} \underline{\lim}_n A_n - \underline{\lim}_n B_n \\ \underline{\lim}_n A_n - \overline{\lim}_n B_n \end{array} \right\} \\ &\subseteq \overline{\lim}_n (A_n - B_n) \subseteq \overline{\lim}_n A_n - \underline{\lim}_n B_n. \end{aligned}$$

**3.7.1.** Ist  $A_n \subseteq B_n$  für fast alle  $n$ , so ist:

$$\underline{\lim}_n A_n \subseteq \underline{\lim}_n B_n; \quad \overline{\lim}_n A_n \subseteq \overline{\lim}_n B_n.$$

**3.7.11.** Für jede Teilfolge  $((A_{n_i}))$  von  $((A_n))$  gilt:

$$\underline{\lim}_n A_n \subseteq \underline{\lim}_i A_{n_i} \subseteq \overline{\lim}_i A_{n_i} \subseteq \overline{\lim}_n A_n.$$

**3.7.12.** Ist  $A_i \subseteq \overline{\lim}_n A_n$  (bzw.  $A_i \supseteq \underline{\lim}_n A_n$ ) für alle  $i$ , so ist:

$$\overline{\lim}_n A_n = \bigcup_i A_i \text{ (bzw. } \underline{\lim}_n A_n = \bigcap_i A_i \text{)}.$$

Denn nach Voraussetzung ist  $\bigcup_i A_i \subseteq \overline{\lim}_n A_n$ , und nach (7.11) ist  $\bigcup_i A_i \supseteq \underline{\lim}_n A_n$ .

Gilt in (7.2) das Zeichen  $=$ , so setzen wir:

$$\underline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n = \overline{\lim}_n A_n.$$

Die Gleichung  $\underline{\lim}_n A_n = A$  besagt also: ist  $a \in A$ , so auch  $a \in A_n$  für fast alle  $n$ ; ist  $a \sim \varepsilon A$ , so auch  $a \sim \varepsilon A_n$  für fast alle  $n$ .

**3.7.2.** Ist  $\underline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n C_n$  und  $A_n \subseteq B_n \subseteq C_n$  für fast alle  $n$ , so ist auch  $\underline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n B_n = \underline{\lim}_n C_n$ .

Dies folgt aus 3.7.1.

**3.7.21.** Ist  $\underline{\lim}_n A_n = A$ , so auch für jede Teilfolge:  $\underline{\lim}_i A_{n_i} = A$ .

Dies folgt aus 3.7.11.

**3.7.22.** Ist  $A_n = A$  für fast alle  $n$ , so ist auch  $\underline{\lim}_n A_n = A$ .

**3.7.3.** Ist  $((A_n))$  monoton wachsend, so ist  $\lim_n A_n = S A_n$ ; ist  $((A_n))$  monoton abnehmend, so ist  $\lim_n A_n = D A_n$ .

Denn ist  $((A_n))$  monoton wachsend, so ist in (7):  $S_n = S A_n$ ,  $D_n = A_n$ , also nach (7.1):  $\lim_n A_n = \lim_n S A_n = S A_n$ .

Aus (7.21) folgt, wenn  $\lim_n A_n$  existiert:

$$(7.6) \quad \lim_n (E - A_n) = E - \lim_n A_n.$$

Aus (7.3), (7.4), (7.5) folgt, wenn  $\lim_n A_n$  und  $\lim_n B_n$  existieren:

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \lim_n (A_n + B_n) &= \lim_n A_n + \lim_n B_n; \quad \lim_n A_n B_n = \lim_n A_n \cdot \lim_n B_n; \\ \lim_n (A_n - B_n) &= \lim_n A_n - \lim_n B_n. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die charakteristischen Funktionen (§ 1, 5) von  $A_n$ ,  $\lim_n A_n$ ,  $\underline{\lim}_n A_n$ ,  $\overline{\lim}_n A_n$  der Reihe nach mit  $f_n$ ,  $\bar{f}$ ,  $\underline{f}$ ,  $f$ , so gilt:

$$(7.8) \quad \bar{f} = \overline{\lim}_n f_n, \quad \underline{f} = \underline{\lim}_n f_n, \quad f = \lim_n f_n,$$

die letzte Beziehung natürlich nur, wenn  $\lim_n A_n$  existiert.

Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}_{\sigma\delta}$  und  $\mathfrak{M}_{\delta\sigma}$  die Mengensysteme, die aus  $\mathfrak{M}_\sigma$  bzw.  $\mathfrak{M}_\delta$  durch Anwendung des  $\delta$ -Prozesses, bzw. des  $\sigma$ -Prozesses entstehen, so entnehmen wir aus (7) und (7.1):

**3.7.4.** Ist  $((A_n))$  eine Mengenfolge aus  $\mathfrak{M}$ , so ist  $\overline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{M}_{\sigma\delta}$ ,  $\underline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$  und somit, wenn  $\lim_n A_n$  existiert:  $\lim_n A_n \in \mathfrak{M}_{\sigma\delta} \cdot \mathfrak{M}_{\delta\sigma}$ .

**8.  $\lambda$ -Systeme.** Ein Mengensystem  $\mathfrak{M}$ , das abgeschlossen hinsichtlich der Limesbildung ist, d. h. das neben jeder Mengenfolge  $((A_n))$ , für die  $\lim_n A_n$  existiert, auch die Menge  $\lim_n A_n$  enthält, nennen wir ein  $\lambda$ -System.

**3.8.1.** Damit der Ring  $\mathfrak{M}$  ein  $\lambda$ -System sei, ist notwendig und hinreichend, daß er sowohl ein  $\sigma$ -System als auch ein  $\delta$ -System sei.

Notwendig: Sei  $A \in \mathfrak{M}_\sigma$ ; nach 3.5.2 gibt es in  $\mathfrak{M}$  eine monoton wachsende Mengenfolge  $((A_n))$ , so daß  $A = S A_n$ ; nach 3.7.3 ist dann auch  $A = \lim_n A_n$ , und da  $\mathfrak{M}$  ein  $\lambda$ -System, gilt:  $A \in \mathfrak{M}$ ; es ist also  $\mathfrak{M}_\sigma \subseteq \mathfrak{M}$ , d. h.  $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$ , d. h.  $\mathfrak{M}$  ist ein  $\sigma$ -System; ebenso zeigt man, daß  $\mathfrak{M}$  ein  $\delta$ -System. Hinreichend: Ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System und ein  $\delta$ -System, so ist nach 3.4.11  $\mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}$ , also auch  $\mathfrak{M}_{\sigma\delta} = \mathfrak{M}_\delta = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{M}_{\delta\sigma} = \mathfrak{M}_\sigma = \mathfrak{M}$ .

Nach 3.7.4 ist also für jede Folge  $((A_n))$  aus  $\mathfrak{M}$ , für die  $\lim_n A_n$  existiert:  $\lim_n A_n \in \mathfrak{M}$ , d. h.  $\mathfrak{M}$  ist ein  $\lambda$ -System.

**3.8.2.** *Damit der Körper  $\mathfrak{K}$  ein  $\lambda$ -System sei, ist notwendig und hinreichend, daß er ein  $\sigma$ -System sei.*

Notwendig: folgt aus 3.8.1. Hinreichend: Ist  $\mathfrak{K}$  ein  $\sigma$ -System, so nach 3.6.1 auch ein  $\delta$ -System; also folgt die Behauptung aus 3.8.1.

Mit der Bildung des kleinsten  $\lambda$ -Systemes über einem gegebenen Systeme  $\mathfrak{M}$  werden wir uns in § 33, 2 befassen.

Literatur zu § 3: F. Hausdorff, Mengenlehre (Leipzig 1927) § 17, 18. M. Fréchet, Fund. math. 4 (1923) S. 331. A. Tarski, Fund. math. 16 (1930) S. 181. Die in Nr. 7 besprochenen Mengen  $\lim_n A_n$ ,  $\underline{\lim}_n A_n$  wurden zuerst von E. Borel betrachtet.

## § 4. Die Mächtigkeiten.

**1. Gleichheitsrelationen.** Sei  $x R y$  eine Relation, bei der  $x$  und  $y$  demselben Grundbereich angehören (§ 1, 2). Wir bezeichnen (§ 1, 4)  $C(R) = B(R) + \mathcal{H}(R)$  als das Feld von  $R$ . Die Relation heißt reflexiv, wenn für jedes  $x \in C(R)$  gilt:  $x R x$ ; sie heißt symmetrisch, wenn die beiden Aussagen  $x R y$  und  $y R x$  für alle  $x, y$  äquivalent sind, asymmetrisch, wenn  $x R y$  und  $y R x$  niemals gleichzeitig gelten, d. h. wenn  $\sim((x R y) \cdot (y R x))$  gilt für alle  $x \in C(R)$  und  $y \in C(R)$ ;  $R$  heißt transitiv, wenn aus  $x R y$  und  $y R z$  folgt  $x R z$ , d. h. wenn  $(x R \mid R z) \supset (x R z)$ .

Eine Relation  $R$ , die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist, nennen wir eine Gleichheitsrelation; für eine Gleichheitsrelation gilt  $B(R) = \mathcal{H}(R) = C(R)$ . Sei  $R$  eine Gleichheitsrelation; wir bilden zu jedem  $x \in C(R)$  die Menge aller  $y$ , für die  $x R y$  gilt. Dadurch ist  $C(R)$  in ein System fremder Mengen zerlegt, so daß jedes  $x \in C(R)$  zu einer und nur einer dieser Mengen gehört, und zwar so, daß  $y$  und  $z$  zur selben oder zu verschiedenen dieser Mengen gehören, je nachdem  $y R z$  gilt oder nicht gilt.

Literatur: Whitehead-Russell, Principia Mathematica Nr. 72; N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 83.

**2. Äquivalenz, Mächtigkeit.** Wir nennen nun zwei Mengen  $A$  und  $A'$  äquivalent (in Zeichen:  $A \sim A'$ ), wenn es eine eindeutige Abbildung (§ 1, 5) von  $A$  auf  $A'$  (d. h. eine eindeutige Relation  $R$  mit  $B(R) = A$ ,  $\mathcal{H}(R) = A'$ ) gibt. Offenbar ist diese Äquivalenz eine reflexive, symmetrische, transitive Relation zwischen Mengen, deren Feld das System aller Mengen ist. Es zerfällt also das System aller Mengen in fremde Teilsysteme, so daß



je zwei Mengen desselben Teilsystemes äquivalent, je zwei Mengen verschiedener Teilsysteme nicht äquivalent sind. Jedem dieser Teilsysteme denken wir uns ein Symbol zugeordnet, das wir als die Mächtigkeit oder Kardinalzahl jeder diesem Teilsysteme angehörenden Menge bezeichnen<sup>1)</sup>. Es haben also zwei äquivalente Mengen dieselbe Mächtigkeit, nicht äquivalente Mengen verschiedene Mächtigkeiten. Eines der genannten Teilsysteme besteht nur aus der leeren Menge; diesem Teilsysteme ordnet man die Kardinalzahl 0 zu; ein anderes Teilsystem besteht aus allen denjenigen Mengen, die nur ein einziges Element enthalten; diesem Teilsysteme wird die Kardinalzahl 1 zugeordnet. Offenbar deckt sich der so eingeführte Begriff der Kardinalzahl einer Menge, wenn es sich um endliche Mengen handelt, völlig mit dem, was man seit jeher unter Kardinalzahl einer endlichen Menge verstanden hat.

Zum Unterschiede von den endlichen Mengen kann eine unendliche Menge sehr wohl dieselbe Mächtigkeit wie ein echter Teil von ihr haben (dies trifft sogar nach 5-1-62 stets zu). So sieht man z. B., indem man  $n$  und  $2n$  einander zuordnet, daß die Menge aller und die Menge aller geraden natürlichen Zahlen äquivalent sind, und also gleiche Mächtigkeit haben.

**3. Rechnen mit Mächtigkeiten.** Wir definieren nun die Verknüpfungen von Mächtigkeiten. Dabei bezeichnen wir (provisorisch) die Mächtigkeiten mit kleinen deutschen Buchstaben, und zwar die Mächtigkeit von  $A$  mit  $\alpha$ , die Mächtigkeit von  $A_m$  mit  $\alpha_m$  usw. Man wird ohne weiteres sehen, daß, wenn es sich um endliche Mengen handelt, die zu definierenden Verknüpfungen sich auf die bekannten Verknüpfungen der endlichen Zahlen reduzieren.

Ist das System der Mengen  $A_m$  ( $m \in M$ ) disjunkt, und ist  $A = \sum_{m \in M} A_m$ , so heißt  $\alpha$  die Summe der Mächtigkeiten  $\alpha_m$ , in Zeichen:  $\alpha = \sum_{m \in M} \alpha_m$ . Diese Definition beruht darauf, daß, wenn auch das System der Mengen  $B_m$  ( $m \in M$ ) disjunkt ist, aus  $A_m \sim B_m$  folgt:  $\sum_{m \in M} A_m \sim \sum_{m \in M} B_m$ . Offenbar ist diese Addition der Mächtigkeiten assoziativ und kommutativ. Ist  $M$  die Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$ , so schreiben wir:  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ ; sind also die Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_k$  zu je zweien fremd, so ist  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$  die Mächtigkeit von  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$ .

<sup>1)</sup> Rein logisch betrachtet ist es ganz überflüssig zwischen einem solchen Teilsysteme und dem ihm zugeordneten Symbole zu unterscheiden: man kann das betreffende Teilsystem selbst als die Mächtigkeit jeder ihm angehörenden Menge bezeichnen. Dies ist die Auffassung von Frege und Russell.

Ist (§ 2, 2):  $A = \prod_{m \in M} A_m$  (diesmal braucht das System der  $A_m$  nicht disjunkt zu sein), so heißt  $\alpha$  das Produkt der  $\alpha_m$ , in Zeichen  $\alpha = \prod_{m \in M} \alpha_m$ . Diese Definition beruht darauf, daß aus  $A_m \sim B_m$  folgt:  $\prod_{m \in M} A_m \sim \prod_{m \in M} B_m$ . Diese Multiplikation der Mächtigkeiten ist assoziativ und kommutativ. Ist  $M$  die Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$ , so schreiben wir:  $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k$ . Also:

**4.3.1.** Hat  $A_i$  die Mächtigkeit  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), so hat die Menge aller  $k$ -tupel  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$  mit  $\alpha_i \in A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) die Mächtigkeit  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_k$ .

Es gilt das Distributivgesetz:

$$(3) \quad \alpha \cdot \sum_{m \in M} \alpha_m = \sum_{m \in M} \alpha \cdot \alpha_m.$$

Sind in einer Summe alle Summanden gleich:  $\alpha_m = \alpha$ , so ist  $\sum_{m \in M} \alpha_m = m \cdot \alpha$ , wo  $m$  die Mächtigkeit von  $M$  bedeutet.

Unter  $\alpha^b$  verstehen wir die Mächtigkeit von  $A^B$  (§ 2, 3) wenn  $\alpha$  die Mächtigkeit von  $A$ ,  $b$  die von  $B$  ist. Diese Definition beruht darauf, daß aus  $A \sim A'$ ,  $B \sim B'$  folgt:  $A^B \sim A'^{B'}$ . Es gelten die Rechenregeln:

$$(3.1) \quad \alpha \sum_{m \in M} \alpha_m = \prod_{m \in M} \alpha^{\alpha_m}; \quad \prod_{m \in M} \alpha_m^b = \left( \prod_{m \in M} \alpha_m \right)^b; \quad \alpha^{b^c} = (\alpha^b)^c.$$

Sind in einem Produkt alle Faktoren gleich:  $\alpha_m = \alpha$ , so ist  $\prod_{m \in M} \alpha_m = \alpha^m$ , wo  $m$  die Mächtigkeit von  $M$  bedeutet.

Aus der Definition von  $A^B$  (§ 2, 3) folgt unmittelbar:

**4.3.2.** Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\alpha$ ,  $B$  die Mächtigkeit  $b$ , so hat die Menge aller Funktionen  $f(b)$ , deren Bereich  $B$  ist, und für die  $f(b) \in A$  ist, die Mächtigkeit  $\alpha^b$ .

Ist insbesondere  $B$  die Menge  $\{1, 2, \dots, k\}$ , so erhält man hieraus:

**4.3.21.** Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\alpha$ , so hat die Menge aller  $k$ -tupel aus  $A$  die Mächtigkeit  $\alpha^k$ .

Aus § 2 (3) folgt:  $\alpha^0 = 1$ .

**4.3.3.** Hat  $B$  die Mächtigkeit  $b$ , so hat das System aller Teile von  $B$  die Mächtigkeit  $2^b$ .

In der Tat, denkt man sich zu jedem Teile von  $B$  die charakteristische Funktion gebildet (§ 1, 5), so sieht man: die Menge der Teile von  $B$  ist äquivalent der Menge der Funktionen des Bereiches  $B$ , die nur die Werte 0, 1 annehmen. Nun folgt die Behauptung aus 4.3.2, indem man dort  $A = \{0, 1\}$  setzt.

Wir wollen nun zeigen, daß  $2^b \neq b$  ist; dazu benötigen wir den Hilfssatz:

**4.3.4.** Ist jedem  $x \in B$  ein Teil  $B_x$  von  $B$  zugeordnet, so ist die Menge  $B^*$  der der Beziehung  $x \sim \varepsilon B_x$  genügenden Elemente von  $B$  verschieden von allen  $B_x$  ( $x \in B$ ).

In der Tat, für alle  $x \in B$  gilt die Aussagenäquivalenz:  $(x \in B^*) \equiv (x \sim \varepsilon B_x)$ . Gäbe es nun ein  $x^* \in B$ , so daß  $B^* = B_{x^*}$ , so würde für dieses  $x^*$  unsere Aussagenäquivalenz lauten:  $(x^* \in B_{x^*}) \equiv (x^* \sim \varepsilon B_{x^*})$ , was unmöglich.

**4.3.5.** Für jede Mächtigkeit  $\mathfrak{b}$  ist  $2^{\mathfrak{b}} \neq \mathfrak{b}$ .

Sei in der Tat  $B$  eine Menge der Mächtigkeit  $\mathfrak{b}$ , und sei  $B$  eineindeutig abgebildet auf ein System  $\mathfrak{B}$  von Teilen von  $B$ . Aus 4.3.4 folgt, daß  $\mathfrak{B}$  nicht das System aller Teile von  $B$  sein kann, d. h.  $B$  kann nicht äquivalent sein dem System aller Teile von  $B$ , d. h. nach 4.3.3:  $\mathfrak{b} \neq 2^{\mathfrak{b}}$ .

Literatur zu § 4. Der Inhalt dieses Paragraphen stammt im wesentlichen von G. Cantor. Näheres in den Lehrbüchern der Mengenlehre, insbesondere: F. Hausdorff, Mengenlehre, Leipzig 1927; A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre, 3. Aufl., Berlin 1928; W. Sierpiński, Leçons sur les nombres transfinis, Paris 1928; Whitehead-Russell, Principia Mathematica I, II.

## § 5. Beispiele von Mächtigkeiten.

**1. Abzählbare Mengen.** Eine Menge, die äquivalent ist der Menge aller natürlichen Zahlen, heißt abzählbar unendlich. „ $A$  ist abzählbar unendlich“ heißt also soviel wie: „es gibt eine eineindeutige Abbildung von  $A$  auf die Menge der natürlichen Zahlen“; bezeichnen wir das dabei der Zahl  $n$  zugeordnete Element von  $A$  mit  $a_n$ , so sehen wir: Jede abzählbar unendliche Menge kann als Folge

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

mit lauter verschiedenen Gliedern geschrieben werden; umgekehrt: sind in einer Folge je zwei Glieder verschieden, so bilden sie eine abzählbar unendliche Menge<sup>1)</sup>.

Nach Definition haben alle abzählbar unendlichen Mengen dieselbe Mächtigkeit; sie wird mit  $\aleph_0$  bezeichnet (wegen dieser Bezeichnung vgl. § 8, 3).

**5.1.1.** Bedeutet  $k$  eine endliche Kardinalzahl  $\neq 0$ , so ist:

$$(1.1) \quad \aleph_0 + k = \aleph_0, \quad k \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0^k = \aleph_0.$$

In der Tat, ist  $A$  die Menge der Elemente (1) und  $B$  die endliche Menge  $b_1, b_2, \dots, b_k$ , so kann  $A + B$  als Folge:

$$b_1, b_2, \dots, b_k, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

<sup>1)</sup> Der Name „abzählbar unendlich“ rührt daher, daß diese Mengen mit Hilfe aller natürlichen Zahlen durchnummeriert (abgezählt) werden können, wie eine Menge aus  $n$  Elementen mit Hilfe der Zahlen 1, 2, ...,  $n$ .

geschrieben werden; das ist die erste Gleichung (1.1). Ist  $A_i$  die Menge der Elemente  $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}, \dots$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), so kann  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$  als Folge:

$$a_{11}, a_{21}, \dots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \dots, a_{k2}, a_{13}, a_{23}, \dots, a_{k3}, \dots$$

geschrieben werden; das ist die zweite Gleichung (1.1). Die dritte Gleichung (1.1) ist eine unmittelbare Folgerung aus 1.6.1. Die vierte Gleichung (1.1) folgt durch wiederholte Anwendung der dritten.

**5.1.2.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph_0$ , so auch die Menge aller  $k$ -tupel aus  $A$ .*

Denn nach 4.3.21 hat die Menge aller  $k$ -tupel aus  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph_0^k$ , und nach 5.1.1 ist  $\aleph_0^k = \aleph_0$ .

**5.1.21.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph_0$ , so auch die Menge  $M$  aller endlichen Komplexe (§ 1, 6) aus  $A$ .*

Denn bedeutet  $M_k$  die Menge aller  $k$ -tupel aus  $A$ , so ist  $M = \bigcup_k M_k$ ; nach 5.1.2 hat hierin  $M_k$  die Mächtigkeit  $\aleph_0$ , also hat  $M$  die Mächtigkeit  $\aleph_0 \cdot \aleph_0$ , und nach 5.1.1 ist  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ .

**5.1.22.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\alpha$ , so hat die Menge aller Folgen aus  $A$  die Mächtigkeit  $\alpha^{\aleph_0}$ .*

Dies folgt aus 4.3.2, denn eine Folge  $((a_n))$  aus  $A$  ist eine Funktion  $f$ , deren Bereich die Menge der natürlichen Zahlen ist, und für die  $f(n) = a_n$ , und  $a_n \in A$ .

Wir fassen die leere Menge, die endlichen Mengen und die abzählbar unendlichen Mengen zusammen unter die Bezeichnung abzählbare Mengen. Eine Menge, die nicht abzählbar ist, heißt unabzählbar. Man erkennt unmittelbar:

**5.1.3.** *Jeder Teil einer abzählbaren Menge ist abzählbar.*

**5.1.31.** *Die Summe abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist abzählbar.*

Nach 5.1.3 genügt es, den Beweis für Summen aus unendlich vielen Summanden zu führen. Sei also:  $A = \bigcup_n A_n$ . Wir setzen  $B_1 = A_1$ ,  $B_n = A_n - (A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1})$  ( $n > 1$ ); dann ist auch  $A = \bigcup_n B_n$ , und das System der  $B_n$  ist disjunkt. Wegen 5.1.3 können wir uns auf den Fall beschränken, daß alle  $B_n$  abzählbar unendlich sind; dann aber hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$ , ist also abzählbar.

**5.1.4.** *Die Menge  $R$  aller rationalen Zahlen hat die Mächtigkeit  $\aleph_0$ .*

Ist  $P$  die Menge aller positiven,  $N$  die aller negativen rationalen Zahlen, so ist  $R = P + N + \{0\}$ , und da  $P \sim N$ , genügt es nach 5.1.31 zu zeigen, daß  $P$  die Mächtigkeit  $\aleph_0$  hat. Jede positive rationale Zahl hat die Form  $\frac{p}{q}$ ,

wo  $p$  und  $q$  teilerfremde natürliche Zahlen sind; also ist die Menge  $P$  äquivalent einem Teil der Menge aller Paare  $(m, n)$  natürlicher Zahlen; nach 5.1.2 aber hat die Menge aller Paare natürlicher Zahlen die Mächtigkeit  $\aleph_0$ , nach 5.1.3 also auch die Menge  $P$ .

In 5.1.4 ist vermöge 5.1.3 enthalten:

**5.1.41.** Die Menge aller ganzen Zahlen  $(\geq 0)$  hat die Mächtigkeit  $\aleph_0$ .

**5.1.42.** Jedes disjunkte System von Intervallen reeller Zahlen ist abzählbar.

Denn jedes Intervall reeller Zahlen enthält eine rationale Zahl; jedes disjunkte System von Intervallen ist also äquivalent einem Teil der Menge aller rationalen Zahlen. Die Behauptung folgt somit aus 5.1.4 und 5.1.3.

Bedeutet  $g$  eine natürliche Zahl  $> 1$  und  $((g_n))$  eine Folge natürlicher Zahlen mit  $0 \leq g_n \leq g - 1$ , so bezeichnen wir den Ausdruck  $\sum_n \frac{g^n}{g^n}$  als einen Systembruch der Grundzahl  $g$  (für  $g = 2$  als einen Dualbruch); der Systembruch heißt endlich, wenn fast alle  $g_n = 0$  sind, anderenfalls unendlich. Wir betrachten zwei Systembrüche der Grundzahl  $g$  als verschieden, wenn die Folgen  $((g_n))$  ihrer „Stellen“ verschieden sind. Bekanntlich stellen zwei verschiedene endliche Systembrüche der Grundzahl  $g$  stets verschiedene Zahlen dar, ebenso zwei verschiedene unendliche Systembrüche; hingegen gibt es zu jedem endlichen Systembruch der Grundzahl  $g$ , in dem nicht alle Stellen  $= 0$  sind, etwa dem mit der Stellenfolge  $g_1, g_2, \dots, g_n, 0, 0, \dots$  ( $g_n \neq 0$ ), einen und nur einen unendlichen, der dieselbe Zahl darstellt: nämlich den mit der Stellenfolge:  $g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, g_n - 1, g - 1, g - 1, \dots$ . Die durch einen endlichen Systembruch der Grundzahl 2 (bzw. 3) darstellbaren Zahlen heißen dyadisch (bzw. triadisch) rational.

**5.1.43.** Die Menge  $E$  der endlichen Systembrüche der Grundzahl  $g$  hat die Mächtigkeit  $\aleph_0$ .

Denn da jeder endliche Systembruch eine rationale Zahl darstellt und verschiedene endliche Systembrüche verschiedene Zahlen darstellen, ist  $E$  äquivalent einem Teile der Menge der rationalen Zahlen, und die Behauptung folgt aus 5.1.4 und 5.1.3.

Bezeichnen wir, wie es in der analytischen Geometrie üblich ist, die Menge aller  $n$ -tupel reeller Zahlen als den  $R_n$  (vgl. § 9, 3), so gilt:

**5.1.44.** Die Menge aller rationalen Punkte des  $R_n$  hat die Mächtigkeit  $\aleph_0$ .

Dies folgt aus 5.1.4 und 5.1.2.

**5.1.5.** In jeder unendlichen Menge  $M$  gibt es einen Teil der Mächtigkeit  $\aleph_0$ .

Denn zu jeder natürlichen Zahl  $n$  gibt es einen aus  $n$  Elementen bestehenden Teil  $A_n = \{a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}\}$  von  $M$ . Man setze  $a_1 = a_{11}$ , und wenn  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  schon bestimmt sind, wähle man für  $a_n$  ein von  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$  verschiedenes Element von  $A_n$ . Dann sind je zwei  $a_n$  verschieden, die  $a_n (n = 1, 2, \dots)$  bilden also einen abzählbar unendlichen Teil von  $M$ .

**5.1.6.** *Ist  $A$  eine abzählbare,  $B$  eine unendliche Menge, so haben  $B$  und  $A + B$  dieselbe Mächtigkeit.*

In der Tat, nach 5.1.5 gibt es in  $B$  einen Teil  $A'$  der Mächtigkeit  $\aleph_0$ . Ist dann  $\mathfrak{b}$  die Mächtigkeit von  $B$  und  $\mathfrak{b}'$  die von  $B - A'$ , so ist:

$$(1.2) \quad \mathfrak{b} = \aleph_0 + \mathfrak{b}'.$$

Ferner ist:

$$(1.3) \quad A + B = (A - B) + A' + (B - A').$$

Hierin ist  $A - B$  als Teil der abzählbaren Menge  $A$  nach 5.1.3 abzählbar; also ist nach 5.1.31 auch  $(A - B) + A'$  abzählbar; und da in (1.3)  $(A - B) + A'$  und  $B - A'$  fremd sind, hat  $A + B$  die Mächtigkeit  $\aleph_0 + \mathfrak{b}'$ , also nach (1.2) die Mächtigkeit  $\mathfrak{b}$  von  $B$ .

**5.1.61.** *Ist  $A$  ein abzählbarer Teil der unendlichen Menge  $B$ , und ist die Menge  $B - A$  unendlich, so haben  $B$  und  $B - A$  dieselbe Mächtigkeit.*

Denn wegen  $B = A + (B - A)$  folgt die Behauptung aus 5.1.6, indem man dort  $B$  durch  $B - A$  ersetzt.

**5.1.62.** *In jeder unendlichen Menge  $B$  gibt es einen echten Teil von derselben Mächtigkeit wie  $B$ .*

Denn ist  $b$  irgendein Element von  $B$ , so haben nach 5.1.61  $B$  und  $B - \{b\}$  dieselbe Mächtigkeit.

**2. Die Mächtigkeit des Kontinuums.** Nach 4.3.5 ist  $2^{\aleph_0} \neq \aleph_0$ . Wir setzen

$$(2) \quad 2^{\aleph_0} = \aleph \quad (\aleph \neq \aleph_0),$$

und bezeichnen diese Mächtigkeit wegen der in 5.2.3 ausgesprochenen Tatsache als die Mächtigkeit des Kontinuums. Aus 4.3.3 folgt:

**5.2.1.** *Das System aller Teile einer abzählbar unendlichen Menge hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

**5.2.2.** *Die Menge aller Dualbrüche hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Dies folgt aus 5.1.22, indem man dort  $A = \{0, 1\}$ , also  $\alpha = 2$  setzt.

**5.2.21.** *Die Menge aller unendlichen Dualbrüche hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Dies folgt aus 5.2.2 vermöge 5.1.48 und 5.1.61.

**5.2.3.** *Jedes (abgeschlossene, offene, halboffene) Intervall reeller Zahlen hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Da jede Zahl aus  $(0, 1]$  durch genau einen unendlichen Dualbruch dargestellt wird, sind das Intervall  $(0, 1]$  und die Menge der unendlichen Dualbrüche äquivalent; nach 5.2.21 hat also das Intervall  $(0, 1]$  die Mächtigkeit  $\aleph$ . Da durch  $x' = (b - a)x + a$  das Intervall  $(0, 1]$  eineindeutig auf  $(a, b]$  abgebildet wird, hat auch  $(a, b]$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , daher wegen 5.1.6 auch  $[a, b]$ , und wegen 5.1.61 auch  $[a, b)$  und  $(a, b)$ .

**5.2.31.** *Jede (abgeschlossene, offene) Halbgerade hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Wegen 5.1.6 genügt es, die Behauptung für offene Halbgeraden nachzuweisen. Da die Halbgeraden  $x > a$  und  $x' < a$  durch die eineindeutige Abbildung  $x' = 2a - x$  in einander übergehen und die Halbgerade  $x > a$  durch die eineindeutige Abbildung  $x' = x - a$  in die Halbgerade  $x' > 0$  übergeht, genügt es, die Behauptung für die Halbgerade  $x' > 0$  zu beweisen. Und da diese durch die eineindeutige Abbildung  $x'' = \frac{x'}{1+x'}$  ins Intervall  $(0, 1)$  übergeht, folgt die Behauptung aus 5.2.3.

**5.2.32.** *Die Menge aller reellen Zahlen hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Denn sie geht durch die eineindeutige Abbildung  $x' = x - \frac{1}{x}$  aus der Halbgeraden  $x > 0$  hervor.

**5.2.33.** *Die Menge aller irrationalen Zahlen, die Menge aller irrationalen Zahlen eines Intervalles, einer Halbgeraden hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Dies folgt aus 5.2.3, 5.2.31, 5.2.32 vermöge 5.1.4 und 5.1.61.

**5.2.4.** *Bedeutet  $k$  eine endliche Kardinalzahl  $\neq 0$ , so gelten die Gleichungen:*

$$(2.0) \quad \aleph + k = \aleph, \quad \aleph + \aleph_0 = \aleph, \quad k \cdot \aleph = \aleph, \quad \aleph_0 \cdot \aleph = \aleph, \quad \aleph^k = \aleph, \quad \aleph^{\aleph_0} = \aleph.$$

Die beiden ersten Gleichungen folgen aus 5.1.6. Die dritte folgt aus der Zerlegung:  $[0, k) = [0, 1) + [1, 2) + \dots + [k-1, k)$ , in der die Menge links und jeder Summand rechts nach 5.2.3 die Mächtigkeit  $\aleph$  hat. Ebenso folgt die vierte Gleichung (2.0) vermöge 5.2.31 aus der Zerlegung der Halbgeraden  $x \geq 0$  in  $[0, 1) + [1, 2) + \dots + [n-1, n) + \dots$ . Die beiden letzten Gleichungen (2.0) ergeben sich aus (vgl. 5.1.1 und die Rechenregeln § 4, (3.1):

$$\aleph^k = (2^{\aleph_0})^k = 2^{k \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph; \quad \aleph^{\aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph.$$

Die vorletzte Gleichung (2.0) besagt vermöge 4.3.21:

**5.2.41.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , so auch die Menge aller  $k$ -tupel aus  $A$ .*

Ganz wie 5.1.21 beweist man vermöge der vierten Gleichung (2.0):

**5-2-42.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , so auch die Menge aller endlichen Komplexe aus  $A$ .*

Die letzte Gleichung (2-0) besagt vermöge 5-1-22:

**5-2-43.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , so auch die Menge aller Folgen aus  $A$ .*

**5-2-5.** *Ist  $g$  eine natürliche Zahl  $> 1$ , so hat die Menge aller Systembrüche der Grundzahl  $g$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Die Menge aller unendlichen Systembrüche der Grundzahl  $g$  ist äquivalent dem Intervall  $(0, 1]$ , hat also die Mächtigkeit  $\aleph$ . Nun folgt die Behauptung aus 5-1-43 und 5-1-6.

Setzt man in 5-1-22  $A = \{0, 1, \dots, g-1\}$ , also  $a = g$ , so sieht man, daß die Menge aller Systembrüche der Grundzahl  $g$  die Mächtigkeit  $g^{\aleph}$  hat. 5-2-5 besagt also:

$$(2-1) \quad g^{\aleph} = \aleph \quad (g \text{ eine natürliche Zahl } > 1).$$

**5-2-51.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph_0$ , so hat die Menge aller Folgen aus  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Sei  $((k_n))$  eine Folge natürlicher Zahlen; wir ordnen ihr denjenigen unendlichen Dualbruch  $\sum \frac{g^{k_n}}{2^n}$  zu, für den  $g_{k_1} = 1$ ,  $g_{k_1+k_2} = 1$ ,  $g_{k_1+k_2+k_3} = 1$  usw., während alle anderen  $g_v = 0$  sind. Dies ist eine eindeutige Abbildung der Menge  $F$  aller Folgen natürlicher Zahlen auf die Menge aller unendlichen Dualbrüche. Nach 5-2-21 hat also  $F$  die Mächtigkeit  $\aleph$ . Damit ist die Behauptung bewiesen.

Zufolge 5-1-22 hat die Menge aller Folgen aus einer Menge der Mächtigkeit  $\aleph_0$  die Mächtigkeit  $\aleph_0^{\aleph_0}$ ; 5-2-51 besagt also:

$$(2-2) \quad \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph.$$

**3. Die Mächtigkeit  $2^{\aleph}$ .** Nach 4-3-5 ist  $2^{\aleph} \neq \aleph$ . Nach 4-3-3 ist  $2^{\aleph}$  die Mächtigkeit des Systemes aller Teile einer Menge der Mächtigkeit  $\aleph$ , insbesondere also die Mächtigkeit des Systemes aller Mengen reeller Zahlen. Aus  $\aleph^{\aleph} = (2^{\aleph_0})^{\aleph} = 2^{\aleph_0 \aleph}$  folgt nach 5-2-4:

$$(3) \quad \aleph^{\aleph} = 2^{\aleph}.$$

Unter einer reellen Funktion auf  $\mathfrak{A}$  verstehen wir eine Funktion, deren Bereich  $A$  ist, und für die  $f(a)$  für alle  $a \in A$  eine reelle Zahl ist. Dann gilt:

**5-3-1.** *Hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , so hat die Menge aller reellen Funktionen auf  $A$  die Mächtigkeit  $2^{\aleph}$ .*

Denn nach 4-3-2 hat diese Menge die Mächtigkeit  $\aleph^{\aleph}$ , die Behauptung folgt also aus (3).

Literatur zu § 5: wie zu § 4.



## § 6. Geordnete Mengen.

1. **Ord nende Relationen.** Sei  $A$  eine Menge,  $R$  eine asymmetrische, transitive Relation, deren Feld die Menge  $A$  ist:  $C(R) = A$  (§ 4, 1): für je zwei verschiedene Elemente  $x, y$  von  $A$  gelte eine (und wegen der Asymmetrie von  $R$  nur eine) der beiden Aussagen  $x R y, y R x$ . Dann nennen wir  $R$  eine ordnende Relation, oder kurz eine Ordnung von  $A$ , und  $A$  heißt eine geordnete Menge, genauer: durch  $R$  geordnet. Statt  $x R y$  schreiben wir:  $x < y$  ( $x$  vor  $y$ ) oder  $y > x$  ( $y$  nach  $x$ ). Die aus ein und derselben Menge durch verschiedene ordnende Relationen entstehenden geordneten Mengen werden als verschiedene geordnete Mengen betrachtet, und sind demgemäß durch verschiedene Symbole zu bezeichnen<sup>1)</sup>.

Gleichzeitig mit einer Menge  $A$  ist auch jeder ihrer Teile geordnet. Wo nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt wird, nehmen wir immer, wenn von einem Teile einer geordneten Menge  $A$  die Rede ist, an, seine Elemente seien ebenso geordnet, wie in  $A$ .

Ist  $A$  eine geordnete Menge,  $a \in A$ ,  $A' \subseteq A$ , und gilt  $a < a'$  für alle  $a' \in A'$ , so schreiben wir  $a < A'$ . Analog ist die Bedeutung von  $A' < a$  und von  $A' < A''$ .

Gilt  $a' < a'' < a'''$ , so sagen wir:  $a''$  liegt zwischen  $a'$  und  $a'''$ . Analog ist die Bedeutung von:  $A''$  liegt zwischen  $a'$  und  $a'''$ ,  $A''$  liegt zwischen  $A'$  und  $A'''$  usw. — Gibt es kein  $a''$  zwischen  $a'$  und  $a'''$ , so sagen wir:  $a'''$  folgt unmittelbar auf  $a'$  ( $a'$  geht  $a'''$  unmittelbar voran). Gibt es kein  $a''$  zwischen  $A'$  und  $A'''$ , so sagen wir:  $A'''$  folgt unmittelbar auf  $A'$  usw.

Liegt zwischen je zwei Elementen von  $A$  mindestens ein Element, so heißt  $A$  dicht geordnet. Ist  $A' \subseteq A$ , und liegt zwischen je zwei Elementen von  $A$  mindestens eines von  $A'$ , so heißt  $A'$  dicht geordnet in  $A$ . Beispiele: die Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen ist dicht geordnet, ebenso die Menge der der Größe nach geordneten reellen Zahlen. Die erste ist dicht geordnet in der zweiten.

Gibt es in  $A$  kein Element vor (nach)  $a$ , so heißt  $a$  erstes (letztes) Element von  $A$ .

Aus einer geordneten Menge  $A$  entsteht wieder eine geordnete Menge, indem man alle Ordnungsbeziehungen umkehrt (indem man  $a < a'$  in  $a' < a$  verwandelt); die so geordnete Menge heißt die Inverse von  $A$ , in Zeichen  $A^*$ .

<sup>1)</sup> Wir müßten also streng genommen zur Bezeichnung der geordneten Mengen andere Symbole verwenden als zur Bezeichnung der (ungeordneten) Mengen. Es wird aber zu keinen Mißverständnissen führen, wenn wir auch die geordneten Mengen mit großen lateinischen Buchstaben  $A, B \dots$  bezeichnen.

**2. Ähnliche Abbildungen. Ordnungstypen.** Seien  $A$  und  $B$  geordnete Mengen; eine eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , bei der für je zwei Elemente  $a', a''$  von  $A$  und ihre Bilder  $b', b''$  in  $B$  die Aussagen  $a' < a''$  und  $b' < b''$  äquivalent sind, heiße eine ähnliche Abbildung. Gibt es eine ähnliche Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so heißen  $A$  und  $B$  ähnlich, in Zeichen:  $A \simeq B$ . Diese Ähnlichkeit zweier geordneter Mengen ist eine Gleichheitsrelation (§ 4, 1), deren Feld das System aller geordneten Mengen ist. Es zerfällt also (§ 4, 1) das System aller geordneten Mengen in Teilsysteme, so daß je zwei Mengen desselben Teilsystemes ähnlich, je zwei Mengen verschiedener Teilsysteme nicht ähnlich sind. Jedem dieser Teilsysteme denken wir uns ein Symbol zugeordnet, das wir als den Ordnungstypus<sup>1)</sup> jeder diesem Teilsysteme angehörenden geordneten Menge bezeichnen. Es haben zwei geordnete Mengen dann und nur dann denselben Ordnungstypus, wenn sie ähnlich sind. Wir bezeichnen Ordnungstypen mit kleinen griechischen Buchstaben. Ist  $\alpha$  der Ordnungstypus von  $A$ , so wird der Ordnungstypus der Inversen  $A^*$  mit  $\alpha^*$  bezeichnet (der zu  $\alpha$  inverse Ordnungstypus).

Ähnliche Mengen sind auch äquivalent; Mengen von gleichem Ordnungstypus  $\alpha$  haben also auch gleiche Mächtigkeit; man nennt sie: die Mächtigkeit des Ordnungstypus  $\alpha$ . Die Ordnungstypen abzählbarer Mengen heißen auch abzählbare Ordnungstypen.

Seien  $A$  und  $B$  zwei geordnete endliche Mengen gleicher Kardinalzahl  $n$ . Sie seien gegeben durch  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ , bzw.  $b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Ordnet man  $a_i$  und  $b_i$  einander zu ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), so sieht man, daß  $A$  und  $B$  ähnlich sind. Also: alle geordneten endlichen Mengen gleicher Kardinalzahl haben denselben Ordnungstypus. Er kann also, ohne daß Mißverständnisse zu befürchten wären, mit demselben Symbole  $n$  bezeichnet werden, wie diese Kardinalzahl<sup>2)</sup>. Für unendliche Mengen trifft dies, wie wir sogleich an mannigfachen Beispielen sehen werden, nicht zu.

Hat eine Menge vom Ordnungstypus  $\alpha$  ein erstes (letztes) Element, so gilt dies von allen solchen Mengen; wir sagen dann:  $\alpha$  ist ein Ordnungstypus mit erstem (letztem) Element. Analog bezeichnen wir den Ordnungstypus einer dicht geordneten Menge als einen dichten Ordnungstypus.

Den Ordnungstypus der Menge der der Größe nach geordneten natürlichen Zahlen bezeichnen wir mit  $\omega$ . Es ist ein Typus mit erstem, aber ohne letztes

<sup>1)</sup> Als „Ordinalzahlen“ werden nur spezielle Ordnungstypen bezeichnet (§ 7, 3).

<sup>2)</sup> Insbesondere schreiben wir der leeren Menge den Ordnungstypus 0, den aus einem einzigen Element bestehenden Mengen den Ordnungstypus 1 zu.

Element. Sein inverser  $\omega^*$  ist umgekehrt ein Typus mit letztem, ohne erstes Element. Also ist  $\omega^* \neq \omega$ . Hier haben wir schon ein Beispiel zweier verschiedener Ordnungstypen gleicher Mächtigkeit.

**3. Addition von Ordnungstypen.** Was die Verknüpfungen von Ordnungstypen anlangt, so begnügen wir uns, die Addition zweier (und damit endlich vieler) Ordnungstypen zu definieren. Seien  $A$  und  $B$  fremde, geordnete Mengen mit den Ordnungstypen  $\alpha$  und  $\beta$ . Wir machen  $A + B$  zu einer geordneten Menge durch die Vorschrift: ist  $a \in A$ ,  $a' \in A$  und  $a < a'$  in  $A$ , so soll auch  $a < a'$  in  $A + B$  sein; analog für  $b \in B$ ,  $b' \in B$ ; ist hingegen  $a \in A$ ,  $b \in B$ , so soll  $a < b$  in  $A + B$  sein. Unter  $\alpha + \beta$  verstehen wir den Ordnungstypus der so geordneten Menge  $A + B$ . (Das ist eine zulässige Definition, da bei dieser Ordnung der Summenmenge aus  $A \simeq A'$ ,  $B \simeq B'$  folgt:  $A + B \simeq A' + B'$ ). Diese Addition ist offenbar assoziativ; sie ist aber nicht kommutativ. Z. B. ist offenbar  $1 + \omega = \omega$ , während  $\omega + 1$  ein Ordnungstypus mit letztem Element, also  $\neq \omega$  ist. Wir bemerken noch, daß  $\omega^* + \omega$  der Ordnungstypus der Menge der der Größe nach geordneten ganzen Zahlen ( $\geq 0$ ) ist.

**4. Der Ordnungstypus  $\eta$ .** Wir haben in  $\omega$ ,  $\omega^*$ ,  $\omega + 1$ ,  $\omega^* + \omega$  vier Beispiele verschiedener abzählbarer Ordnungstypen vor uns. Ein weiteres Beispiel liefert der Ordnungstypus  $\eta$  der Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen; er ist ein Typus ohne erstes und letztes Element und, zum Unterschiede von den eben genannten, dicht. Durch diese Eigenschaften ist  $\eta$  völlig charakterisiert; denn es gilt:

**6.4.1.**  *$\eta$  ist der einzige abzählbare, dichte Ordnungstypus ohne erstes und letztes Element.*

Seien in der Tat  $A$  und  $B$  geordnete Mengen, beide abzählbar, dicht geordnet, ohne erstes und letztes Element; wir haben zu zeigen:  $A \simeq B$ . Da die Mengen  $A$  und  $B$  abzählbar unendlich sind, können ihre Elemente den natürlichen Zahlen zugeordnet werden<sup>1)</sup>:

$$(4) \quad a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

$$(4.1) \quad b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$$

Um eine ähnliche Abbildung von  $A$  auf  $B$  herzustellen, bilden wir  $a_1$  auf  $b_1$  ab, und setzen  $a_1 = a^1$ ,  $b_1 = b^1$ ; sodann bilden wir  $b_2 = b^2$  auf das in der Folge (4) zuerst kommende Element  $a^2$  ab, das zu  $a^1$  dieselbe Ordnungsbeziehung

<sup>1)</sup> Die gegebene Ordnung der Elemente in  $A$  und  $B$  ist natürlich eine ganz andere als in (4) und (4.1).

hat, wie  $b^2$  zu  $b^1$  (d. h.  $a^2 < a^1$ , wenn  $b^2 < b^1$ ;  $a^2 > a^1$ , wenn  $b^2 > b^1$ ); so dann bezeichnen wir mit  $a^3$  das in (4) zuerst kommende, von  $a^1$  und  $a^2$  verschiedene Element, und bilden es auf das in (4.1) zuerst kommende Element  $b^3$  ab, das zu  $b^1$  und  $b^2$  dieselben Ordnungsbeziehungen hat, wie  $a^3$  zu  $a^1$  und  $a^2$  ( $b^3 < b^1$  oder  $b^3 > b^1$ , je nachdem  $a^3 < a^1$  oder  $a^3 > a^1$ ;  $b^3 < b^2$  oder  $b^3 > b^2$ , je nachdem  $a^3 < a^2$  oder  $a^3 > a^2$ ). Sodann bezeichnen wir mit  $b^4$  das in (4.1) zuerst kommende, von  $b^1, b^2, b^3$  verschiedene Element, und bilden es auf das in (4) zuerst kommende Element  $a^4$  ab, das zu  $a^1, a^2, a^3$  dieselben Ordnungsbeziehungen hat, wie  $b^4$  zu  $b^1, b^2, b^3$ , usf. (wobei immer abwechselnd von (4) und (4.1) auszugehen ist); dieses Verfahren ist unbegrenzt fortsetzbar, weil es in  $A$  und  $B$  kein erstes und letztes Element gibt und zwischen je zwei Elementen immer noch andere liegen. So erhalten wir tatsächlich eine ähnliche Abbildung von  $A$  auf  $B$ , d. h.  $A \simeq B$ , w. z. b. w.

In 6.4.1 ist enthalten:

**6.4.11.** Die Menge der der Größe nach geordneten rationalen Zahlen eines offenen Intervalles (einer offenen Halbgeraden) hat den Ordnungstypus  $\eta$ .

**6.4.12.** Die Menge der der Größe nach geordneten endlichen Systembrüche  $\neq 0$  der Grundzahl  $g$  hat den Ordnungstypus  $\eta$ .

**6.4.2.** In einer Menge  $B$  vom Ordnungstypus  $\eta$  gibt es zu jedem abzählbaren Ordnungstypus  $\alpha$  einen Teil  $B'$  vom Ordnungstypus  $\alpha$ .

Dies ist trivial, wenn  $\alpha$  ein endlicher Ordnungstypus. Wir nehmen also sogleich an,  $\alpha$  sei ein abzählbar unendlicher Ordnungstypus. Sei  $A$  eine Menge vom Ordnungstypus  $\alpha$ . Seien wieder (4) und (4.1) die Elemente von  $A$  und  $B$ . Wir setzen  $b_1 = b^1$ , bezeichnen sodann mit  $b^2$  das in (4.1) zuerst kommende Element, das zu  $b^1$  dieselbe Ordnungsbeziehung hat, wie  $a_2$  zu  $a_1$ ; sodann mit  $b^3$  das in (4.1) zuerst kommende Element, das zu  $b^1$  und  $b^2$  dieselben Ordnungsbeziehungen hat, wie  $a_3$  zu  $a_1$  und  $a_2$  usf. Der von den Elementen  $b^1, b^2, \dots, b^v, \dots$  gebildete Teil  $B'$  von  $B$  hat dann den Ordnungstypus  $\alpha$ .

Aus 6.4.2 folgt:

**6.4.21.** Ist  $\alpha$  ein abzählbarer Ordnungstypus, so gibt es eine Menge rationaler Zahlen, die — der Größe nach geordnet — den Ordnungstypus  $\alpha$  hat.

**5. Der Ordnungstypus  $\lambda$ .** Sei  $A$  eine geordnete Menge; ist  $A = A' + A''$ ,  $A' \supset A$ ,  $A'' \supset A$ ,  $A' A'' = A$ ,  $A' < A''$ , so heißt das Paar  $(A', A'')$  ein Schnitt in  $A$ . Gibt es weder in  $A'$  ein letztes, noch in  $A''$  ein erstes Element, so heißt der Schnitt ein Lückenschnitt in  $A$ . Eine dicht geordnete Menge, in der es keine Lückenschnitte gibt, heißt stetig geordnet, ihr Ordnungstypus heißt ein stetiger Ordnungstypus. Die Menge der (der Größe

nach geordneten) reellen Zahlen, ebenso jede (abgeschlossene, offene) Halbgerade, jedes (abgeschlossene, offene, halboffene) Intervall sind stetig geordnete Mengen.

Den Ordnungstypus der Menge der der Größe nach geordneten reellen Zahlen nennen wir  $\lambda$ .

**6.5.1.** *Jede stetig geordnete Menge  $A$  ohne erstes und letztes Element, die einen abzählbar unendlichen, in  $A$  dicht geordneten Teil  $B$  hat, hat den Ordnungstypus  $\lambda$ , und es gibt eine ähnliche Abbildung von  $A$  auf die Menge der reellen Zahlen, durch die die Menge  $B$  auf die Menge der rationalen Zahlen abgebildet wird.*

Sei  $X$  die (der Größe nach geordnete) Menge der reellen Zahlen; wir haben zu zeigen  $A \simeq X$ . Da es offenbar in  $B$  kein erstes und kein letztes Element gibt, hat  $B$  nach 6.4.1 den Ordnungstypus  $\eta$ ; es gibt also eine ähnliche Abbildung  $f$  der Menge  $R$  der rationalen Zahlen auf  $B$ ; das dabei der rationalen Zahl  $r$  entsprechende Element von  $B$  heiße  $b_r$ . Sei nun  $x$  eine beliebige reelle Zahl und  $R'_x$  die Menge aller rationalen Zahlen  $< x$ ,  $R''_x$  die Menge aller rationalen Zahlen  $\geq x$ , und seien  $B'_x$  und  $B''_x$  die durch die Abbildung  $f$  aus  $R'_x$  und  $R''_x$  hervorgehenden Teile von  $B$ . Wir bezeichnen nun mit  $A'_x$  die Menge aller  $a \in A$ , zu denen es ein  $b \in B'_x$  mit  $a < b$  gibt, und setzen  $A''_x = A - A'_x$ ; dann ist  $A'_x < A''_x$  und  $B'_x \subseteq A'_x$ ,  $B''_x \subseteq A''_x$ , also  $A'_x \supset A$ ,  $A''_x \supset A$ ; somit ist  $(A'_x, A''_x)$  ein Schnitt in  $A$ . Da es nach Definition zu jedem  $a \in A'_x$  ein  $b \in B'_x$  mit  $a < b$  gibt und  $B'_x \subseteq A'_x$  ist, gibt es in  $A'_x$  kein letztes Element, und weil  $A$  stetig geordnet, gibt es somit in  $A''_x$  ein erstes Element; wir bezeichnen es mit  $a_x$  und ordnen es der Zahl  $x$  zu. Dadurch ist eine Abbildung  $g$  von  $X$  auf einen Teil  $A^*$  von  $A$  definiert:  $g(x) = a_x$ ; offenbar ist  $g(r) = b_r$  für alle rationalen  $r$ ; die Abbildung  $g$  bildet also die Menge der rationalen Zahlen auf  $B$  ab. Wir zeigen, daß die Abbildung  $g$  ähnlich ist. Sei  $x_1 \in X$ ,  $x_2 \in X$ ,  $x_1 < x_2$ ; dann gibt es ein  $r \in R$ , so daß  $x_1 < r < x_2$ ; dann ist  $r \in R'_{x_1}$ ,  $R''_{x_2}$ , also  $b_r \in B'_{x_1}$ ,  $B''_{x_2}$ , also auch  $b_r \in A'_{x_1}$ ,  $A''_{x_2}$ ; mithin gilt  $a_{x_1} \leq b_r$ ,  $a_{x_2} > b_r$ , also  $a_{x_1} < a_{x_2}$ , d. h. die Abbildung  $g$  von  $X$  auf  $A^*$  ist ähnlich:  $A^* \simeq X$ . Wir haben also nur mehr zu zeigen, daß  $A^* = A$ , und da  $A^* \subseteq A$ , genügt es zu zeigen, daß  $A \subseteq A^*$ . Sei  $a \in A$ , und sei  $B'$  die Menge aller  $b \in B$  mit  $b < a$  und  $B'' = B - B'$ ; da  $a$  weder erstes noch letztes Element von  $A$ , und  $B$  dicht geordnet in  $A$ , ist  $B' \supset A$ ,  $B'' \supset A$ , und in  $B'$  gibt es kein letztes Element; seien  $R'$  und  $R''$  die vermöge der Abbildung  $f$  den Mengen  $B'$  und  $B''$  entsprechenden Teile von  $R$ ; dann gibt es in  $R'$  kein letztes Element, und  $(R', R'')$  ist ein Schnitt in  $R$ ; es gibt also eine reelle Zahl  $x$ , so daß  $x > r$  für alle  $r \in R'$  und  $x \leq r$  für alle  $r \in R''$ ; also ist  $R' = R'_x$ ,  $R'' = R''_x$ , also auch  $B' = B'_x$ ,  $B'' = B''_x$ . Daraus aber folgt  $a = a_x$ ; denn wäre  $a < a_x$ , so gäbe es ein  $b \in B$ , so daß

$a < b < a_x$ , dann aber wäre  $b \in B'' B'_x (= B'' B')$ , was unmöglich, und ebenso sieht man, daß nicht  $a_x < a$  sein kann. Also ist  $a = a_x$  und mithin  $a \in A^*$ . Aus  $a \in A$  folgt also  $a \in A^*$ , d. h. es ist  $A \subseteq A^*$ , w. z. b. w.

Aus 6.5.1 folgt:

**6.5.11.** Die Menge der der Größe nach geordneten Zahlen einer offenen Halbgeraden, eines offenen Intervalles hat den Ordnungstypus  $\lambda$ .

Literatur zu § 6: wie zu § 4. Ferner: C. Kuratowski, Fund. math. 2 (1921) S. 161; W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 199; A. Fraenkel, Fund. math. 7 (1925) S. 308; Journ. f. Math. 155 (1926) S. 129; E. V. Huntington, Ann. of Math. (2) 6 (1905) S. 151; (2) 7 (1906) S. 15.

## § 7. Die wohlgeordneten Mengen.

**1. Wohlgeordnete Mengen.** Eine geordnete Menge heißt wohlgeordnet, wenn jeder ihrer nicht leeren Teile ein erstes Element hat. Die leere Menge, jede geordnete endliche Menge, jede Menge vom Ordnungstypus  $\omega$  ist wohlgeordnet; hingegen ist eine Menge vom Ordnungstypus  $\omega^*$ ,  $\omega^* + \omega$ ,  $\eta$  nicht wohlgeordnet. Aus der Definition folgt unmittelbar:

**7.1.1.** Jeder Teil einer wohlgeordneten Menge ist wohlgeordnet.

**7.1.2.** Ist  $A$  wohlgeordnet,  $a \in A$ , und gibt es ein  $b \in A$ , so daß  $a < b$ , so gibt es in  $A$  ein unmittelbar auf  $a$  folgendes Element.

Denn die Menge der auf  $a$  folgenden Elemente bildet einen nicht leeren Teil von  $A$ , der somit ein erstes Element besitzt.

**7.1.21.** Ist  $A$  wohlgeordnet,  $A' \subseteq A$ , und gibt es ein  $b \in A$ , so daß  $A' < b$ , so gibt es in  $A$  ein unmittelbar auf  $A'$  folgendes Element.

Denn die Menge der auf  $A'$  folgenden Elemente von  $A$  ist nicht leer, besitzt somit ein erstes Element.

**7.1.3.** Ist die wohlgeordnete Menge  $A$  ähnlich abgebildet auf einen ihrer Teile, und ist dabei  $a'$  das Bild von  $a$ , so kann nicht  $a' < a$  sein.

Denn angenommen, es gäbe ein  $a \in A$ , für dessen Bild  $a' < a$  gilt. Die Menge  $A^*$  aller solchen  $a$  ist dann nicht leer, besitzt also ein erstes Element  $a_0$ ; für das Bild von  $a_0$  gilt dann:  $a'_0 < a_0$ ; daraus folgt für das Bild  $a''_0$  von  $a'_0$  (wegen der Ähnlichkeit der Abbildung):  $a''_0 < a'_0$ . Es wäre also auch  $a'_0 \in A^*$ , im Widerspruche damit, daß  $a_0$  erstes Element von  $A^*$  und  $a'_0 < a_0$ .

**7.1.4.** Damit die Menge  $A$  wohlgeordnet sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in ihr keine Folge  $((a_n))$  von Elementen mit  $a_{n+1} < a_n$  gebe.

Notwendig: Gibt es in  $A$  eine solche Folge  $((a_n))$ , so bilden die Elemente  $a_n$  einen Teil von  $A$  ohne erstes Element. Hinreichend: Ist  $A$  nicht wohl-

geordnet, so gibt es eine Menge  $A'$  ohne erstes Element, so daß  $A \subset A' \subseteq A$ . Ist  $a_1 \in A'$ , so gibt es dann ein  $a_2 \in A'$ , so daß  $a_2 < a_1$ , sodann ein  $a_3 \in A'$ , so daß  $a_3 < a_2$  usf.

**2. Abschnitte.** Ist  $A$  wohlgeordnet und  $a \in A$ , so heißt der durch  $x < a$  definierte Teil von  $A$  der Abschnitt von  $a$  (in  $A$ ), in Zeichen  $A(a)$ . Ist  $a' < a$ , also  $a' \in A(a)$ , so ist der Abschnitt von  $a'$  in  $A(a)$  gleichzeitig der Abschnitt von  $a'$  in  $A$ . Ist  $a$  das erste Element von  $A$ , so ist  $A(a) = A$ .

**7.2.1.** *Eine wohlgeordnete Menge ist keinem ihrer Abschnitte ähnlich.*

Denn bei einer ähnlichen Abbildung von  $A$  auf  $A(a)$  würde  $a$  auf ein Element  $a' \in A(a)$  abgebildet, es wäre also  $a' < a$ , entgegen 7.1.3.

**7.2.11.** *Zwei verschiedene Abschnitte einer wohlgeordneten Menge sind nicht ähnlich.*

Denn sind  $A(a)$ ,  $A(a')$  Abschnitte von  $A$ , und ist  $a' < a$ , so ist  $A(a')$  Abschnitt von  $A(a)$ , und die Behauptung folgt aus 7.2.1.

**7.2.2.** *Sind  $A$  und  $B$  wohlgeordnet, und gibt es zu jedem Abschnitte von  $A$  einen ähnlichen Abschnitt von  $B$  und umgekehrt, so ist  $A \simeq B$ .*

Nach 7.2.11 gibt es zu jedem Abschnitte von  $A$  auch nur einen ähnlichen Abschnitt von  $B$  und umgekehrt. Ordnen wir also ein Element  $a \in A$  und ein Element  $b \in B$  einander zu, wenn  $A(a) \simeq B(b)$ , so ist dies eine eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B$ . Es ist noch zu zeigen, daß diese Abbildung ähnlich ist, d. h. wir haben zu zeigen: Ist  $A(a) \simeq B(b)$ ,  $A(a') \simeq B(b')$  und  $a' < a$ , so ist auch  $b' < b$ . Da  $A(a) \simeq B(b)$  und  $a' < a$ , gibt es ein  $b'' \in B(b)$ , so daß  $A(a') \simeq B(b'')$ ; weil auch  $A(a') \simeq B(b')$ , ist dann  $B(b'') \simeq B(b')$ , also nach 7.2.11:  $b'' = b'$ ; wegen  $b'' \in B(b)$  ist  $b'' < b$ , also auch  $b' < b$ , w. z. b. w.

**7.2.21.** *Sind  $A$  und  $B$  wohlgeordnet und gibt es in  $A$  einen Abschnitt, der keinem Abschnitte von  $B$  ähnlich ist, so ist  $B$  ähnlich einem Abschnitte von  $A$ .*

Nach Annahme ist die Menge  $A^*$  aller  $a \in A$ , zu deren Abschnitte  $A(a)$  es keinen ähnlichen Abschnitt von  $B$  gibt,  $\supset A$ ; da  $A$  wohlgeordnet, enthält  $A^*$  ein erstes Element  $a^*$ . Zu jedem Abschnitte von  $A(a^*)$  gibt es nun einen ähnlichen Abschnitt von  $B$ . Wir zeigen, daß es auch umgekehrt zu jedem Abschnitte von  $B$  einen ähnlichen Abschnitt von  $A(a^*)$  gibt. Anderenfalls gäbe es unter den Elementen  $b \in B$ , deren Abschnitt  $B(b)$  keinem Abschnitte von  $A(a^*)$  ähnlich ist, ein erstes  $b^*$ ; ist dann  $b \in B$  und  $b > b^*$ , so ist auch  $B(b)$  keinem Abschnitte von  $A(a^*)$  ähnlich; die den Abschnitten von  $A(a^*)$  ähnlichen Abschnitte von  $B$  sind also auch Abschnitte von  $B(b^*)$ , und es ist somit jeder Abschnitt von  $A(a^*)$  ähnlich einem Abschnitt von  $B(b^*)$ ,

jeder Abschnitt von  $B$  ( $b^*$ ) ähnlich einem Abschnitte von  $A$  ( $a^*$ ); nach 7.2.2 wäre aber dann  $A(a^*) \simeq B(b^*)$ , entgegen der Definition von  $a^*$ . — Es ist also jeder Abschnitt von  $B$  ähnlich einem Abschnitte von  $A$  ( $a^*$ ), und da auch jeder Abschnitt von  $A$  ( $a^*$ ) ähnlich einem Abschnitte von  $B$  war, ist nach 7.2.2  $A(a^*) \simeq B$ , wie behauptet.

**7.2.3.** Sind  $A$  und  $B$  wohlgeordnet, so trifft eine und nur eine der drei folgenden Möglichkeiten zu: 1.  $A \simeq B$ ; 2.  $B$  ist ähnlich einem Abschnitte von  $A$ ; 3.  $A$  ist ähnlich einem Abschnitte von  $B$ .

Denn entweder gibt es zu jedem Abschnitte von  $A$  einen ähnlichen Abschnitt von  $B$  und umgekehrt, dann ist  $A \simeq B$  nach 7.2.2; oder es gibt in  $A$  einen Abschnitt, der keinem Abschnitt von  $B$  ähnlich ist, dann ist  $B$  ähnlich einem Abschnitte von  $A$  nach 7.2.21; oder es gibt in  $B$  einen Abschnitt, der keinem Abschnitt von  $A$  ähnlich ist, dann ist nach 7.2.21  $A$  ähnlich einem Abschnitte von  $B$ . — Und daß nur eine der drei Möglichkeiten 1., 2., 3. eintreten kann, folgt aus 7.2.1.

**3. Ordinalzahlen.** Die Ordnungstypen der wohlgeordneten Mengen werden als Ordinalzahlen bezeichnet. Die Ordnungstypen  $0, 1, 2, \dots, n, \dots$  der geordneten endlichen Mengen, der Ordnungstypus  $\omega$  sind also Ordinalzahlen (nicht aber  $\omega^*$ ,  $\omega^* + \omega$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$ ).

Die Summe zweier Ordinalzahlen ist eine Ordinalzahl; denn sind  $A$  und  $B$  fremde wohlgeordnete Mengen, und ordnet man  $A + B$ , wie dies bei der Definition der Summe zweier Ordnungstypen (§ 6, 3) geschah, so ist auch  $A + B$  wohlgeordnet.

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  die Ordinalzahlen der wohlgeordneten Mengen  $A$  und  $B$ ; wir definieren:  $\alpha < \beta$  (oder  $\beta > \alpha$ ), wenn  $A$  ähnlich einem Abschnitte von  $B$ . Nach 7.2.3 gilt dann für je zwei Ordinalzahlen  $\alpha, \beta$  eine und nur eine der drei Relationen  $\alpha = \beta$ ,  $\alpha < \beta$ ,  $\beta < \alpha$ , und aus  $\beta < \gamma$  folgt  $\alpha + \beta < \alpha + \gamma$ . Offenbar ist die Relation  $<$  transitiv. Damit sind die Ordinalzahlen der Größe nach geordnet. Auf Grund dieser Definition ist  $0$  die kleinste Ordinalzahl,  $\omega$  die kleinste nicht endliche (transfinite) Ordinalzahl. Es bedeutet im folgenden stets  $W(\alpha)$  die (der Größe nach geordnete) Menge aller Ordinalzahlen, die  $< \alpha$  sind.

**7.3.1.** Ist  $\alpha$  eine Ordinalzahl, so ist die der Größe nach geordnete Menge  $W(\alpha)$  aller Ordinalzahlen  $\xi < \alpha$  wohlgeordnet, und es ist  $\alpha$  die Ordinalzahl von  $W(\alpha)^1$ .

<sup>1)</sup> Dieser Satz besagt, daß die (endlichen und transfiniten) Ordinalzahlen  $< \alpha$  ebenso zum „Numerieren“ der Elemente einer wohlgeordneten Menge der Ordinalzahl  $\alpha$  verwendet werden können, wie die endlichen Ordinalzahlen  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  zum Numerieren der Elemente einer Menge von  $n$  Elementen.



Sei in der Tat  $A$  eine wohlgeordnete Menge der Ordinalzahl  $\alpha$ ; nach Definition der Relation  $<$  gibt es dann zu jedem  $\xi \in W(\alpha)$  ein (und nach 7.2.11 nur ein)  $a \in A$ , dessen Abschnitt  $A(\alpha)$  die Ordinalzahl  $\xi$  hat. Ordnen wir jedem  $\xi \in W(\alpha)$  dieses Element  $a$  von  $A$  zu, so haben wir eine ähnliche Abbildung von  $W(\alpha)$  auf  $A$ , d. h. auch  $W(\alpha)$  hat die Ordinalzahl  $\alpha$ .

**7.3.2.** Jede Menge der Größe nach geordneter Ordinalzahlen ist wohlgeordnet.

Sei in der Tat  $M$  eine Menge von Ordinalzahlen und  $A \subset M' \subseteq M$ ; wir haben zu zeigen: unter den Ordinalzahlen  $\xi \in M'$  gibt es eine kleinste. Sei  $\alpha \in M'$ ; ist dann  $\alpha$  nicht selbst kleinste in  $M'$ , so ist  $M' \cap W(\alpha) \supset A$  und nach 7.3.1 und 7.1.1 wohlgeordnet; also gibt es in  $M' \cap W(\alpha)$  eine kleinste Ordinalzahl, die auch kleinste in  $M'$  ist.

**7.3.3.** Ist  $A$  wohlgeordnet,  $A' \subseteq A$ , und sind  $\alpha, \alpha'$  die Ordinalzahlen von  $A, A'$ , so ist  $\alpha' \leq \alpha$ .

In der Tat, wäre  $\alpha' > \alpha$ , so gäbe es eine ähnliche Abbildung von  $A$  auf einen Abschnitt  $A'(\alpha)$  von  $A'$ ; bei dieser Abbildung würde das Element  $a$  von  $A$  abgebildet auf ein Element  $a'$  von  $A'(\alpha)$ ; es wäre also  $\alpha' < \alpha$ , entgegen 7.1.3.

**7.3.4.** Zu jeder Ordinalzahl  $\alpha$  gibt es eine unmittelbar folgende, nämlich  $\alpha + 1$ .

Nach 7.3.1 hat die Menge  $W(\alpha)$  die Ordinalzahl  $\alpha$ . Die Menge  $V$ , die aus  $W(\alpha)$  durch Hinzufügung von  $\alpha$  entsteht, hat daher, der Größe nach geordnet, die Ordinalzahl  $\alpha + 1$  (§ 6, 3). Da  $W(\alpha)$  ein Abschnitt von  $V$  ist, ist  $\alpha < \alpha + 1$ . Da jeder Abschnitt von  $V$  entweder  $W(\alpha)$  oder ein Abschnitt von  $W(\alpha)$  ist, ist jede Ordinalzahl, die  $< \alpha + 1$  ist, auch  $\leq \alpha$ . Also folgt  $\alpha + 1$  unmittelbar auf  $\alpha$ .

**7.3.41.** Zu jeder Menge  $A$  von Ordinalzahlen gibt es eine unmittelbar folgende<sup>1)</sup>.

Die Menge  $B = \bigcup_{\alpha \in A} (W(\alpha) + \{\alpha\})$  ist wohlgeordnet, nach 7.3.2. Sei  $\beta$  die Ordinalzahl von  $B$ ; wir behaupten: es ist die gesuchte. In der Tat, ist  $\alpha \in A$ , so ist  $W(\alpha)$  ein Abschnitt von  $B$ , also nach 7.3.1:  $\alpha < \beta$ . Wir haben noch zu zeigen: ist  $\beta' < \beta$ , so gibt es ein  $\alpha \in A$ , so daß  $\beta' \leq \alpha$ . Sei also  $\beta' < \beta$ ; dann ist  $\beta'$  die Ordinalzahl eines Abschnittes  $B(\xi)$  von  $B$ . Nach Definition von  $B$  gibt es ein  $\alpha \in A$ , so daß  $\xi \in W(\alpha) + \{\alpha\}$ , und mithin  $\xi \leq \alpha$ ; wegen  $\xi \in W(\alpha) + \{\alpha\}$  und  $W(\alpha) + \{\alpha\} \subseteq B$  folgt aus  $\xi' < \xi$  auch  $\xi' \in B$ ; also ist  $B(\xi) = W(\xi)$ , somit nach 7.3.1:  $\beta' = \xi$ ; wegen  $\xi \leq \alpha$  ist also auch  $\beta' \leq \alpha$ , w. z. b. w.

<sup>1)</sup> Daraus folgt, daß es eine „Menge aller Ordinalzahlen“ nicht geben kann. Anders gesprochen: kein Grundbereich (§ 1, 2) kann alle Ordinalzahlen enthalten.

Die Sätze 7.3.1, 7.3.4 lehren, wie man sukzessive immer größere Ordinalzahlen bilden kann, ohne dabei jemals eine auszulassen. Sei  $M$  die Menge der bereits gebildeten Ordinalzahlen, wobei keine ausgelassen sei (d. h. ist  $\mu \in M$ , und  $\xi < \mu$ , so auch  $\xi \in M$ ). Die nächstfolgende ist dann nach 7.3.1 nichts anderes als die Ordinalzahl von  $M$ . Die erste auf alle endlichen Ordinalzahlen folgende ist  $\omega$ . Die nächstfolgenden sind  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$ , ...,  $\omega + n$ , ...; die auf alle diese folgende Ordinalzahl wird mit  $\omega \cdot 2$  bezeichnet; es folgen  $\omega \cdot 2 + 1$ ,  $\omega \cdot 2 + 2$ , ...,  $\omega \cdot 2 + n$ , ...; die nächstfolgende wird mit  $\omega \cdot 3$  bezeichnet usw. Man gelangt so zu Ordinalzahlen der Form  $\omega \cdot k + n$ . Die auf alle diese folgende wird mit  $\omega^2$  bezeichnet, und man kommt so zu Ordinalzahlen der Form  $\omega^l \cdot a_0 + \omega^{l-1} \cdot a_1 + \dots + \omega \cdot a_{l-1} + a_l$ , wo  $l$ ,  $a_0$ ,  $a_1$ , ...,  $a_l$  endliche Ordinalzahlen bedeuten. Die auf alle diese folgende wird mit  $\omega^\omega$  bezeichnet. Näher wollen wir auf die Bezeichnungsweise und die Arithmetik der Ordinalzahlen nicht eingehen.

Wir unterscheiden die Ordinalzahlen in isolierte Zahlen und Grenzzahlen. Isolierte Zahlen sind alle diejenigen, zu denen es eine unmittelbar vorhergehende gibt (also alle endlichen Zahlen  $\neq 0$ , ferner z. B.  $\omega + 1$ ,  $\omega + 2$ , usw.), Grenzzahlen sind alle übrigen (z. B. 0,  $\omega$ ,  $\omega \cdot 2$ ,  $\omega^2$ ,  $\omega^\omega$ ). Ist  $\alpha$  eine isolierte Zahl, so bezeichnen wir die unmittelbar vorhergehende mit  $\alpha - 1$ .

**4. Transfinite Induktion.** Dieselbe Rolle, die in der Reihe der natürlichen Zahlen der Satz von der „vollständigen Induktion“ (der „Schluß von  $n$  auf  $n + 1$ “) spielt, spielt in der Lehre von den transfiniten Ordinalzahlen der Satz von der transfiniten Induktion:

**7.4.1.** Seien  $\alpha_0 < \alpha_1$  zwei Ordinalzahlen und  $M$  eine Menge von Ordinalzahlen mit folgenden Eigenschaften: 1.  $\alpha_0 \in M$ ; 2. ist  $\xi \in M$  für  $\alpha_0 \leq \xi < \alpha_1$ , so ist auch  $\alpha \in M$ . Dann gilt  $\alpha \in M$  für  $\alpha_0 \leq \alpha < \alpha_1$ .

Angenommen in der Tat, es gäbe eine Ordinalzahl  $\beta$ , so daß  $\alpha_0 \leq \beta < \alpha_1$  und  $\beta \notin M$ . In der wohlgeordneten Menge aller der Ungleichung  $\alpha_0 \leq \xi \leq \beta$  genügenden Ordinalzahlen mit  $\xi \notin M$  muß es dann eine kleinste  $\beta_0$  geben; wegen 1. ist  $\beta_0 > \alpha_0$ ; nun gilt  $\xi \in M$  für  $\alpha_0 \leq \xi < \beta_0$ ; wegen 2. müßte also auch  $\beta_0 \in M$  gelten, entgegen der Definition von  $\beta_0$ .

Offenbar kann 7.4.1 auch in folgender Form ausgesprochen werden:

**7.4.11.** Seien  $\alpha_0 < \alpha_1$  zwei Ordinalzahlen und  $M$  eine Menge von Ordinalzahlen mit folgenden Eigenschaften: 1.  $\alpha_0 \in M$ ; 2. ist  $\alpha$  eine isolierte Zahl  $> \alpha_0$  und  $< \alpha_1$  und ist  $\alpha - 1 \in M$ , so ist auch  $\alpha \in M$ ; 3. ist  $\alpha$  eine Grenzzahl  $> \alpha_0$  und  $< \alpha_1$  und ist  $\xi \in M$  für  $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$ , so ist auch  $\alpha \in M$ . Dann gilt  $\alpha \in M$  für  $\alpha_0 \leq \alpha < \alpha_1$ .

Auf 7.4.1 beruht der Beweis durch transfinite Induktion:

**7.4.12.** Um zu beweisen, daß ein von einer beliebigen Ordinalzahl  $\alpha$  handelnder Satz  $\varphi(\alpha)$  für jede Ordinalzahl  $\alpha \geq \alpha_0$  gilt, genügt es zu zeigen: 1.  $\varphi(\alpha_0)$  gilt; 2. gilt  $\varphi(\xi)$  für  $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$ , so gilt  $\varphi(\alpha)$ .

Sei  $\beta$  eine beliebige Ordinalzahl; man setze in 7.4.1  $\alpha_1 = \beta + 1$  und verstehe unter  $M$  die Menge aller der Ungleichung  $\alpha_0 \leq \xi < \alpha_1$  genügenden Ordinalzahlen, für die  $\varphi(\xi)$  gilt. Nach 7.4.1 ist dann  $\beta \in M$ , d. h.  $\varphi(\beta)$  gilt, w. z. b. w.

Genau so erkennt man: Um  $a_\alpha$  für jede Ordinalzahl  $\alpha \geq \alpha_0$  zu definieren, genügt es: 1.  $a_{\alpha_0}$  zu definieren, und 2. unter der Annahme,  $a_\xi$  sei für  $\alpha_0 \leq \xi < \alpha$  schon definiert,  $a_\alpha$  zu definieren (Definition durch transfinite Induktion).

Als Beispiel beweisen wir durch transfinite Induktion:

**7.4.2.** Jede Ordinalzahl  $\alpha$  ist auf eine und nur eine Weise in der Form darstellbar:  $\alpha = \eta + n$ , wo  $\eta$  eine Grenzzahl und  $n$  eine endliche Ordinalzahl.

1. Die Behauptung ist offenkundig richtig für  $\alpha = 0$ . 2. Angenommen die Behauptung sei richtig für alle  $\xi < \alpha$ . Ist dann  $\alpha$  eine isolierte Zahl, so gilt sie für  $\alpha - 1$ ; d. h.  $\alpha - 1$  ist auf eine und nur eine Weise in der Form  $\eta + n$  darstellbar; dann aber ist  $\alpha = \eta + (n + 1)$ , also ist auch  $\alpha$  in der behaupteten Form darstellbar; und es kann keine zweite Darstellung dieser Form geben; denn aus  $\alpha = \eta' + n'$  folgt zunächst  $n' > 0$ , da  $\alpha$  keine Grenzzahl; sodann folgt  $\alpha - 1 = \eta' + (n' - 1)$ , also nach Annahme  $\eta' = \eta$ ,  $n' - 1 = n$ , d. h.  $n' = n + 1$ . Ist hingegen  $\alpha$  Grenzzahl, so gibt es für  $\alpha$  genau eine Darstellung der Form  $\eta + n$ , nämlich  $\eta = \alpha$ ,  $n = 0$ .

Auf Grund von 7.4.2 unterscheiden wir die Ordinalzahlen  $\alpha$  in gerade und ungerade, je nachdem in der Darstellung  $\alpha = \eta + n$  von 7.4.2 die endliche Ordinalzahl  $n$  gerade oder ungerade ist. Jede Grenzzahl ist dann eine gerade Zahl ( $n = 0$ ).

Literatur zu § 7: wie zu § 4.

## § 8. Die Vergleichung der Mächtigkeiten.

**1. Der Wohlordnungssatz.** Wir wollen nun zeigen, daß jede Menge äquivalent einer wohlgeordneten Menge ist. Sei  $A$  eine beliebige nicht leere Menge,  $\mathfrak{C}$  das System ihrer nicht leeren Teile. Wir denken uns eine Auswahl aus  $\mathfrak{C}$  gegeben (§ 2, 2), d. h. jedem nicht leeren Teile  $C$  von  $A$  sei eines seiner Elemente zugeordnet; es heiße das ausgezeichnete Element von  $C$ . Diese Auswahl aus  $\mathfrak{C}$  denken wir uns im folgenden festgehalten. Mit  $W(\beta)$  bezeichnen wir die Menge der Ordinalzahlen  $\xi < \beta$ . Eine eindeutige Abbildung von  $W(\beta)$  auf einen Teil  $B$  von  $A$  heiße eine

ordinale Abbildung, wenn sie folgende Eigenschaft hat: ist  $B_\xi$  das Bild von  $W(\xi)$  ( $\xi < \beta$ ), so ist das Bild  $a_\xi$  von  $\xi$  das ausgezeichnete Element von  $A - B_\xi$ . Das Element  $a \in A$  heiße ein ordinales Bild von  $\xi$ , wenn es ein  $\beta > \xi$  und eine ordinale Abbildung von  $W(\beta)$  auf einen Teil von  $A$  gibt, bei der  $a$  das Bild von  $\xi$  ist. Daraus folgt unmittelbar:

**8.1.1.** *Besitzt die Ordinalzahl  $\xi$  ein ordinales Bild, so auch jede Ordinalzahl  $< \xi$ .*

**8.1.11.** *Zu einer Ordinalzahl  $\alpha$  gibt es höchstens ein ordinales Bild.*

Wir beweisen das durch transfinite Induktion (7.4.12). Die Behauptung ist richtig für  $\alpha = 0$ ; denn bei jeder ordinalen Abbildung von  $W(\beta)$  ( $\beta > 0$ ) ist — zufolge Definition der ordinalen Abbildung — das Bild  $a_0$  von 0 das ausgezeichnete Element von  $A - A = A$ . Angenommen die Behauptung sei richtig für alle  $\xi < \alpha$ ; bezeichnet dann  $B_\alpha$  die Menge der ordinalen Bilder aller  $\xi < \alpha$ , so muß bei jeder ordinalen Abbildung von  $W(\beta)$  ( $\beta > \alpha$ ) das Bild  $a_\alpha$  von  $\alpha$  das ausgezeichnete Element von  $A - B_\alpha$  sein.

**8.1.12.** *Ist  $\alpha \neq \alpha'$  und sind  $a_\alpha, a_{\alpha'}$  ordinale Bilder von  $\alpha$  bzw.  $\alpha'$ , so ist auch  $a_\alpha \neq a_{\alpha'}$ .*

Sei etwa  $\alpha' > \alpha$ ; da  $\alpha'$  ein ordinales Bild besitzt, gibt es ein  $\beta > \alpha'$  und eine ordinale Abbildung von  $W(\beta)$ , bei der  $a_{\alpha'}$  Bild von  $\alpha'$  ist. Wegen  $\alpha < \alpha' < \beta$  und wegen 8.1.11 ist bei dieser Abbildung  $a_\alpha$  Bild von  $\alpha$ ; und da jede ordinale Abbildung eineindeutig ist, folgt die Behauptung.

**8.1.13.** *Jedes Element von  $A$  ist ordinales Bild einer Ordinalzahl.*

Sei  $M$  die Menge der Ordinalzahlen, die ein ordinales Bild besitzen; nach 7.8.41 gibt es eine auf  $M$  unmittelbar folgende Ordinalzahl  $\gamma$ . Nach 8.1.1 und 8.1.11 hat jede Ordinalzahl  $\xi < \gamma$  ein und nur ein ordinales Bild  $a_\xi$ . Ordnen wir jedem  $\xi < \gamma$  sein ordinales Bild  $a_\xi$  zu, so ist dadurch eine nach 8.1.12 eineindeutige Abbildung von  $W(\gamma)$  auf einen Teil  $A^*$  von  $A$  gegeben, die offenbar eine ordinale Abbildung ist. Wir haben zu zeigen:  $A - A^* = \Lambda$ . Wäre  $A - A^* \supset \Lambda$ , so gäbe es ein ausgezeichnetes Element  $a^*$  von  $A - A^*$ . Ordnen wir nun jeder Ordinalzahl  $\xi < \gamma$  ihr ordinales Bild  $a_\xi$  und der Ordinalzahl  $\gamma$  das Element  $a^*$  zu, so hätten wir eine ordinale Abbildung von  $W(\gamma + 1)$  auf  $A^* + \{a^*\}$ , und es wäre somit  $a^*$  ordinales Bild von  $\gamma$ , entgegen der Definition von  $\gamma$ . Also ist  $A - A^* = \Lambda$ , w. z. b. w.

**8.1.2.** *Zu jeder Menge  $A$  gibt es eine quivalente wohlgeordnete Menge.*

Sei wieder  $\gamma$  die kleinste Ordinalzahl, die kein ordinales Bild besitzt. Ordnen wir jeder Ordinalzahl  $\xi < \gamma$  ihr ordinales Bild zu, so ist dies nach 8.1.13 eine Abbildung von  $W(\gamma)$  auf  $A$ , die nach 8.1.12 eineindeutig ist; also ist  $A \sim W(\gamma)$ ; da  $W(\gamma)$  nach 7.8.1 wohlgeordnet ist, ist 8.1.2 bewiesen.

Damit ist auch gezeigt:

**8-1-21.** *Ist  $A$  eine beliebige Menge, so gibt es eine Ordinalzahl  $\gamma$ , so daß die Elemente von  $A$  mit  $a_\xi$  ( $\xi < \gamma$ ) bezeichnet werden können.*

Man drückt die Sätze 8-1-2, 8-1-21 oft kurz so aus: Jede Menge  $A$  kann wohlgeordnet werden.

Literatur: Der Satz, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann, war von G. Cantor vermutet worden; er wurde zuerst bewiesen von E. Zermelo, Math. Ann. 59 (1904) S. 514; 65 (1908) S. 107.

**2. Vergleichung von Mächtigkeiten.** Um zwei Mächtigkeiten ihrer Größe nach vergleichen zu können, beweisen wir zunächst den Satz:

**8-2-1.** *Ist  $A \supseteq B \supseteq C$  und  $A \sim C$ , so ist auch  $A \sim B$ .*

Nach 8-1-2 gibt es eine zu  $A$  äquivalente wohlgeordnete Menge  $A'$ ; bei einer eindeutigen Abbildung von  $A$  auf  $A'$  gehen  $B$  und  $C$  über in Mengen  $B'$  und  $C'$ , für die gilt:  $A' \supseteq B' \supseteq C'$  und  $A' \sim C'$ ; und da  $A \sim A'$ ,  $B \sim B'$ , genügt es, zu zeigen:  $A' \sim B'$ . Schreiben wir wieder  $A, B, C$  statt  $A', B', C'$ , so können wir also von vornherein  $A$  als wohlgeordnet annehmen; nach 7-1-1 sind dann auch  $B$  und  $C$  wohlgeordnet. Wäre die Behauptung nicht richtig, so gäbe es nach 7-3-2 unter den wohlgeordneten Mengen  $A$ , für die sie nicht gilt, eine solche von kleinstmöglicher Ordinalzahl  $\alpha$ . Sind  $\beta, \gamma$  die Ordinalzahlen von  $B$  und  $C$ , so ist nach 7-3-3  $\gamma \leq \beta \leq \alpha$ . Da  $A \sim C$ , gibt es eine eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $C$ ; sie führe  $B$  über in  $B^*$  und  $C$  in  $C^*$ ; dann ist  $B \sim B^*$ ,  $C \sim C^*$ , und aus  $A \supseteq B \supseteq C$  folgt:  $C \supseteq B^* \supseteq C^*$ ; jedoch kann nicht  $C \sim B^*$  sein, da aus  $C \sim B^*$ ,  $C \sim A$ ,  $B \sim B^*$  folgen würde:  $A \sim B$ , entgegen der Annahme. Es ist also  $C \supseteq B^* \supseteq C^*$ ,  $C \sim C^*$ , aber nicht  $C \sim B^*$ ; zufolge der Definition von  $\alpha$  als der kleinstmöglichen Ordinalzahl, zu der es eine wohlgeordnete Menge gibt, für die die Behauptung nicht gilt, kann also nicht  $\gamma < \alpha$  sein. Und da  $\gamma \leq \alpha \leq \beta$  war, ist  $\gamma = \beta = \alpha$ , mithin  $B \sim A$ , im Widerspruch zur Annahme, daß für  $A$  die Behauptung nicht gilt.

Nun folgt unmittelbar der „Äquivalenzsatz“:

**8-2-11.** *Ist  $A$  äquivalent einem Teile von  $B$  und  $B$  äquivalent einem Teile von  $A$ , so ist  $A \sim B$ .*

Sei  $A \sim B'$ ,  $B \sim A'$ ,  $B' \subseteq B$ ,  $A' \subseteq A$ . Eine eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B'$  führt dann  $A'$  über in eine Menge  $B'' \subseteq B'$ , und es ist  $A \sim B''$ , also wegen  $B \sim A'$  auch  $B \sim B''$ . Wir haben nun  $B \supseteq B' \supseteq B''$ ,  $B \sim B''$ , also ist nach 8-2-1  $B \sim B'$ , und somit wegen  $A \sim B'$  auch  $A \sim B$ .

Seien  $\alpha$  und  $\beta$  zwei Mächtigkeiten,  $A$  eine Menge der Mächtigkeit  $\alpha$ ,  $B$  eine Menge der Mächtigkeit  $\beta$ . Wir definieren<sup>1)</sup>:  $\alpha < \beta$  (oder  $\beta > \alpha$ ), wenn  $A$

<sup>1)</sup> Offenbar ist diese Definition unabhängig von der Wahl der Mengen  $A$  und  $B$ .

äquivalent einem Teile von  $B$ , aber nicht  $A \sim B$ . Dann besagt  $a \leq b$ :  $A$  ist äquivalent einem Teile von  $B$ . Wir werden nun zeigen, daß die so definierte Relation  $<$  den Forderungen genügt, die man an den Begriff „kleiner“ zu stellen hat.

**8-2-2.** *Zwischen zwei Mächtigkeiten  $a, b$  gilt eine und nur eine der drei Relationen:  $a = b, a < b, a > b$ .*

Habe  $A$  die Mächtigkeit  $a$ ,  $B$  die Mächtigkeit  $b$ . Ist dann  $A \sim B$ , so ist  $a = b$ . Sei nun nicht  $A \sim B$ , also auch nicht  $a = b$ . Nach 8-1-2 gibt es wohlgeordnete Mengen  $A', B'$ , so daß  $A' \sim A, B' \sim B$ . Nach 7-2-3 ist dann  $A'$  ähnlich (also auch äquivalent) einem Abschnitte von  $B'$ , oder  $B'$  ähnlich einem Abschnitte von  $A'$ . Im ersten Falle ist  $a \leq b$ , also da nicht  $a = b$  ist:  $a < b$ ; ebenso ist im zweiten Falle  $b < a$ , d. h.  $a > b$ . Damit ist gezeigt, daß mindestens eine der drei Relationen  $a = b, a < b, a > b$  gilt. Wir zeigen nun, daß nur eine gelten kann. Daß  $a = b$  und  $a < b$  (und ebenso  $a = b$  und  $a > b$ ) sich ausschließen, folgt unmittelbar aus der Definition. Es ist also nur mehr zu zeigen, daß  $a < b$  und  $a > b$  sich ausschließen. Würde sowohl  $a < b$  als auch  $a > b$  gelten, so wäre  $A$  äquivalent einem Teile von  $B$  und  $B$  äquivalent einem Teile von  $A$ ; dann aber wäre nach 8-2-11  $a = b$ , was unmöglich, denn  $a < b$  und  $a = b$  schließen sich aus.

**8-2-21.** *Aus  $a < b, b < c$  folgt  $a < c$ .*

Seien  $A, B, C$  Mengen der Mächtigkeiten  $a, b, c$ . Aus  $a < b, b < c$  folgt dann:  $A$  ist äquivalent einem Teile  $B'$  von  $B$ ,  $B$  ist äquivalent einem Teile  $C'$  von  $C$ ; also ist auch  $A$  äquivalent einem Teile  $C''$  von  $C'$ . Wegen  $C'' \subseteq C' \subseteq C$  ist somit  $a \leq c$ . Wäre nun  $a = c$ , d. h.  $A \sim C$ , so wäre wegen  $A \sim C'$  auch  $C \sim C''$ , und aus  $C \supseteq C' \supseteq C''$  würde nach 8-2-1 folgen  $C' \sim C$ , also wegen  $B \sim C'$  auch  $B \sim C$ , entgegen der Annahme  $b < c$ . Es ist also nicht  $a = c$ ; wegen  $a \leq c$  ist also  $a < c$ .

Nun kann 5-1-5 so ausgesprochen werden:

**8-2-3.**  $\aleph_0$  ist die kleinste unendliche (transfinite) Mächtigkeit.

Ferner verschärft sich 4-3-5 zu:

**8-2-4.** *Für jede Mächtigkeit  $b$  ist  $2^b > b$ .*

Sei  $B$  eine Menge der Mächtigkeit  $b$  und  $\mathfrak{C}$  das System ihrer Teile; nach 4-3-3 hat  $\mathfrak{C}$  die Mächtigkeit  $2^b$ . Indem man jedem  $b \in B$  die Menge  $\{b\} \in \mathfrak{C}$  zuordnet, sieht man:  $B$  ist äquivalent einem Teile von  $\mathfrak{C}$ ; also ist  $b \leq 2^b$ . Aus 4-3-5 folgt also  $b < 2^b$ .

Da nach § 5 (2):  $2^{\aleph_0} = \aleph$  ist, verschärft sich nun auch die Ungleichung  $\aleph \neq \aleph_0$  zu:

(2)  $\aleph > \aleph_0$ .



**8.3.2.**  $\aleph_\alpha$  ist die Mächtigkeit der Menge  $W(\omega_\alpha)$  aller Ordinalzahlen  $< \omega_\alpha$ .

Denn diese Menge hat nach 7.3.1 die Ordinalzahl  $\omega_\alpha$ , und  $\omega_\alpha$  hat die Mächtigkeit  $\aleph_\alpha$ .

Da jede Mächtigkeit unter den  $\aleph_\alpha$  vorkommt, so auch die Mächtigkeit  $\aleph$  des Kontinuums (§ 5, 2). Es ist aber nicht bekannt, welchen Index  $\alpha$  sie hat. G. Cantor hat vermutet, daß  $\aleph = \aleph_1$  (Kontinuumhypothese). Diese Vermutung ist wegen § 5 (2) enthalten in der weitergehenden Vermutung, daß für jedes  $\alpha$  gilt:  $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$ .

Literatur: Zur Kontinuumhypothese vgl. W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 177; D. Hilbert, Math. Ann. 95 (1926) S. 161.

**4. Die Zahlklasse  $Z_0$ .** Wir beweisen nun noch einige Sätze über die Zahlklasse  $Z_0$  der abzählbar unendlichen Ordinalzahlen.

**8.4.1.** Zu jeder abzählbaren Menge  $A$  von Ordinalzahlen aus  $Z_0$  gibt es eine Ordinalzahl  $\beta \in Z_0$ , die größer als alle  $\alpha \in A$  ist.

Das bedarf eines Beweises nur, wenn es in  $A$  keine größte Ordinalzahl gibt (denn ist  $\bar{\alpha}$  größte in  $A$ , so leistet  $\beta = \bar{\alpha} + 1$  das Verlangte). Sei  $\beta$  die unmittelbar auf  $\bigcup_{\alpha \in A} W(\alpha)$  folgende Ordinalzahl. Dann ist  $W(\beta) = \bigcup_{\alpha \in A} W(\alpha)$  nach 5.1.31 als Summe abzählbar vieler abzählbarer Mengen abzählbar, und da  $\beta$  nach 7.3.1 die Ordinalzahl von  $W(\beta)$ , ist  $\beta \in Z_0$ ; offenbar ist  $\beta > \alpha$  für jedes  $\alpha \in A$ .

Ist  $((\alpha_n))$  eine wachsende Folge von Ordinalzahlen ( $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ ), und  $\beta$  die auf die Menge der  $\alpha_n$  unmittelbar folgende Ordinalzahl, so schreiben wir kurz:

$$\beta = \lim_n \alpha_n.$$

Dann folgt aus 8.4.1:

**8.4.2.** Ist  $((\alpha_n))$  eine wachsende Folge von Ordinalzahlen aus  $Z_0$ , so ist auch  $\lim_n \alpha_n \in Z_0$ .

Insbesondere: es gibt keine wachsende Folge  $((\alpha_n))$ , so daß  $\lim_n \alpha_n = \omega_1$  wäre (wo  $\omega_1$  die Anfangszahl von  $Z_1$  bedeutet). Hingegen:

**8.4.21.** Zu jeder Grenzzahl  $\beta \in Z_0$  gibt es eine wachsende Folge  $((\alpha_n))$ , so daß  $\beta = \lim_n \alpha_n$ .

In der Tat, wegen  $\beta \in Z_0$  ist  $W(\beta)$  abzählbar, die sämtlichen Zahlen  $< \beta$  können also den natürlichen Zahlen zugeordnet werden:  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$  (doch ist dies natürlich i. a. nicht ihre Ordnung der Größe nach). Da  $\beta$  Grenzzahl, gibt es unter den  $\beta_n$  keine größte. Wir greifen nun aus der Folge der  $\beta_n$  eine wachsende Teilfolge  $((\alpha_i))$  heraus nach der Regel: „ $\alpha_i = \beta_i$ ; sind



$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$  gefunden, so sei  $\alpha_{i+1}$  die erste in der Folge  $((\beta_n))$  nach  $\alpha_i$  kommende Zahl, die  $> \alpha_i$  ist.“ Dann ist offenbar  $\beta = \lim_i \alpha_i$ ; denn ist  $\gamma < \beta$ , so kommt  $\gamma$  in  $((\beta_n))$  vor; sei etwa  $\alpha_{i^*}$  das erste  $\alpha_i$ , das in  $((\beta_n))$  nach  $\gamma$  kommt; dann ist nach dem Bildungsgesetz der  $\alpha_i$  notwendig  $\alpha_{i^*} > \gamma$ ; keine Zahl  $\gamma < \beta$  ist also  $> \alpha_i$  für alle  $i$ , d. h.  $\beta = \lim_i \alpha_i$ .

**8.4.3.** *Ist eine der Größe nach geordnete Menge  $A$  reeller Zahlen wohlgeordnet, so ist sie abzählbar.*

Sei in der Tat  $\alpha$  die Ordinalzahl von  $A$ . Dann gibt es eine ähnliche Abbildung von  $A$  auf  $W(\alpha)$ ; ist  $x_\beta$  dabei das Bild der Ordinalzahl  $\beta$ , so ist  $x_\beta < x_{\beta'}$ , wenn  $\beta < \beta'$ . Die Intervalle  $(x_\beta, x_{\beta+1})$  sind also zu je zweien fremd. Nach 5.1.42 gibt es ihrer also nur abzählbar viele, somit ist auch  $A$  abzählbar, wie behauptet.

Daß es umgekehrt zu jeder Ordinalzahl  $\alpha \in Z_0$  eine Menge reeller (ja sogar rationaler) Zahlen gibt, die der Größe nach geordnet die Ordinalzahl  $\alpha$  hat, ist ein Spezialfall von 6.4.2.

Um zu einer Anwendung der Ordinalzahl  $\omega_1$  zu gelangen, betrachten wir die Menge aller Folgen  $((n_i))$  natürlicher Zahlen. Sei  $a = ((n_i))$ ,  $a' = ((n'_i))$ ; wir definieren:  $a = a'$ , bzw.  $a < a'$ , bzw.  $a > a'$ , wenn  $n_i = n'_i$ , bzw.  $n_i < n'_i$ , bzw.  $n_i > n'_i$  für fast alle  $i$ ; zwischen zwei beliebigen Folgen natürlicher Zahlen wird selbstverständlich i. a. keine der drei Relationen  $a = a'$ ,  $a < a'$ ,  $a > a'$  bestehen. Doch gilt:

**8.4.4.** *Zu jeder abzählbaren Menge von Folgen natürlicher Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_j, \dots$  gibt es eine Folge  $a$  natürlicher Zahlen, so daß  $a_j < a$  für alle  $j$ .*

Sei in der Tat  $a_j$  die Folge  $n_{j1}, n_{j2}, \dots, n_{ji}, \dots$ ; wir wählen  $n_1 > n_{11}$ ,  $n_2 > \max(n_{12}, n_{22})$ ,  $n_3 > \max(n_{13}, n_{23}, n_{33})$  usw. Die Folge  $a$  der Zahlen  $n_1, n_2, n_3, \dots$  leistet das Verlangte.

**8.4.41.** *Es gibt eine Menge der Mächtigkeit  $\aleph_1$  von Folgen natürlicher Zahlen  $a_\alpha$  ( $\alpha < \omega_1$ ), so daß  $a_\alpha < a_{\alpha'}$  für  $\alpha < \alpha'$ .*

Sei die Folge  $a_0$  beliebig gewählt. Wir nehmen an, für  $\xi < \alpha$  ( $< \omega_1$ ) seien die Folgen  $a_\xi$  schon so gefunden, daß  $a_\xi < a_{\xi'}$  für  $\xi < \xi'$  ( $< \alpha$ ). Da wegen  $\alpha < \omega_1$  die Menge aller  $\xi < \alpha$  abzählbar ist, gibt es nach 8.4.4 eine Folge  $a$  natürlicher Zahlen, so daß  $a_\xi < a$  für alle  $\xi < \alpha$ ; eine solche Folge wählen wir für  $a_\alpha$ . Auf diese Weise erhält man zu jedem  $\alpha < \omega_1$  eine Folge  $a_\alpha$ , und die Menge dieser  $a_\alpha$  ( $\alpha < \omega_1$ ) leistet das Verlangte.

## Zweites Kapitel.

### Punktmengen.

#### § 9. Topologische und metrische Räume.

1. **Topologische Räume.** Eine Menge  $E$  heißt eine topologische Menge oder ein topologischer Raum, wenn in ihr ein System von Teilmengen ausgezeichnet ist, die als die offenen Mengen in  $E$  bezeichnet werden, und folgenden Forderungen (den „topologischen Axiomen“) zu genügen haben:

- 1<sub>i</sub>) Die leere Menge ist eine offene Menge.
- 2<sub>i</sub>) Zu jedem  $a \in E$  gibt es eine  $a$  enthaltende offene Menge.
- 3<sub>i</sub>) Der Durchschnitt zweier (und somit endlich vieler) offener Mengen ist eine offene Menge.
- 4<sub>i</sub>) Die Summe eines (endlichen oder unendlichen) Systemes offener Mengen ist eine offene Menge.
- 5<sub>i</sub>) Ist  $a \in E$ ,  $b \in E$ ,  $a \neq b$ , so gibt es zwei fremde offene Mengen, deren eine  $a$ , deren andere  $b$  enthält.

Die Elemente  $a \in E$  heißen die Punkte von  $E$ , die Teile von  $E$  heißen Punktmengen. Ist  $A \subseteq E$ , so heißt  $E - A$  das Komplement von  $A$ ; wir schreiben dafür kurz  $-A$ . Wir ziehen einige naheliegende Folgerungen aus den topologischen Axiomen.

**9.1.1.** *Der topologische Raum  $E$  selbst ist eine offene Menge.*

Denn nach 2<sub>i</sub>) kann jedem Punkte  $a \in E$  eine offene Menge  $G_a$  so zugeordnet werden, daß  $a \in G_a$ ; dann ist  $E = \bigcup_{a \in E} G_a$ , also ist  $E$  nach 4<sub>i</sub>) offen.

5<sub>i</sub>) kann verschärft werden zu:

**9.1.2.** *Ist  $a \in E$ ,  $b_i \in E$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ),  $b_i \neq a$ , so gibt es eine  $a$  enthaltende offene Menge, die keinen der Punkte  $b_i$  enthält.*

In der Tat, nach 5<sub>i</sub>) gibt es eine offene Menge  $G_i$ , die  $a$ , aber nicht  $b_i$  enthält. Nach 3<sub>i</sub>) ist auch  $G_1 G_2 \dots G_n$  offen und leistet das Verlangte.

Ferner folgt aus 2<sub>i</sub>) und 5<sub>i</sub>) unmittelbar:

**9.1.3.** *Der Durchschnitt aller  $a$  enthaltenden offenen Mengen ist  $\{a\}$ .*

**9.1.4.** Ist  $G$  offen und  $a \in E$ , so ist auch  $G - \{a\}$  offen.

In der Tat, wir bilden zu jedem  $b \in E$ , das  $\neq a$  ist, nach 5<sub>i</sub>) eine  $b$ , aber nicht  $a$  enthaltende offene Menge  $G_b$ . Dann ist  $E - \{a\}$  die Summe aller dieser  $G_b$ , und somit nach 4<sub>i</sub>) offen. Da  $G - \{a\} = G(E - \{a\})$ , folgt die Behauptung aus 3<sub>i</sub>).

Aus 9.1.4 und Axiom 3<sub>i</sub>) folgt:

**9.1.41.** Ist  $G$  offen und  $a_i \in E$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), so ist auch  $G - \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  offen.

Zwei topologische Räume  $E$  und  $E'$  heißen homöomorph, wenn es eine eindeutige Abbildung von  $E$  auf  $E'$  gibt, die die offenen Mengen in  $E$  überführt in die offenen Mengen in  $E'$ .

Jede den Punkt  $a$  enthaltende offene Menge nennen wir eine Umgebung von  $a$ , in Zeichen  $U_a$ ; ebenso heiße eine offene Menge  $G$  eine Umgebung  $U_A$  der Menge  $A$ , wenn  $A \subseteq G$ . Ist  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ , so nennen wir die nach 9.1.4 offene Menge  $U_a - \{a\}$  eine reduzierte Umgebung von  $a$ , in Zeichen  $U'_a$ .

Ist  $E$  ein topologischer Raum,  $\mathfrak{G}$  das System seiner offenen Mengen und  $A \subseteq E$ , so erfüllt das System aller Mengen  $A \cap G$  ( $G \in \mathfrak{G}$ ) die topologischen Axiome, wenn in ihnen  $E$  durch  $A$  ersetzt wird. Also: Ist  $E$  ein topologischer Raum, so wird auch jede Punktmenge  $A$  von  $E$  zu einem topologischen Raum, indem man zum System der offenen Mengen in  $A$  die Durchschnitte von  $A$  mit den offenen Mengen in  $E$  wählt. Immer, wenn wir von einem topologischen Raume  $A$  sagen, er sei Teil des topologischen Raumes  $E$ , meinen wir damit nicht nur  $A \subseteq E$ , sondern auch: die offenen Mengen in  $A$  sind die Durchschnitte mit  $A$  der offenen Mengen in  $E$ .

Literatur: Mit der Theorie der Punktmengen in „abstrakten Räumen“ hat sich zuerst M. Fréchet beschäftigt: Rend. Pal. 22 (1906) S. 1; zusammenfassende Darstellung: Les espaces abstraits et leur théorie, considérée comme introduction à l'analyse générale, Paris 1928. Die Theorie der topologischen Räume wurde besonders ausgebildet durch F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre (Leipzig 1914) S. 213 ff. Über verschiedene topologische Axiomensysteme: H. Tietze, Math. Ann. 88 (1923) S. 290.

**2. Metrische Räume.** Eine Menge  $E$  heißt eine metrische Menge oder ein metrischer Raum (ihre Elemente die Punkte, ihre Teile die Punktmengen dieses Raumes), wenn jedem Paare  $a, b$  aus Elementen von  $E$  eine (endliche) Zahl  $ab$  (die Entfernung, der Abstand der Punkte  $a, b$ ) so zugeordnet ist, daß die folgenden Forderungen (die „metrischen Axiome“) erfüllt sind:

1<sub>m</sub>) Es ist  $ab = 0$  dann und nur dann, wenn  $a = b$ .

2<sub>m</sub>)  $ac \leq ab + cb$ .

**9.2.1.** Für je zwei Punkte  $a \neq b$  von  $E$  ist  $ab > 0$ .

Setzt man in  $2_m$ )  $a = c$ , so erhält man nach  $1_m$ ):  $0 \leq 2ab$ , also  $ab \geq 0$ ; nun folgt die Behauptung aus  $1_m$ ).

**9.2.2.** Für je zwei Punkte  $a, c$  von  $E$  ist  $ac = ca$ .

Setzt man in  $2_m$ )  $a = b$ , so erhält man nach  $1_m$ ):  $ac \leq ca$ , und daraus durch Vertauschung von  $a$  und  $c$  auch  $ca \leq ac$ .

Das Axiom  $2_m$ ) heißt auch die Dreiecksungleichung. Aus  $2_m$ ) und 9.2.2 folgt einerseits:  $ac - ab \leq bc$ , andererseits (durch Vertauschung von  $a$  und  $b$ ):  $bc \leq ba + ca$ , also:

$$(2) \quad ac - ab \leq bc \leq ac + ab.$$

Zwei metrische Räume  $E$  und  $E'$  heißen isometrisch, wenn es eine eindeutige Abbildung von  $E$  auf  $E'$  gibt, so daß, wenn  $a', b'$  die Bilder von  $a, b$  sind, stets  $ab = a'b'$  ist.

Ist  $E$  ein metrischer Raum, so wird ein beliebiger Teil  $A$  von  $E$  zu einem metrischen Raume, indem man als Entfernung zweier Punkte in  $A$  ihre Entfernung in  $E$  betrachtet. Immer, wenn wir von einem metrischen Raum  $A$  sagen, er sei Teil des metrischen Raumes  $E$ , meinen wir damit nicht nur  $A \subseteq E$ , sondern auch: die Entfernung zweier Punkte in  $A$  ist identisch mit ihrer Entfernung in  $E$ .

Ist  $\varrho$  eine positive Zahl,  $a \in E$ , so heißt die Menge  $\{x \mid a < \varrho\}$  aller der Ungleichung  $xa < \varrho$  genügenden Punkte  $x$  von  $E$ : die Kugel vom Mittelpunkt  $a$  und Radius  $\varrho$  (oder auch: die Umgebung  $\varrho$  von  $a$ ), in Zeichen  $K_{a\varrho}$ . Durch Weglassen des Mittelpunktes  $a$  entsteht daraus die reduzierte Kugel (oder reduzierte Umgebung  $\varrho$  von  $a$ )  $K'_{a\varrho} = K_{a\varrho} - \{a\}$ .

Jeder metrische Raum  $E$  kann als topologischer Raum aufgefaßt werden<sup>1)</sup>. Dies geschieht vermöge folgender Definition: Die Menge  $G \subseteq E$  heiße offen, wenn es zu jedem  $a \in G$  eine Kugel  $K_{a\varrho} \subseteq G$  gibt. In der Tat genügt, wie wir gleich sehen werden, das System der so definierten offenen Mengen des Raumes  $E$  den topologischen Axiomen. Zunächst zeigen wir:

**9.2.3.** Jede Kugel  $K_{a\varrho}$  ist eine offene Menge.

Sei  $b \in K_{a\varrho}$ ; setzen wir  $ab = \sigma$ , so ist  $\sigma < \varrho$ ; ist dann  $xb < \varrho - \sigma$ , so ist nach der Dreiecksungleichung  $xa < \varrho$ , also  $x \in K_{a\varrho}$ ; d. h.  $K_{b, \varrho - \sigma} \subseteq K_{a\varrho}$ ; also ist  $K_{a\varrho}$  offen.

Nun zeigen wir, daß bei der eben gegebenen Definition der offenen Mengen eines metrischen Raumes die topologischen Axiome erfüllt sind. Für  $1_t$ ),  $3_t$ ),  $4_t$ ) ist dies evident; für  $2_t$ ) folgt es aus 9.2.3; um zu zeigen,

<sup>1)</sup> Mit der umgekehrten Frage werden wir uns in § 14, 3 befassen.

daß auch 5<sub>i</sub>) erfüllt ist, setze man  $a b = \varrho$ ; dann folgt aus der Dreiecksungleichung 2<sub>m</sub>) sofort, daß  $K_{a, \frac{\varrho}{2}}$  und  $K_{b, \frac{\varrho}{2}}$  fremd sind, und nach 9.2.3 sind  $K_{a, \frac{\varrho}{2}}$ ,  $K_{b, \frac{\varrho}{2}}$  offene Mengen.

Aus 9.2.3 und 9.1.4 folgt nun:

**9.2.4.** Jede reduzierte Kugel  $K'_a$  ist eine offene Menge.

Literatur: Das Studium metrischer Räume geht auf M. Fréchet zurück. Vgl. auch A. Lindenbaum, Fund. math. 8 (1926) S. 209. Eingehende Untersuchung metrischer Räume und Verallgemeinerungen: K. Menger, Math. Ann. 100 (1928) S. 75, Jahresber. Math. Ver. 40 (1931) S. 201.

**3. Beispiele metrischer Räume.** Die Menge der reellen Zahlen wird zu einem metrischen Raum durch die Abstandsdefinition:

$$(3) \quad a b = |a - b| = \sqrt{(a - b)^2},$$

die offenkundig die metrischen Axiome 1<sub>m</sub>), 2<sub>m</sub>) erfüllt. Diesen metrischen Raum bezeichnen wir als den  $R_1$ <sup>1)</sup>.

Die Menge der  $n$ -tupel reeller Zahlen wird zu einem metrischen Raume, den wir als den  $R_n$  bezeichnen, durch folgende Abstandsdefinition: ist  $a$  das  $n$ -tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b$  das  $n$ -tupel  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , so sei:

$$(3.1) \quad a b = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2}.$$

Daß das metrische Axiom 1<sub>m</sub>) erfüllt ist, ist trivial; wir haben zu zeigen, daß auch 2<sub>m</sub>) erfüllt ist, d. h. daß die Ungleichung gilt:

$$(3.11) \quad \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + \dots + (a_n - c_n)^2} \leq \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2} + \sqrt{(b_1 - c_1)^2 + \dots + (b_n - c_n)^2}.$$

Wir gehen aus von der bekannten Determinantenrelation:

$$\begin{vmatrix} u_1^2 + \dots + u_n^2 & u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \\ u_1 v_1 + \dots + u_n v_n & v_1^2 + \dots + v_n^2 \end{vmatrix} = \sum_{1 \leq i < k \leq n} \begin{vmatrix} u_i u_k \\ v_i v_k \end{vmatrix}^2.$$

Da die rechte Seite  $\geq 0$  ist, erhalten wir daraus die Ungleichung:

$$(3.12) \quad (u_1 v_1 + \dots + u_n v_n)^2 \leq (u_1^2 + \dots + u_n^2) (v_1^2 + \dots + v_n^2).$$

Wegen  $|a_i - c_i| \leq |a_i - b_i| + |b_i - c_i|$  ist nun:

$$\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i - c_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^n |a_i - b_i| |b_i - c_i|,$$

<sup>1)</sup> Auch die Abstandsdefinition  $a b = \sqrt{|a - b|}$  erfüllt die Axiome 1<sub>m</sub>), 2<sub>m</sub>), nicht aber die Abstandsdefinition  $a b = (a - b)^2$ .

also unter Benutzung von (3.12):

$$\sum_{i=1}^n (a_i - c_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 + \sum_{i=1}^n (b_i - c_i)^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2 \sum_{i=1}^n (b_i - c_i)^2},$$

was mit der zu beweisenden Ungleichung (3.11) gleichbedeutend ist.

Ist  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ein Punkt des  $R_n$ , so heißt die reelle Zahl  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) die  $i$ -te Koordinate des Punktes  $a$ . Sind alle  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ganzzahlig, so heißt  $a$  ein Gitterpunkt des  $R_n$ ; sind alle  $a_i$  rational, so heißt  $a$  ein rationaler, anderenfalls ein irrationaler Punkt des  $R_n$ .

Aus (3.12) folgert man durch Grenzübergang:

$$(3.2) \quad \left( \sum_v |u_v v_v| \right)^2 \leq \sum_v u_v^2 \cdot \sum_v v_v^2.$$

Ist also  $\sum_v u_v^2$  und  $\sum_v v_v^2$  endlich, so auch  $\sum_v (u_v - v_v)^2$ . Das ermöglicht folgende Definition:

Die Menge der Folgen  $((a_v))$  reeller Zahlen mit endlicher Quadratsumme  $\sum_v a_v^2$  wird zu einem metrischen Raum, den wir als den  $R_\omega$  bezeichnen, durch folgende Abstandsdefinition: sind  $a = ((a_v))$  und  $b = ((b_v))$  Folgen reeller Zahlen mit endlicher Quadratsumme, so sei:

$$(3.3) \quad ab = \sqrt{\sum_v (a_v - b_v)^2}.$$

Daß das metrische Axiom  $1_m$ ) erfüllt ist, ist trivial; daß  $2_m$ ) gilt erkennt man wie vorhin beim  $R_n$ , indem man sich statt auf (3.12) auf (3.2) stützt. Ist  $a = ((a_v))$  ein Punkt des  $R_\omega$ , so heißt  $a_v$  die  $v$ -te Koordinate des Punktes  $a$ .

Die Menge der Folgen  $((k_v))$  natürlicher Zahlen wird zu einem metrischen Raum, den wir als den  $R_0$  bezeichnen, durch folgende Abstandsdefinition: sind  $a = ((k_v))$  und  $b = ((l_v))$  Folgen natürlicher Zahlen, und ist  $a = b$  (d. h.  $k_v = l_v$  für alle  $v$ ), so sei  $ab = 0$ ; ist hingegen  $a \neq b$  und  $v^*$  der kleinste Index mit  $a_v \neq b_v$ , so sei:

$$(3.4) \quad ab = \frac{1}{v^*}.$$

Daß das metrische Axiom  $1_m$ ) erfüllt ist, ist trivial; daß  $2_m$ ) gilt, folgt daraus, daß offenbar:

$$(3.41) \quad ac \leq \max(ab, bc).$$

Literatur: Der  $R_\omega$  wurde eingeführt von D. Hilbert (ausführlich behandelt von M. Fréchet, *Nouv. Ann.* (4) 8 (1908) S. 97, 289); der  $R_0$  wurde eingeführt von R. Baire, *Acta math.* 32 (1909) S. 105.

**4. Entfernung eines Punktes von einer Menge.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $a \in E, A \subset B \subseteq E$ . Wir definieren die Entfernung (den Abstand) des Punktes  $a$  von der Menge  $B$  durch:

$$(4) \quad aB = Ba = \inf_{b \in B} ab.$$

Ist  $a \in B$ , so ist  $aB = 0$ ; die Umkehrung hiervon gilt nicht; Beispiel im  $R_1$ : ist  $B$  das Intervall  $(a, a')$ , so ist  $aB = 0, a \sim \varepsilon B$ .

Aus der Dreiecksungleichung (Axiom  $2_m$ ) folgt leicht:

$$(4.1) \quad aC \leq ab + bC,$$

und mithin auch (vgl. den Beweis von (2)):

$$(4.11) \quad aC - ab \leq bC \leq aC + ab.$$

Ist  $\varrho > 0, A \subset B \subseteq E$ , so heißt die Menge  $\{x \mid xB < \varrho\}$  aller der Ungleichung  $xB < \varrho$  genügenden Punkte  $x$ : die Umgebung  $\varrho$  der Menge  $B$ , in Zeichen  $U_{B\varrho}$ .

**9.4.1.** Für jedes  $\varrho > 0$  ist die Umgebung  $U_{B\varrho}$  eine offene Menge.

Sei  $b \in U_{B\varrho}$ ; setzen wir  $bB = \sigma$ , so ist  $\sigma < \varrho$ ; ist dann  $xb < \varrho - \sigma$ , so ist nach (4.1)  $xB < \varrho$ , also  $x \in U_{B\varrho}$ ; d. h.  $K_{b\varrho-\sigma} \subseteq U_{B\varrho}$ ; also ist  $U_{B\varrho}$  offen.

**9.4.2.** Für jedes  $\varrho \geq 0$  ist die Menge  $\{x \mid xB > \varrho\}$  aller der Ungleichung  $xB > \varrho$  genügenden Punkte  $x$  offen.

Sei  $bB = \sigma > \varrho$ ; ist dann  $xb < \sigma - \varrho$ , so ist nach (4.11)  $xB > \varrho$ ; d. h.  $K_{b\sigma-\varrho} \subseteq \{x \mid xB > \varrho\}$ , d. h.  $\{x \mid xB > \varrho\}$  ist offen.

**5. Entfernung zweier Mengen.** Sei wieder  $E$  ein metrischer Raum,  $A \subset A \subseteq E, A \subset B \subseteq E$ . Wir definieren die Entfernung (den Abstand) der Mengen  $A$  und  $B$  durch:

$$(5) \quad \overline{AB} = \overline{BA} = \inf_{a \in A, b \in B} ab.$$

Nach (4) ist dies offenbar gleichbedeutend mit:

$$(5.1) \quad \overline{AB} = \inf_{a \in A} aB = \inf_{b \in B} Ab.$$

Ist  $AB \supset A$ , so ist  $\overline{AB} = 0$  (aber nicht umgekehrt); insbesondere ist (für alle  $A \supset A$ ):  $\overline{AA} = 0$ .

Aus der Dreiecksungleichung  $2_m$ ) folgt leicht:

$$(5.2) \quad \overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC};$$

hingegen gilt die Ungleichung  $\overline{AC} \leq \overline{AB} + \overline{BC}$  i. a. nicht; Beispiel:  $A = \{a\}$ ;  $C = \{c\}$ ,  $B = \{a, c\}$  ( $a \neq c$ ).

**6. Durchmesser. Beschränkte Mengen.** Sei wieder  $E$  ein metrischer Raum,  $A \subset E \subseteq B$ ,  $A \subset B \subseteq E$ . Wir definieren die obere Entfernung der Mengen  $A$  und  $B$  durch:

$$(6) \quad d(A, B) = d(B, A) = \sup_{a \in A, b \in B} a b.$$

Natürlich kann  $d(A, B) = +\infty$  sein. Aus der Dreiecksungleichung folgt:

$$(6.1) \quad d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C).$$

Die Zahl  $d(A, A)$  bezeichnen wir als den Durchmesser  $d(A)$  der Menge  $A$ ; hierdurch ist  $d(A)$  nur für  $A \supset A$  definiert; es ist zweckmäßig,  $d(A) = 0$  zu setzen. Aus der Dreiecksungleichung  $2_m$ ) folgt:

**9-6-1.** Ist  $A \supset B \supset A$ , so ist  $d(A + B) \leq d(A) + d(B)$ .

Ist  $d(A)$  endlich, so heißt die Menge  $A$  beschränkt.

**9-6-2.** Ist  $A$  beschränkt, so gibt es zu jedem  $c \in E$  eine endliche Zahl  $\delta_c$ , so daß  $a c \leq \delta_c$  für alle  $a \in A$ .

Denn ist  $b$  ein beliebiger Punkt von  $A$ , so gilt für alle  $a \in A$ :  $a c \leq c b + d(A) (= \delta_c)$ .

**9-6-21.** Gibt es ein  $c \in E$  und eine endliche Zahl  $\delta$ , so daß  $a c \leq \delta$  für alle  $a \in A$ , so ist  $A$  beschränkt.

Denn aus  $a \in A$ ,  $b \in A$  folgt dann:  $a b \leq a c + c b \leq 2\delta$ , also ist  $d(A) \leq 2\delta$ .

**9-6-3.** Ist  $A$  beschränkt und  $B \subseteq A$ , so ist auch  $B$  beschränkt.

Denn aus  $B \subseteq A$  folgt  $d(B) \leq d(A)$ .

**9-6-4.** Sind  $A$  und  $B$  beschränkt, so auch  $A + B$ .

Denn offenbar ist:

$$(6.2) \quad d(A + B) \leq d(A) + d(B) + \overline{AB}.$$

Aus 9-6-3 und 9-6-4 folgt:

**9-6-41.** Das System aller beschränkten Mengen eines metrischen Raumes ist ein  $\delta$ -Körper.

**9-6-5.** Damit die beiden (nicht leeren) Mengen  $A$  und  $B$  beschränkt seien, ist notwendig und hinreichend, daß  $d(A, B)$  endlich sei.

Notwendig: Dies folgt, da offenbar  $d(A, B) \leq d(A + B)$  ist, aus 9-6-4. Hinreichend: Ist  $a \in A$ ,  $a' \in A$ ,  $b \in B$ , so ist  $a a' \leq a b + b a'$ , also  $a a' \leq 2 d(A, B)$ , also auch  $d(A) \leq 2 d(A, B)$ ; und ebenso  $d(B) \leq 2 d(A, B)$ .

Wir definieren die Abweichung der beiden (nicht leeren) Mengen  $A$  und  $B$  durch:

$$(6.3) \quad e(A, B) = e(B, A) = \max(\sup_{a \in A} a B, \sup_{b \in B} b A).$$



Offenbar ist:

$$(6\cdot31) \quad e(A, B) \leq d(A, B).$$

Es gilt die Ungleichung:

$$(6\cdot32) \quad e(A, C) \leq e(A, B) + e(B, C);$$

denn es ist nach (4\cdot1)  $aC \leq aB + bC$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$ , also auch  $aC \leq aB + e(B, C)$ , also auch  $aC \leq aB + e(B, C)$ , also auch  $aC \leq e(A, B) + e(B, C)$ , also auch  $\sup_{a \in A} aC \leq e(A, B) + e(B, C)$ , und ebenso  $\sup_{c \in C} cA \leq e(A, B) + e(B, C)$ .

**9\cdot6\cdot6.** Sind die beiden (nicht leeren) Mengen  $A$  und  $B$  beschränkt, so ist  $e(A, B)$  endlich.

Dies folgt wegen (6\cdot31) aus 9\cdot6\cdot5.

Die Umkehrung gilt nicht; ist z. B.  $A$  die Halbgerade  $x > 0$  und  $B$  die Halbgerade  $x > 1$  des  $R_1$ , so ist  $e(A, B) = 1$ , aber  $A$  und  $B$  sind nicht beschränkt.

**7.  $\varrho$ -Netze.** Ist  $E$  ein metrischer Raum,  $B \subseteq A \subseteq E$ , und  $\varrho > 0$ , so heißt  $B$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ , wenn es zu jedem  $a \in A$  ein  $b \in B$  mit  $ab < \varrho$  gibt, während für je zwei Punkte  $b \neq b'$  von  $B$  gilt:  $bb' \geq \varrho$ .

**9\cdot7\cdot1.** Ist  $A \subset E$ , so gibt es für jedes  $\varrho > 0$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ .

Sei  $b_0$  ein beliebiger Punkt von  $A$ ; ist dann  $ab_0 < \varrho$  für alle  $a \in A$ , so ist  $\{b_0\}$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ . Anderenfalls gibt es ein  $b_1 \in A$ , so daß  $b_0b_1 \geq \varrho$ ; gilt dann für jedes  $a \in A$  eine der beiden Ungleichungen  $ab_0 < \varrho$ ,  $ab_1 < \varrho$ , so ist  $\{b_0, b_1\}$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ . Anderenfalls gibt es ein  $b_2 \in A$ , so daß  $b_0b_2 \geq \varrho$ ,  $b_1b_2 \geq \varrho$  usf. Allgemein: sei jeder Ordinalzahl  $\eta < \xi$  ein  $b_\eta \in A$  so zugeordnet, daß  $b_\eta b_{\eta'} \geq \varrho$  für  $\eta' \neq \eta''$ ; gibt es dann zu jedem  $a \in A$  ein  $\eta < \xi$ , so daß  $ab_\eta < \varrho$ , so bilden die  $b_\eta$  ( $\eta < \xi$ ) ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ . Anderenfalls gibt es ein  $b_\xi \in A$ , so daß  $b_\eta b_\xi \geq \varrho$  für alle  $\eta < \xi$ . Ist  $\aleph_\alpha$  die Mächtigkeit von  $A$ , so muß für ein  $\xi < \omega_{\alpha+1}$  der Fall eintreten, daß die  $b_\eta$  ( $\eta < \xi$ ) ein  $\varrho$ -Netz in  $A$  bilden, da wir anderenfalls zu jedem  $\eta < \omega_{\alpha+1}$  ein  $b_\eta$  erhielten, so daß  $b_\eta b_{\eta'} \geq \varrho$  für  $\eta' \neq \eta''$ , also auch  $b_{\eta'} \neq b_{\eta''}$  für  $\eta' \neq \eta''$ ; es würden also nach 8\cdot3\cdot2 die  $b_\eta$  ( $\eta < \omega_{\alpha+1}$ ) einen Teil von  $A$  der Mächtigkeit  $\aleph_{\alpha+1}$  bilden, was unmöglich, weil  $A$  nur die Mächtigkeit  $\aleph_\alpha$  hat.

**9\cdot7\cdot2.** Ist  $A \subset E$  und ist  $B$  ein  $\sigma$ -Netz in  $A$ , so gibt es zu jedem positiven  $\varrho < \sigma$  ein  $B$  enthaltendes  $\varrho$ -Netz in  $A$ .

Ist  $ab < \varrho$  für alle  $a \in A$ , so ist  $B$  selbst ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ . Anderenfalls gibt es ein  $b_0 \in A$ , so daß  $b_0b \geq \varrho$  für alle  $b \in B$ ; hat dann jedes  $a \in A$  von der Menge  $B + \{b_0\}$  einen Abstand  $< \varrho$ , so ist  $B + \{b_0\}$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ . Anderenfalls gibt es ein  $b_1 \in A$ , so daß  $b_1b_0 \geq \varrho$ ,  $b_1b \geq \varrho$  für alle  $b \in B$ ; hat

dann jedes  $a \in A$  von der Menge  $B + \{b_0, b_1\}$  einen Abstand  $< \varrho$ , so ist  $B + \{b_0, b_1\}$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ , usw. wie beim Beweise von 9.7.1.

### § 10. Offene, abgeschlossene Mengen.

**1. Offene Mengen.** Wir kehren zurück zur Betrachtung eines topologischen Raumes  $E$ ; die Punkte und Punktmengen, von denen im folgenden die Rede ist, sind also die Elemente und Teile der Menge  $E$ . Eine Menge  $E$  wird (§ 9, 1) dadurch zu einem topologischen Raum, daß ein den topologischen Axiomen genügendes System  $\mathcal{G}$  von Teilen  $G$  von  $E$  als das System der offenen Mengen erklärt ist. Wir erinnern daran, daß nach Axiom 1<sub>t</sub>)  $A$  offen ist, daß nach 9.1.1  $E$  offen ist, und daß nach 9.1.41 das Komplement jeder endlichen Menge offen ist. Wir sprechen die Axiome 3<sub>t</sub>) und 4<sub>t</sub>) als Sätze aus:

**10.1.1.** *Der Durchschnitt zweier offener Mengen ist offen.*

**10.1.2.** *Die Summe eines (endlichen oder unendlichen) Systems offener Mengen ist offen.*

Aus 10.1.1 und 10.1.2 folgt:

**10.1.21.** *Das System aller offenen Mengen eines topologischen Raumes ist ein  $\sigma$ -Ring.*

Da im  $R_1$  das Intervall  $(a, b)$  die Kugel  $K_c$  mit  $c = \frac{a+b}{2}$ ,  $\varrho = \frac{b-a}{2}$  ist, folgt aus 9.2.3, daß jedes Intervall  $(a, b)$  eine offene Menge des  $R_1$  ist. Aus 10.1.2 folgt dann weiter, daß auch jede Halbgerade  $x > a$  ( $x < a$ ) eine offene Menge des  $R_1$  ist.

**2. Abgeschlossene Mengen.** Eine Punktmenge  $F$  heißt abgeschlossen, wenn ihr Komplement  $-F$  offen ist. Da  $A$  offen ist, ist  $E$  abgeschlossen; da  $E$  offen ist, ist  $A$  abgeschlossen; da das Komplement jeder endlichen Menge offen ist, ist jede endliche Menge abgeschlossen. Aus 10.1.1 und 10.1.2 folgt durch Übergang zu den Komplementen nach § 2 (1.8):

**10.2.1.** *Die Summe zweier abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

**10.2.2.** *Der Durchschnitt eines (endlichen oder unendlichen) Systems abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen.*

Aus 10.2.1 und 10.2.2 folgt:

**10.2.21.** *Das System aller abgeschlossenen Mengen eines topologischen Raumes ist ein  $\delta$ -Ring.*

Ist  $E$  ein metrischer Raum,  $a \in E$ , und  $\varrho \geq 0$ , so heißt die Menge  $\{x \mid a \leq \varrho\}$  die abgeschlossene Kugel vom Mittelpunkt  $a$  und Radius  $\varrho$ , in Zeichen

$\bar{K}_{a_\rho}$ ; ist  $A \subset B \subseteq E$ , so heißt die Menge  $[\not\equiv B \leq \rho]$  die abgeschlossene Umgebung  $\rho$  der Menge  $B$ , in Zeichen  $\bar{U}_{B_\rho}$ . Aus 9.4.2 folgt, weil das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist:

**10.2.3.** In einem metrischen Raume ist jede abgeschlossene Umgebung  $\bar{U}_{B_\rho}$  ( $\rho \geq 0$ ) eine abgeschlossene Menge.

Insbesondere für  $B = \{a\}$ :

**10.2.31.** In einem metrischen Raume ist jede abgeschlossene Kugel  $\bar{K}_{a_\rho}$  ( $\rho \geq 0$ ) eine abgeschlossene Menge.

Aus 9.4.1 folgt:

**10.2.4.** Ist  $E$  ein metrischer Raum und  $A \subset B \subseteq E$ , so ist für jedes  $\rho > 0$  die Menge  $[\not\equiv B \geq \rho]$  abgeschlossen.

Nach 10.2.31 ist jedes Intervall  $[a, b]$  eine abgeschlossene Menge des  $R_1$ . Als Komplement der offenen Menge  $x < a$  (bzw.  $x > a$ ) ist jede Halbgerade  $x \geq a$  ( $x \leq a$ ) eine abgeschlossene Menge des  $R_1$ .

Literatur: Der Begriff der abgeschlossenen Menge stammt von G. Cantor, Math. Ann. 23 (1884) S. 470. Die Bezeichnung „offene Menge“ ist erst neuerdings üblich geworden.

**3. Innere Punkte. Offener Kern.** Der Punkt  $a$  heißt innerer Punkt der Menge  $A$ , wenn es eine Umgebung  $U_a$  (d. h. (§ 9, 1) eine  $a$  enthaltende offene Menge) gibt, die  $\subseteq A$  ist.

**10.3.1.** Ist  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit  $a$  innerer Punkt von  $A$  sei, notwendig und hinreichend, daß es ein  $\rho > 0$  gebe, so daß  $K_{a_\rho} \subseteq A$ .

Notwendig: Sei  $U_a \subseteq A$ ; nach Definition der offenen Mengen eines metrischen Raumes (§ 9, 2) gibt es ein  $\rho > 0$ , so daß  $K_{a_\rho} \subseteq U_a$ ; dann ist auch  $K_{a_\rho} \subseteq A$ . Hinreichend: Nach 9.2.3 ist  $K_{a_\rho}$  selbst eine Umgebung  $U_a$ .

Wir bezeichnen die Menge aller inneren Punkte von  $A$  mit  $A_i$ . Dann ist  $A_i \subseteq A$ , und es gilt:

**10.3.2.** Ist  $B \subseteq A$ , so  $B_i \subseteq A_i$ .

**10.3.3.**  $(A B)_i = A_i B_i$ .

Denn ist  $U_{1a} \subseteq A$ ,  $U_{2a} \subseteq B$ , so ist  $U_{1a} U_{2a} \subseteq A B$ , und nach 10.1.1 ist auch  $U_{1a} U_{2a}$  eine Umgebung von  $a$ . Also ist  $A_i B_i \subseteq (A B)_i$ ; und nach 10.3.2 ist  $(A B)_i \subseteq A_i$ ,  $(A B)_i \subseteq B_i$ , also auch  $(A B)_i \subseteq A_i B_i$ .

**10.3.4.**  $A_i$  ist die Summe aller offenen Mengen  $G \subseteq A$ .

Sei  $G$  offen und  $\subseteq A$ ; jeder Punkt  $a \in G$  ist dann innerer Punkt von  $A$ , d. h. es ist  $G \subseteq A_i$ ; also ist jeder offene Teil von  $A$  auch Teil von  $A_i$ . Sei umgekehrt  $a \in A_i$ ; dann ist  $a$  innerer Punkt von  $A$ , d. h. es gibt eine offene

Menge  $G \subseteq A$ , so daß  $a \in G$ ; jeder Punkt von  $A_i$  ist also auch Punkt eines offenen Teiles von  $A$ . Damit ist 10-3-4 bewiesen.

In 10-3-4 ist enthalten:

**10-3-41.** Jede offene Menge  $G \subseteq A$  ist auch  $\subseteq A_i$ .

Aus 10-3-4 und 10-1-2 folgt:

**10-3-5.** Bei beliebigem  $A$  ist  $A_i$  offen.

Aus 10-3-41 und 10-3-5 entnimmt man:  $A_i$  ist der größte offene Teil von  $A$ . Drum heißt  $A_i$  der offene Kern von  $A$ .

**10-3-6.** Damit  $A$  offen sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A = A_i$ , d. h. daß jeder Punkt von  $A$  innerer Punkt von  $A$  sei.

Dies folgt aus 10-3-41 zusammen mit  $A_i \subseteq A$ , und aus 10-3-5.

**4. Häufungspunkte.** Der Punkt  $a$  heißt Häufungspunkt der Menge  $A$ , wenn zu jeder Umgebung  $U_a$  unendlich viele Punkte von  $A$  gehören.

**10-4-1.** Ist  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit  $a$  Häufungspunkt von  $A$  sei, notwendig und hinreichend, daß für jedes  $\varrho > 0$  zu  $K_{a\varrho}$  unendlich viele Punkte von  $A$  gehören.

Notwendig: Nach 9-2-3 ist  $K_{a\varrho}$  eine Umgebung  $U_a$ . Hinreichend: Da  $a$  innerer Punkt von  $U_a$ , gibt es nach 10-3-1 ein  $K_{a\varrho} \subseteq U_a$ .

**10-4-2.** Damit  $a$  Häufungspunkt von  $A$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede reduzierte Umgebung  $U'_a$  mindestens einen Punkt von  $A$  enthält.

Notwendig: ist trivial. Hinreichend: Sei  $a$  nicht Häufungspunkt von  $A$ ; dann gibt es eine Umgebung  $U_a$ , die nur endlich viele von  $a$  verschiedene Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_n$  von  $A$  enthält. Nach 9-1-41 ist  $U_a - \{a, a_1, a_2, \dots, a_n\}$  offen, also eine reduzierte Umgebung von  $a$ , die keinen Punkt von  $A$  enthält.

Analog wie 10-4-1 beweist man nun:

**10-4-21.** Ist  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit  $a$  Häufungspunkt von  $A$  sei, notwendig und hinreichend, daß die reduzierte Kugel  $K'_{a\varrho}$  für jedes  $\varrho > 0$  mindestens einen Punkt von  $A$  enthält.

**10-4-3.** Ist  $a$  Häufungspunkt von  $A$  und gibt es eine Umgebung  $U_{1a}$  von  $a$ , so daß  $A \cap U_{1a} \subseteq B$ , so ist  $a$  auch Häufungspunkt von  $B$ .

Denn ist  $U_a$  eine beliebige Umgebung von  $a$ , so ist auch  $U_a \cap U_{1a}$  eine Umgebung von  $a$ , also enthält  $U_a \cap U_{1a}$  unendlich viele Punkte von  $A$ , mithin auch von  $B$ ; also enthält auch  $U_a$  unendlich viele Punkte von  $B$ .

Wir bezeichnen die Menge aller Häufungspunkte von  $A$  mit  $A^1$ . Es muß nicht  $A^1 \subseteq A$  sein; Beispiel im  $R_1$ : ist  $A = (a, b)$ , so ist  $A^1 = [a, b]$ .

Aus 10-4-3 folgt:

**10-4-4.** Ist  $A \subseteq B$ , so  $A^1 \subseteq B^1$ .

$$10\cdot4\cdot5. \quad (A + B)^1 = A^1 + B^1.$$

In der Tat, nach 10·4·4 ist  $A^1 \subseteq (A + B)^1$ ,  $B^1 \subseteq (A + B)^1$ , also auch  $A^1 + B^1 \subseteq (A + B)^1$ . Bleibt zu zeigen, daß auch  $(A + B)^1 \subseteq A^1 + B^1$ . Sei  $a \sim \varepsilon A^1$ ,  $a \sim \varepsilon B^1$ ; dann gibt es nach 10·4·2 reduzierte Umgebungen  $U'_{1a}$ ,  $U'_{2a}$ , so daß  $U'_{1a} A = A$ ,  $U'_{2a} B = A$ ; dann ist  $U'_{1a} U'_{2a}$  eine reduzierte Umgebung von  $a$ , für die  $U'_{1a} U'_{2a} (A + B) = A$ ; nach 10·4·2 ist also  $a \sim \varepsilon (A + B)^1$ . Aus  $a \sim \varepsilon A^1$ ,  $a \sim \varepsilon B^1$  folgt also  $a \sim \varepsilon (A + B)^1$ , d. h. es ist  $(A + B)^1 \subseteq A^1 + B^1$ , w. z. b. w.

10·4·6. Bei beliebigem  $A$  ist  $A^1$  abgeschlossen.

Es ist zu zeigen, daß das Komplement  $-A^1$  von  $A^1$  offen ist. Sei also  $a \varepsilon (-A^1)$ , d. h.  $a \sim \varepsilon A^1$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U_a$ , die nicht unendlich viele Punkte von  $A$  enthält. Für jedes  $b \varepsilon U_a$  ist aber  $U_a$  auch eine Umgebung  $U_b$ , die nicht unendlich viele Punkte von  $A$  enthält; für  $b \varepsilon U_a$  ist also  $b \sim \varepsilon A^1$ , d. h.  $U_a \subseteq (-A^1)$ , d. h.  $a$  ist innerer Punkt von  $-A^1$ , d. h. nach 10·3·6:  $-A^1$  ist offen, w. z. b. w.

10·4·7. Ist  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes und  $B$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ , so ist  $B^1 = A$ .

Dies folgt unmittelbar aus 10·4·1.

5. Abgeschlossene Hülle. Nach 10·2·2 ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen  $\supseteq A$  selbst abgeschlossen. Wir bezeichnen ihn mit  $A^0$  und nennen ihn die abgeschlossene Hülle von  $A$ . Es ist also  $A^0$  die kleinste abgeschlossene Menge  $\supseteq A$ ; mithin:

10·5·1. Jede abgeschlossene Menge  $F \supseteq A$  ist auch  $\supseteq A^0$ .

Da die abgeschlossenen Mengen  $\supseteq A$  und die offenen Mengen  $\subseteq (-A)$  Komplemente voneinander sind, folgt aus 10·3·4 nach § 2 (1·8):

$$10\cdot5\cdot11. \quad A^0 = -(-A)_i.$$

Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$10\cdot5\cdot2. \quad \text{Ist } B \subseteq A, \text{ so } B^0 \subseteq A^0.$$

Wegen 10·5·11 folgt aus 10·3·3 durch Komplementbildung:

$$10\cdot5\cdot3. \quad (A + B)^0 = A^0 + B^0.$$

10·5·4. Damit  $a \varepsilon A^0$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Umgebung  $U_a$  mindestens einen Punkt von  $A$  enthält.

Denn nach 10·5·11 ist  $a \varepsilon A^0$  gleichbedeutend mit  $a \sim \varepsilon (-A)_i$ , d. h. es gibt kein  $U_a \subseteq (-A)$ , d. h. jedes  $U_a$  enthält mindestens einen Punkt von  $A$ .

10·5·41. Ist  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes, so ist, damit  $a \varepsilon A^0$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $K_{a\varrho}$  für jedes  $\varrho > 0$  mindestens einen Punkt von  $A$  enthält.

Der Beweis ist analog dem von 10.4.1.

**10.5.411.** Ist  $G$  offen, so ist  $A^0 G \subseteq (A G)^0$ .

Sei  $a \in A^0 G$  und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ ; dann ist auch  $G U_a$  eine Umgebung von  $a$ ; nach 10.5.4 gibt es also ein  $a' \in A G U_a$ ; d. h. in jeder Umgebung  $U_a$  gibt es einen Punkt von  $A G$ , also ist nach 10.5.4  $a \in (A G)^0$ .

**10.5.42.**  $A^0 = A + A^1$ .

Ist  $a \in A + A^1$ , so enthält jedes  $U_a$  mindestens einen Punkt von  $A$ , und nach 10.5.4 ist  $a \in A^0$ ; also ist  $A + A^1 \subseteq A^0$ . Bleibt zu zeigen:  $A^0 \subseteq A + A^1$ , d. h. ist  $a \in A^0$  und  $a \sim \varepsilon A$ , so ist  $a \in A^1$ . Sei also  $a \in A^0$ ,  $a \sim \varepsilon A$ ; nach 10.5.4 enthält jede Umgebung  $U_a$  einen Punkt von  $A$ , und da  $a \sim \varepsilon A$ , enthält auch jede reduzierte Umgebung  $U'_a$  einen Punkt von  $A$ ; also ist nach 10.4.2:  $a \in A^1$ , w. z. b. w.

**10.5.5.** Ist  $E$  ein metrischer Raum und  $A \subset A \subseteq E$ , so ist  $A^0 = [\not\in A = 0]$ .

Aus 10.2.3 erhält man für  $\varrho = 0$ :  $[\not\in A = 0]$  ist eine abgeschlossene Menge  $\supseteq A$ ; also ist nach 10.5.1:  $[\not\in A = 0] \supseteq A^0$ . Bleibt zu zeigen:  $[\not\in A = 0] \subseteq A^0$ . Sei  $a \sim \varepsilon A^0$ ; dann gibt es nach 10.5.41 ein  $\varrho > 0$ , so daß  $A K_{a\varrho} = A$ ; dann aber ist  $a A \geq \varrho > 0$ , also  $a \sim \varepsilon [\not\in A = 0]$ . Aus  $a \sim \varepsilon A^0$  folgt also  $a \sim \varepsilon [\not\in A = 0]$ , d. h.  $[\not\in A = 0] \subseteq A^0$ , w. z. b. w.

**10.5.6.** Damit  $A$  abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A = A^0$ .

Notwendig. Ist  $A$  abgeschlossen, so ist nach 10.5.1  $A \supseteq A^0$ , und nach Definition ist  $A \subseteq A^0$ . Hinreichend: Nach Definition ist  $A^0$  abgeschlossen.

Aus 10.5.42 und 10.5.6 folgt:

**10.5.61.** Damit  $A$  abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A^1 \subseteq A$ , d. h. daß  $A$  alle seine Häufungspunkte enthält.

Aus 10.5.5 und 10.5.6 folgt:

**10.5.62.** Ist  $A \supset A$  eine abgeschlossene Punktmenge eines metrischen Raumes und ist  $a \sim \varepsilon A$ , so ist  $a A > 0$ .

**10.5.7.**  $(A^0)^1 = A^1$ .

In der Tat, aus 10.5.42 und 10.4.5 folgt:  $(A^0)^1 = A^1 + (A^1)^1$ ; da  $A^1$  nach 10.4.6 abgeschlossen, ist hierin nach 10.5.61:  $(A^1)^1 \subseteq A^1$ , also ist  $(A^0)^1 = A^1$ .

Die abgeschlossene Hülle einer offenen Menge heißt ein Stück. Der Raum  $E$  selbst, ebenso  $A$  ist ein Stück. Im  $R_1$  ist jedes Intervall  $[a, b]$ , jede Halbgerade  $x \geq a$  ( $x \leq a$ ) ein Stück.

**10.5.8.** Sind  $A$  und  $B$  Stücke, so auch  $A + B$ .

Nach Definition ist  $A = G^0$ ,  $B = H^0$ , wo  $G, H$  offen. Nach 10.5.3 ist  $A + B = G^0 + H^0 = (G + H)^0$ , wo  $G + H$  nach 10.1.2 offen.

**10-5-9.** *Damit  $A$  ein Stück sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A = (A_i)^0$ .*

Notwendig: Nach Annahme ist  $A = G^0$ , wo  $G$  offen. Wegen  $G \subseteq G^0$  ist dann  $G \subseteq A$ , also nach 10-3-41 auch  $G \subseteq A_i$ , also nach 10-5-2  $G^0 \subseteq (A_i)^0$ , d. h.  $A \subseteq (A_i)^0$ . Bleibt zu beweisen:  $(A_i)^0 \subseteq A$ . Aus  $A_i \subseteq A$  folgt nach 10-5-2  $(A_i)^0 \subseteq A^0$ ; weil  $A$  abgeschlossen, ist nach 10-5-6  $A^0 = A$ , also ist  $(A_i)^0 \subseteq A$ , w. z. b. w. Hinreichend. Dies folgt aus 10-3-5.

Literatur: Die Bezeichnung „abgeschlossene Hülle“ stammt von C. Carathéodory. Axiomatische Untersuchung: C. Kuratowski, Fund. math. 3 (1922) S. 182.

**6. Rand, Begrenzung.** Wir bezeichnen nun die Menge  $A_r = A - A_i$ , als den Rand von  $A$ , jeden Punkt  $a \in A_r$  als einen Randpunkt von  $A$ . Nach 10-5-11 ist  $A_r = A - A^0$ . Es ist  $A_r \subseteq A$ . Für jede Menge  $A$  gilt die Zerlegung:

$$(6) \quad A = A_r + A_i \quad (A_r A_i = \emptyset).$$

Die offenen Mengen sind nach 10-3-6 charakterisiert durch  $A_r = \emptyset$ . Die Mengen, für die  $A_i = A$ , d. h.  $A_r = \emptyset$  ist, heißen Randmengen; die Randmengen sind also die Mengen ohne innere Punkte, oder was dasselbe heißt: die Mengen ohne offenen Teil  $\supset A$ .  $A$  ist eine Randmenge (und zwar die einzige offene Randmenge); im  $R_n$  ist die Menge aller rationalen, sowie die Menge aller irrationalen Punkte eine Randmenge. Zuzufolge 10-3-2 gilt:

**10-6-1.** *Aus  $B \subseteq A$  folgt  $B A_r \subseteq B_r$ .*

Ist hierin insbesondere  $A$  Randmenge, also  $A = A_r$ , so wird hieraus  $B = A B \subseteq B_r$ , also weil  $B_r \subseteq B$  ist:  $B = B_r$ , d. h.:

**10-6-2.** *Jeder Teil einer Randmenge ist eine Randmenge.*

**10-6-3.** *Bei beliebigem  $A$  ist  $A_r$  eine Randmenge.*

In der Tat, 10-6-1 ergibt für  $B = A_r$ :  $A_r \subseteq A_{rr}$ , und da  $A_{rr} \subseteq A_r$  ist:  $A_r = A_{rr}$ .

Sei  $A$  eine beliebige Punktmenge. Wenden wir auf  $A$  und  $-A$  die Zerlegung (6) an, so erhalten wir, indem wir  $A_r + (-A)_r = A_g$  setzen, folgende Zerlegung des Raumes:

$$(6-1) \quad E = A_i + (-A)_i + A_g.$$

Die Punkte  $a$  von  $A_i$  sind die inneren Punkte von  $A$ ; sie waren charakterisiert durch: es gibt ein  $U_a \subseteq A$ . Die Punkte  $a$  von  $(-A)_i$  sind die inneren Punkte von  $-A$ ; wir nennen sie auch die äußeren Punkte von  $A$ ; sie sind charakterisiert durch: es gibt eine zu  $A$  fremde Umgebung  $U_a$ . Die Menge  $A_g$  heißt die Begrenzung von  $A$ , ihre Punkte  $a$  heißen Begrenzungspunkte

von  $A$ ; sie sind charakterisiert durch: jede Umgebung  $U_a$  enthält Punkte von  $A$  und Punkte von  $-A$ . Offenbar ist:

$$(6.2) \quad A_g = (-A)_g.$$

**10-6-4.** Bei beliebigem  $A$  ist  $A_g$  abgeschlossen.

Denn nach (6.1) ist  $A_g$  das Komplement der offenen Menge  $A_i + (-A)_i$ .

Man beweist leicht die Formeln:

$$(6.3) \quad \begin{aligned} A_r &= A A_g; & A^0 &= A + A_g; \\ A^0 &= A + (-A)_r; & (-A)^0 &= (-A) + A_r. \end{aligned}$$

Aus den beiden letzten folgt durch Durchschnittsbildung:

$$(6.4) \quad A^0 (-A)^0 = A_r + (-A)_r = A_g.$$

Die offenen Mengen sind charakterisiert durch  $A A_g = A$ , die abgeschlossenen durch  $A_g \subseteq A$ ; d. h. die offenen Mengen sind diejenigen, die keinen Begrenzungspunkt enthalten, die abgeschlossenen die, die sämtliche Begrenzungspunkte enthalten; daher rühren auch die Bezeichnungen „offen“ und „abgeschlossen“. Aus der ersten Formel (6.3) folgt nun:

**10-6-5.** Damit  $A$  abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_r = A_g$ .

**7. Die  $G_\delta$ - und  $F_\sigma$ -Mengen.** Wir bezeichnen jede Menge, die Durchschnitt einer Folge offener Mengen ist, als eine  $G_\delta$ -Menge, oder kurz als ein  $G_\delta$ , jede Menge, die Summe einer Folge abgeschlossener Mengen ist, als eine  $F_\sigma$ -Menge oder ein  $F_\sigma$ . Jede offene Menge ist auch ein  $G_\delta$ , jede abgeschlossene Menge ein  $F_\sigma$ . Jede abzählbare Menge ist ein  $F_\sigma$ , weil jede Menge  $\{a\}$  abgeschlossen ist; z. B. ist nach 5.1.44 im  $R_n$  die Menge der rationalen Punkte ein  $F_\sigma$ .

**10-7-1.** Das Komplement eines  $G_\delta$  ist ein  $F_\sigma$ , das Komplement eines  $F_\sigma$  ist ein  $G_\delta$ .

Dies folgt, weil die offenen und abgeschlossenen Mengen Komplemente voneinander sind, aus § 2 (1.8).

Aus 10-7-1 folgt, daß im  $R_n$  die Menge der irrationalen Punkte ein  $G_\delta$  ist.

**10-7-2.** Das System aller  $G_\delta$ -Mengen eines topologischen Raumes ist ein  $\delta$ -Ring, das der  $F_\sigma$ -Mengen ein  $\sigma$ -Ring.

Dies folgt vermöge 3-5-1 aus 10-1-21 und 10-2-21.

**10-7-3.** Jedes  $G_\delta$  ist Durchschnitt einer monoton abnehmenden Folge offener Mengen, jedes  $F_\sigma$  Summe einer monoton wachsenden Folge abgeschlossener Mengen.

Dies folgt vermöge 3-5-2 aus 10-1-21 und 10-2-21.



**10-7-4.** Ist  $A \supset A$  eine abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes und  $(\varrho_v)$  eine Folge positiver Zahlen mit  $\varrho_v \rightarrow 0$ , so ist  $A = \bigcap_{v=1}^{\infty} U_{A, \varrho_v}$ .

Da offenbar  $\bigcap_{v=1}^{\infty} U_{A, \varrho_v} = \{x \mid x \in A\}$  ist, folgt dies aus 10-5-5 und 10-5-6.

**10-7-41.** Jede abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes ist ein  $G_\delta$ , jede offene ein  $F_\sigma$ .

Die erste Hälfte folgt aus 10-7-4 wegen 9-4-1, die zweite folgt sodann aus 10-7-1.

Literatur: Die  $G_\delta$ - und  $F_\sigma$ -Mengen wurden zuerst von W. H. Young näher untersucht (W. H. Young and Gr. Chisholm Young, The theory of sets of points, Cambridge 1906, S. 63ff.); die Bezeichnung stammt von F. Hausdorff. Über  $G_\delta$ -Mengen vgl. auch W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 106.

**8. Offen, abgeschlossen als Relativbegriffe.** Seien  $A$  und  $B$  Punktmengen im topologischen Raume  $E$  und  $A \subseteq B$ . Als Teil des topologischen Raumes  $E$  ist  $B$  selbst ein topologischer Raum (§ 9, 1). Die Frage, ob  $A$  aufgefaßt als Punktmenge in  $B$  offen ist, ist dann verschieden von der Frage, ob  $A$  aufgefaßt als Punktmenge in  $E$  offen ist; denn die offenen Mengen des Raumes  $B$  sind (§ 9, 1) die Durchschnitte der offenen Mengen des Raumes  $E$  mit  $B$ , und es kann sehr wohl  $A$  Durchschnitt einer offenen Menge des Raumes  $E$  mit  $B$  sein, ohne selbst eine offene Menge des Raumes  $E$  zu sein; z. B. ist  $B$  selbst als Punktmenge des Raumes  $B$  betrachtet immer offen, auch wenn es als Punktmenge in  $E$  nicht offen ist. Der Begriff „offen“ (und daher auch der Begriff „abgeschlossen“) drückt also eine Relation zwischen einer Punktmenge  $A$  und einem  $A$  enthaltenden topologischen Raume aus; nur wo kein Zweifel besteht, welcher Raum gemeint ist, muß dieser Raum nicht eigens genannt werden; anderenfalls sagen wir: „ $A$  ist offen (abgeschlossen) in  $B$ “, wenn  $B$  der Raum ist, relativ zu dem  $A$  offen (abgeschlossen) ist. Beispiele:  $[0,1]$  ist offen in der Halbgeraden  $x \geq 0$ , im  $R_1$  aber nicht;  $(0,1]$  ist abgeschlossen in der Halbgeraden  $x > 0$ , im  $R_1$  aber nicht. Jede Punktmenge  $A$  ist offen (abgeschlossen) in  $A$ .

Im folgenden denken wir uns einen topologischen Raum  $E$  zugrunde gelegt, auf den sich die Begriffe „offen“, „abgeschlossen“, „offener Kern“, „abgeschlossene Hülle“ usw. beziehen, wenn nichts anderes gesagt ist; alle in den folgenden Sätzen auftretenden Mengen sind Punktmengen in  $E$ .

**10-8-1.** Die in  $B$  offenen (abgeschlossenen) Mengen sind die Durchschnitte der offenen (abgeschlossenen) Mengen mit  $B$ .

Für die in  $B$  offenen Mengen ist dies die Definition des topologischen<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Ist der zugrunde gelegte Raum  $E$  ein metrischer Raum, so verläuft der Beweis so: Ist  $A$  offen in  $B$  und  $a \in A$ , so gibt es nach 10-3-6 und 10-3-1 ein

Teilraumes  $B$  von  $E$  (§ 9, 1), für die in  $B$  abgeschlossenen Mengen folgt es durch Komplementbildung.

Wegen 10-1-1, 10-2-2 folgt aus 10-8-1:

**10-8-11.** Jede in einer offenen (abgeschlossenen) Menge offene (abgeschlossene) Menge ist offen (abgeschlossen).

Wendet man 10-5-61 unter Zugrundelegung des Raumes  $B$  an, so erhält man:

**10-8-2.** Sei  $A \subseteq B$ ; damit  $A$  abgeschlossen sei in  $B$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  alle seine zu  $B$  gehörigen Häufungspunkte enthält, d. h. daß  $A^1 B \subseteq A$ .

Da nach 10-5-42  $A^0 B = A B + A^1 B$ , also wenn  $A \subseteq B$  ist:  $A^0 B = A + A^1 B$ , folgt aus 10-8-2:

**10-8-3.** Sei  $A \subseteq B$ ; damit  $A$  abgeschlossen sei in  $B$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $A = A^0 B$ .

Da  $A^0$  die kleinste abgeschlossene Menge  $\supseteq A$ , so ist  $A^0 B$  die kleinste in  $B$  abgeschlossene Menge  $\supseteq A$ ; also:

**10-8-4.** Ist  $A \subseteq B$ , so ist  $A^0 B$  die abgeschlossene Hülle von  $A$  in  $B$ . Hingegen gilt nur:

**10-8-41.** Ist  $A \subseteq B$ , so ist  $A_i B$  Teil des offenen Kernes von  $A$  in  $B$ .

Denn nach 10-8-5 ist  $A_i$  offen, also nach 10-8-1  $A_i B$  offen in  $B$ , und mithin Teil des offenen Kernes von  $A$  in  $B$ .

Keineswegs aber ist i. a.  $A_i B (=A_i)$  selbst der offene Kern von  $A$  in  $B$ : jede Menge  $A$  ist in  $A$  offen, also ihr eigener offener Kern in  $A$ , aber wenn  $A$  nicht offen, ist nicht  $A = A A_i$ .

Aus 10-8-1 folgen unmittelbar die Sätze:

**10-8-5.** Ist  $A$  offen (abgeschlossen) in  $B$  und  $B$  offen (abgeschlossen) in  $C$ , so ist auch  $A$  offen (abgeschlossen) in  $C$ .

**10-8-51.** Ist  $A \subseteq B \subseteq C$  und  $A$  offen (abgeschlossen) in  $C$ , so auch in  $B$ .

**9. Relative  $G_\delta$  und  $F_\sigma$ .** Wir nennen jede Menge, die Durchschnitt einer Folge in  $B$  offener Mengen ist, ein  $G_\delta$  in  $B$ , jede Menge, die Summe einer Folge in  $B$  abgeschlossener Mengen ist, ein  $F_\sigma$  in  $B$ .

**10-9-1.** Damit  $A$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $B$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A = M B$ , wo  $M$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ).

$\varrho_a > 0$ , so daß  $B K_{a\varrho_a} \subseteq A$ ; setzen wir  $G = \bigcup_{a \in A} K_{a\varrho_a}$ , so ist offenbar  $A = B G$ , und  $G$  ist offen nach 9-2-3 und 10-1-2. Ist umgekehrt  $A = B G$ , wo  $G$  offen, und ist  $a \in A$ , also auch  $a \in G$ , so gibt es nach 10-8-1 ein  $\varrho > 0$ , so daß  $K_{a\varrho} \subseteq G$ ; dann ist  $B K_{a\varrho} \subseteq B G$ , also ist  $B G = A$  offen in  $B$  nach 10-8-1 und 10-8-6.

Der Beweis ergibt sich ohne weiteres aus den Formeln:

$$D({}_n G_n B) = (D {}_n G_n) B; \quad S({}_n F_n B) = (S {}_n F_n) B.$$

**10.9.2.** Ist  $A$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $B$  und  $B$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $C$ , so ist  $A$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $C$ .

Denn ist  $A$  ein  $G_\delta$  in  $B$ ,  $B$  ein  $G_\delta$  in  $C$ , so ist  $A = D({}_n G_n B) = B D({}_n G_n) = D({}_m G'_m C) D({}_n G_n) = C D({}_m G'_m) D({}_n G_n)$  (wo  $G_n, G'_m$  offen). Ist  $A$  ein  $F_\sigma$  in  $B$ ,  $B$  ein  $F_\sigma$  in  $C$ , so ist (mit abgeschlossenen  $F_n, F'_m$ ):

$$A = S({}_n F_n B) = B S({}_n F_n) = S({}_m F'_m C) S({}_n F_n) = C S({}_m F'_m) S({}_n F_n) = C S({}_m, n F'_m F_n).$$

Aus 10.9.1 folgt:

**10.9.21.** Ist  $A \subseteq B \subseteq C$  und ist  $A$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $C$ , so auch in  $B$ .

## § 11. Dichte, nirgends dichte Mengen.

**1. Dichte Mengen.** Die Menge  $A$  heißt dicht, wenn —  $A$  eine Randmenge ist (§ 10, 6), d. h. wenn —  $A$  keinen inneren Punkt hat, d. h. wenn  $(-A)_i = A$ . Der Raum  $E$  ist dicht. Ist  $E \neq A$ , so ist die leere Menge nicht dicht. Im  $R_n$  ist sowohl die Menge der rationalen, wie die der irrationalen Punkte dicht.

**11.1.1.** Damit  $A$  dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A^0 = E$ . In der Tat,  $(-A)_i = A$  ist nach 10.5.11 gleichbedeutend mit  $A^0 = E$ . Aus 11.1.1 und 10.5.6 folgt:

**11.1.2.** Die einzige dichte, abgeschlossene Menge ist  $E$ .

**11.1.3.** Damit  $A$  dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede offene Menge  $G \supset A$  auch  $A \supset G$  sei.

Notwendig: Sei  $a \in G$ ; wegen  $A^0 = E$  ist  $a \in A^0$ , und nach 10.5.4 ist  $A \supset G$ . Hinreichend: Sei für jedes offene  $G \supset A$  auch  $A \supset G$ . Da  $(-A)_i$  offen und  $A(-A)_i = A$ , muß also  $(-A)_i = A$  sein, d. h.  $A$  ist dicht.

Aus 11.1.1 folgt wegen 10.5.2:

**11.1.4.** Ist  $A$  dicht und  $A \subseteq B$ , so ist auch  $B$  dicht.

Also ist die Summe dichter Mengen dicht. Für den Durchschnitt gilt dies natürlich nicht (z. B. ist im  $R_n$  die Menge der rationalen und die Menge der irrationalen Punkte dicht, ihr Durchschnitt aber ist leer, und somit nicht dicht). Hingegen gilt:

**11.1.5.** Ist  $A$  dicht,  $B$  dicht und offen, so ist auch  $AB$  dicht.

Denn nach 11.1.3 ist für jedes offene  $G \supset A$  auch  $BG \supset A$ , und da  $BG$  offen, ist nach 11.1.3 auch  $ABG \supset A$ . Also ist nach 11.1.3  $AB$  dicht.

Aus 11-1-5 folgt unmittelbar:

**11-1-51.** *Der Durchschnitt endlich vieler offener dichter Mengen ist dicht.*

**2. Nirgends dichte Mengen.** Die Menge  $A$  heißt nirgends dicht, wenn  $(-A)_i$  dicht ist. Die leere Menge ist nirgends dicht; im  $R_n$  ist die Menge der Gitterpunkte nirgends dicht.

**11-2-1.** *Damit  $A$  nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A^0$  eine Randmenge ist.*

In der Tat, die Aussage „ $A$  ist nirgends dicht“ bedeutet:  $(-A)_i$  ist dicht; das aber heißt  $-(-A)_i$  ist Randmenge; nach 10-5-11 aber ist  $-(-A)_i = A^0$ .

**11-2-11.** *Damit  $A$  nirgends dicht sei, ist notwendig, daß  $A$  eine Randmenge ist.*

Dies folgt aus 11-2-1 wegen  $A \subseteq A^0$  nach 10-6-2.

Wegen 10-5-6 folgt aus 11-2-1:

**11-2-111.** *Damit eine abgeschlossene Menge nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie eine Randmenge ist.*

Da  $A^0$  abgeschlossen, folgt aus 11-2-1 und 11-2-111:

**11-2-12.** *Damit  $A$  nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A^0$  nirgends dicht sei.*

**11-2-13.** *Damit die abgeschlossene Menge  $A$  nicht nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß es ein nicht leeres Stück  $B$  gebe, das  $\subseteq A$  ist.*

Notwendig: Ist  $A$  nicht nirgends dicht, so ist  $A$  nach 11-2-111 keine Randmenge, d. h.  $A_i \neq \Lambda$ . Weil  $A$  abgeschlossen, folgt nach 10-5-1 aus  $A_i \subseteq A$  auch  $(A_i)^0 \subseteq A$ , also ist  $(A_i)^0$  ein nicht leeres Stück  $\subseteq A$ . Hinreichend: Sei  $B$  ein nicht leeres Stück  $\subseteq A$ ; als Stück ist  $B = G^0$ , wo  $G$  offen; es ist also  $G \subseteq A$ , mithin  $G \subseteq A_i$ ; und weil  $B \neq \Lambda$ , ist auch  $G \neq \Lambda$ , mithin  $A_i \neq \Lambda$ , d. h.  $A$  ist nicht Randmenge, also nach 11-2-111 nicht nirgends dicht.

**11-2-2.** *Damit  $A$  nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jeder offenen Menge  $G \supset \Lambda$  eine offene Menge  $G' \supset \Lambda$ ,  $G' \subseteq G$  gebe, so daß  $A G' = \Lambda$ .*

Notwendig: Sei  $G \supset \Lambda$ ; wir setzen  $G' = (-A)_i G$ ; dann ist  $G'$  offen,  $G' \subseteq G$ , und weil  $(-A)_i$  dicht, ist nach 11-1-3  $G' \supset \Lambda$ ; wegen  $G' \subseteq (-A)_i$ ,  $\subseteq -A$  ist aber  $A G' = \Lambda$ . Hinreichend: Sei  $G \supset \Lambda$ ,  $\Lambda \subset G' \subseteq G$ ,  $A G' = \Lambda$ ; dann ist  $G' \subseteq (-A)$ , und weil  $G'$  offen, auch  $G' \subseteq (-A)_i$ ; es gilt also  $(-A)_i G \supseteq G'$ , und wegen  $G' \supset \Lambda$  ist  $(-A)_i G \supset \Lambda$ . Nach 11-1-3 ist also  $(-A)_i$  dicht, d. h.  $A$  ist nirgends dicht.

Aus 11.2.2 folgen die Sätze:

**11.2.21.** Eine offene Menge  $G \supset A$  ist nicht nirgends dicht.

**11.2.3.** Ist  $A$  nirgends dicht und  $B \subseteq A$ , so ist auch  $B$  nirgends dicht. Also ist der Durchschnitt nirgends dichter Mengen nirgends dicht.

**11.2.4.** Die Summe zweier (endlich vieler) nirgends dichter Mengen ist nirgends dicht.

Sind  $A, B$  nirgends dicht, so sind  $(-A)_i, (-B)_i$  dichte offene Mengen; nach 11.1.51 ist also auch  $(-A)_i, (-B)_i$  dicht, d. h. nach 10.3.3: es ist  $((-A)(-B))_i = (-(A+B))_i$  dicht, d. h.  $A+B$  ist nirgends dicht.

Aus 11.2.3 und 11.2.4 folgt:

**11.2.41.** Das System aller nirgends dichten Mengen eines topologischen Raumes ist ein  $\delta$ -Körper.

**11.2.5.** Ist  $A$  nirgends dicht, so ist  $-A$  dicht.

Denn es ist  $(-A)_i$  dicht, nach 11.1.4 also auch  $-A$ .

Die Umkehrung von 11.2.5 gilt nicht allgemein, wohl aber für abgeschlossene Mengen:

**11.2.51.** Eine abgeschlossene Menge  $A$  ist dann und nur dann nirgends dicht, wenn  $-A$  dicht.

In der Tat: „ $-A$  ist dicht“ heißt „ $A$  ist Randmenge“, und nach 11.2.111 heißt das: „ $A$  ist nirgends dicht“.

**11.2.6.** Ist der Raum  $E \neq A$ , so ist keine Menge sowohl dicht als nirgends dicht.

Denn ist  $A$  dicht, so ist  $-A$  eine Randmenge, d. h.  $(-A)_i = A$ , also ist  $(-A)_i$  nicht dicht, d. h.  $A$  ist nicht nirgends dicht.

**11.2.7.** Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $A_r$  nirgends dicht.

Weil  $A$  abgeschlossen, ist nach 10.6.5  $A_r = A$ , also ist  $A_r$  nach 10.6.4 abgeschlossen, und da  $A_r$  nach 10.6.3 eine Randmenge ist, folgt die Behauptung aus 11.2.111.

**11.2.71.** Ist  $A$  offen, so ist  $A_r$  nirgends dicht.

Denn  $-A$  ist abgeschlossen, also nach 10.6.5 und 11.2.7  $(-A)_r$  nirgends dicht, also nach § 10 (6.2) auch  $A_r$  nirgends dicht.

**3. Dicht, nirgends dicht als Relativbegriffe.** Die Begriffe „dicht“, „nirgends dicht“ sind, ebenso wie „offen“, „abgeschlossen“, Relativbegriffe: sie drücken eine Relation zwischen einer Menge  $A$  und einem topologischen Raume  $\supseteq A$  aus, der, wenn erforderlich, eigens genannt werden muß. Im folgenden ist wieder ein topologischer Raum  $E$  zugrunde gelegt, auf den sich, wenn nicht anders gesagt, die auftretenden Relativbegriffe beziehen; alle auftretenden Mengen sind Punktmengen in  $E$ .

**11.3.1.** Sei  $A \subseteq B$ ; damit  $A$  dicht sei in  $B$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $B \subseteq A^0$ .

Da  $B \subseteq A^0$  gleichbedeutend mit  $A^0 B = B$ , folgt dies aus 11.1.1 (angewendet auf den Raum  $B$ ) und 10.8.4.

**11.3.11.** Sei  $A \subseteq B$ ; damit  $A$  dicht sei in  $B$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $A^0 = B^0$ .

Notwendig: Nach 11.3.1 ist  $B \subseteq A^0$ , also auch  $B^0 \subseteq A^0$ ; wegen  $A \subseteq B$  ist auch umgekehrt  $A^0 \subseteq B^0$ . Hinreichend: Aus  $A^0 = B^0$  folgt  $B \subseteq A^0$ , und das ist hinreichend nach 11.3.1.

**11.3.12.** Jede Menge  $A$  ist dicht in  $A$  und dicht in  $A^0$ .

Das erste folgt aus 11.3.11, das zweite aus 11.3.1.

**11.3.2.** Ist  $A \subseteq A' \subseteq B' \subseteq B$ , und ist  $A$  dicht in  $B$ , so ist auch  $A'$  dicht in  $B'$ .

Denn nach 10.5.2 ist auch  $A^0 \subseteq A'^0 \subseteq B'^0 \subseteq B^0$ ; wegen 11.3.11 ist hierin  $A^0 = B^0$ , also auch  $A'^0 = B'^0$ , und die Behauptung folgt aus 11.3.11.

**11.3.21.** Ist  $A' \subseteq A \subseteq B \subseteq B'$ , und ist  $A$  nirgends dicht in  $B$ , so ist auch  $A'$  nirgends dicht in  $B'$ .

Nach 11.2.3, angewendet auf den Raum  $B'$ , genügt es zu zeigen:  $A$  ist nirgends dicht in  $B'$ . Da nach 10.8.4  $A^0 B'$  die abgeschlossene Hülle von  $A$  in  $B'$  ist, ist also nach 11.2.1 (angewendet auf den Raum  $B'$ ) zu zeigen:  $A^0 B'$  ist eine Randmenge in  $B'$ , d. h.: ist  $H$  eine in  $B'$  offene Menge  $\subseteq A^0 B'$ , so ist  $H = \Lambda$ . Aus  $H \subseteq A^0 B'$  folgt  $H B \subseteq A^0 B' B$ , also wegen  $B \subseteq B'$ :  $H B \subseteq A^0 B$ ; da nach 10.8.1  $H B$  offen in  $B$ , und  $A^0 B$  nach 11.2.1 (angewendet auf den Raum  $B$ ) eine Randmenge in  $B$ , ist  $H B = \Lambda$ ; da  $B^0 B'$  die abgeschlossene Hülle von  $B$  in  $B'$ , ist also nach 10.5.411, angewendet auf den Raum  $B'$ , auch  $H B^0 B' = \Lambda$ , d. h.  $H B^0 = \Lambda$ , und somit, wegen  $A^0 \subseteq B^0$ , auch  $H A^0 = \Lambda$ ; aus  $H \subseteq A^0 B' \subseteq A^0$  folgt also  $H = \Lambda$ , w. z. b. w.

**11.3.3.** Ist  $A$  dicht in  $B$ ,  $B$  dicht in  $C$ , so ist  $A$  dicht in  $C$ .

Denn nach 11.3.11 ist  $A^0 = B^0$ ,  $B^0 = C^0$ , also  $A^0 = C^0$ .

Aus 11.3.3 und 11.3.12 folgt:

**11.3.31.** Ist  $A$  dicht in  $B$ , so auch in  $B^0$ .

**11.3.32.** Ist  $A \subseteq B$  und nirgends dicht in  $B^0$ , so auch in  $B$ .

Nach 11.2.2 ist zu zeigen: In jeder in  $B$  offenen Menge  $B G \supset \Lambda$  gibt es eine in  $B$  offene Menge  $B G' \supset \Lambda$ , so daß  $A G' = \Lambda$ . Da  $A$  nirgends dicht in  $B^0$ , gibt es nach 11.2.2 eine offene Menge  $G'$ , so daß  $\Lambda \subset B^0 G' \subseteq B^0 G$ ,  $A G' = \Lambda$ ; wegen  $B^0 G' \subseteq B^0 G$  ist auch  $B G' \subseteq B G$ ; weil  $G'$  offen und  $B^0 G' \supset \Lambda$ , ist nach 10.5.4 auch  $B G' \supset \Lambda$ ; und da  $A G' = \Lambda$ , ist die Behauptung bewiesen.

**11.3.4.** Ist  $A_m$  dicht in  $B_m$  für jedes  $m \in M$ , so ist  $A = \bigcup_{m \in M} A_m$  dicht in  $B = \bigcup_{m \in M} B_m$ .

Wegen  $A_m \subseteq B_m$  ist  $A \subseteq B$ ; wegen 11.3.11 ist  $A_m^0 = B_m^0$ , also  $B = \bigcup_{m \in M} B_m \subseteq \bigcup_{m \in M} S B_m^0 = \bigcup_{m \in M} S A_m^0 \subseteq A^0$ ; die Behauptung folgt also aus 11.3.1.

**11.3.5.** Ist  $A B$  dicht in  $B$ , so ist  $B \subseteq A^0$ .

Denn bei Benutzung von 11.3.11 ist  $B \subseteq B^0 = (A B)^0 \subseteq A^0$ .

Die Umkehrung hiervon gilt nicht (Beispiel:  $A$  die Menge der rationalen,  $B$  die der irrationalen Punkte des  $R_n$ ). Wohl aber gilt:

**11.3.51.** Ist  $B$  eine offene Menge  $\subseteq A^0$ , so ist  $A B$  dicht in  $B$ .

Dann nach 10.5.411 ist  $(A B)^0 \supseteq A^0 B = B$ ; die Behauptung folgt also aus 11.3.1.

Nun erhalten wir neben 11.1.3 und 11.2.2 die folgenden Bedingungen dafür, daß eine Menge dicht, bzw. nirgends dicht sei.

**11.3.6.** Damit  $A$  dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A G$  dicht in  $G$  sei für jedes offene  $G$ .

Notwendig: Ist  $A$  dicht, so ist nach 11.1.1  $A^0 = E$ , also gewiß  $G \subseteq A^0$ , und die Behauptung folgt aus 11.3.51. Hinreichend: Man wähle  $G = E$ .

**11.3.61.** Damit  $A$  nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A G$  nirgends dicht in  $G$  sei für jedes offene  $G$ .

Notwendig: Sei  $C \supset A$  und offen in  $G$ , also nach 10.8.11 auch offen (in  $E$ ). Nach 11.2.2 gibt es eine offene Menge  $C' \supset A$ ,  $C' \subseteq C$ , so daß  $A C' = A$ , also auch  $A G C' = A$ . Wegen  $C' \subseteq G \subseteq E$ , ist  $C'$  nach 10.8.51 auch offen in  $G$ ; nach 11.2.2 angewendet auf den Raum  $G$  ist also  $A G$  nirgends dicht in  $G$ . Hinreichend: Man wähle  $G = E$ .

**11.3.7.** Damit  $A$  nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß es keine offene Menge  $G \supset A$  gebe, für die  $A G$  dicht in  $G$  ist.

Notwendig: Sei  $G \supset A$  und offen; nach 11.3.61 ist  $A G$  nirgends dicht in  $G$ , also nach 11.2.6 nicht dicht in  $G$ . Hinreichend: Ist die Bedingung erfüllt, so kann nach 11.3.51 keine offene Menge  $G$ , die  $\supset A$  ist,  $\subseteq A^0$  sein, d. h.  $A^0$  ist Randmenge, und nach 11.2.1 ist  $A$  nirgends dicht.

**11.3.8.** Ist  $A$  dicht in  $B$  und  $G$  offen, so ist  $A G$  dicht in  $B G$ .

Nach 11.3.1 ist  $B \subseteq A^0$ , also  $B G \subseteq A^0 G$ , also nach 10.5.411  $B G \subseteq (A G)^0$ ; nach 11.3.1 ist also  $A G$  dicht in  $B G$ .

**11.3.9.** Ist  $B$  dicht in  $C$  und  $A$  nirgends dicht in  $C$ , so ist  $A B$  nirgends dicht in  $B$ .

Nach 11.2.3 ist  $AB$  nirgends dicht in  $C$ ; da nach 11.3.1  $C \subseteq B^0$ , ist also nach 11.3.21  $AB$  auch nirgends dicht in  $B^0$ , also nach 11.3.32 auch in  $B$ .

Literatur zu § 11: Die Grundbegriffe dieses Paragraphen stammen von G. Cantor; eine eingehende Darstellung bei F. Hausdorff, Mengenlehre § 27.

## § 12. Isolierte, separierte, insichdichte Mengen.

1. Absolute Eigenschaften. Wie wir in § 10, 8 und § 11, 3 sahen, stellen die Begriffe: offen, abgeschlossen, dicht, nirgends dicht Relationen einer Menge zu einem sie umfassenden topologischen Raum dar, oder, was dasselbe heißt, Relationen eines topologischen Raumes  $A$  zu einem topologischen Raum  $E \supseteq A$ : ist  $E \supseteq A$  und  $E_1 \supseteq A$ , so kann  $A$  in  $E$  offen sein, in  $E_1$  nicht. Wir fragen nun nach Eigenschaften, die einem topologischen Raume an sich, nicht relativ zu einem anderen zukommen; wir nennen sie absolute Eigenschaften. Z. B. hat, wenn  $a \in A$ , die Aussage „ $a$  ist Häufungspunkt von  $A$ “, sowie ihre Negation, absoluten Charakter. Das hat zur Folge: fasse ich den topologischen Raum  $A$  einmal auf als Punktmenge in  $E \supseteq A$ , dann als Punktmenge in  $E_1 \supseteq A$ , und trifft unsere Aussage in einen Falle zu, so auch im anderen. Absolute Eigenschaften kommen einem topologischen Raum  $A$  an sich zu, gleichgültig in welchen topologischen Raum  $E$  ich ihn eingebettet denke. Da jede Punktmenge in einem topologischen Raume selbst ein topologischer Raum ist, so können wir absolute Eigenschaften auch von Punktmengen (nicht nur von topologischen Räumen) aussagen.

2. Isolierte Punkte. Einen Punkt von  $A$ , der nicht Häufungspunkt von  $A$  ist, nennen wir einen isolierten Punkt von  $A$ . Die Menge aller isolierten Punkte von  $A$  bezeichnen wir mit  $A_i$ ; die Menge aller Punkte von  $A$ , die Häufungspunkte von  $A$  sind, mit  $A_h$ . Es ist also:

$$(2) \quad A = A_i + A_h \quad (A_i A_h = A).$$

Da die Aussage: „Der Punkt  $a$  von  $A$  ist isolierter Punkt (ist Häufungspunkt) von  $A$ “ absoluten Charakter hat, so auch die Zerlegung (2) — im Gegensatze zur Zerlegung § 10 (6) in Rand und offenen Kern, die relativen Charakter hat, d. h. verschieden ausfallen kann, je nachdem als Teil welchen topologischen Raumes  $A$  aufgefaßt wird.

Nach Definition ist (§ 10, 4):

$$(2-1) \quad A_i = A - A^1, \quad A_h = A A^1;$$

obwohl hierin  $A^1$  relativen Charakter hat (bei verschiedener Wahl des topo-



logischen Raumes  $E \supseteq A$  verschieden ausfällt), hat  $A_j$  (und ebenso  $A_h$ ) absoluten Charakter (ist dieselbe Menge, wie immer  $E \supseteq A$  gewählt sein mag).

Ersetzen wir in (2.1)  $A$  durch  $A^0$ , und beachten, daß nach 10.5.7  $(A^0)^1 = A^1$  ist, so erhalten wir, da nach 10.5.42  $A^0 A^1 = A^1$  ist:

$$(2.11) \quad (A^0)_h = A^1.$$

Nach (2) ist also:  $A^0 = (A^0)_j + A^1$  und  $(A^0)_j A^1 = A$ ; durch Vergleich mit 10.5.42 ergibt sich daraus:  $(A^0)_j = A - A^1$ , also nach (2.1):

$$(2.111) \quad (A^0)_j = A_j.$$

Wegen (2.11), (2.111) ergibt die Zerlegung (2), angewendet auf  $A^0$ :

$$(2.2) \quad A^0 = A_j + A^1 \quad (A_j A^1 = A).$$

Aus der Definition von  $A_h$  folgt:

**12.2.1.** Ist  $A \subseteq B$ , so  $A_h \subseteq B_h$ ,  $A B_j \subseteq A_j$ .

**12.2.2.**  $(A + B)_h = (A + B)(A^1 + B^1)$ ;  $(A + B)_j = (A + B) - (A^1 + B^1)$ .

Nach (2.1) ist  $(A + B)_h = (A + B)(A + B)^1$ , also folgt die erste Gleichung aus 10.4.5, sodann die zweite durch Komplementbildung bezüglich  $A + B$ .

**12.2.3.**  $A_h$  ist abgeschlossen in  $A$ ;  $A_j$  ist offen in  $A$ .

Die erste Hälfte folgt wegen (2.1) aus 10.4.6 und 10.8.1, die zweite sodann aus (2).

Bedeutet  $E$  den zugrunde gelegten topologischen Raum, so gilt:

**12.2.4.** Ist  $a \in E_j$ , so ist die Menge  $\{a\}$  offen und ein Stück.

Denn ist  $a \in E_j$ , so gibt es nach 10.4.2 eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , die leer ist; ist aber  $U'_a = A$ , so ist  $U_a = \{a\}$ ,  $U_a$  aber ist nach Definition (§ 9, 1) offen. Da die Menge  $\{a\}$  aber auch abgeschlossen ist, so ist sie ein Stück.

**12.2.41.** Jeder Teil von  $A_j$  ist offen in  $A$ .

Dies folgt aus 12.2.4 und 10.1.2.

**12.2.5.** Eine dichte Menge enthält jeden isolierten Punkt  $a$  des Raumes.

Dies folgt aus 11.1.3, indem man dort für  $G$  die Menge  $\{a\}$  wählt.

**12.2.51.** Eine nirgends dichte Menge enthält keinen isolierten Punkt des Raumes.

Wegen 12.2.4 folgt dies aus 11.2.11.

**12.2.52.** Ist  $A$  dicht in  $B$ , so ist  $A_j = B_j$ .

Aus 12.2.5 (angewendet auf den Raum  $B$ ) folgt:  $B_j \subseteq A$ , d. h.  $B_j = A B_j$ , also nach 12.2.1:  $B_j \subseteq A_j$ . Bleibt zu zeigen  $A_j \subseteq B_j$ , oder was dasselbe

heißt:  $B_h \subseteq -A_j$ . Nach 11.3.1 ist  $B \subseteq A^0$ , also  $B^1 \subseteq (A^0)^1$ , also nach 10.5.7  $B_h \subseteq B^1 \subseteq A^1$ , also weil  $A^1 A_j = A$  ist:  $B_h \subseteq -A_j$ , w. z. b. w.

**12.2.6.** Ist  $a \in E_h$ , so ist die Menge  $\{a\}$  nirgends dicht.

Dies folgt aus 11.2.111; denn ist  $a \in E_h$ , so ist offenbar  $\{a\}$  eine Randmenge.

**3. Isolierte Mengen.** Ist  $A_h = A$ , also  $A = A_j$ , d. h. ist jeder Punkt von  $A$  isoliert, so heißt  $A$  eine isolierte Menge; dies ist gleichbedeutend mit  $A A^1 = A$ . Der Begriff „isolierte Menge“ hat absoluten Charakter.

Die leere Menge, jede endliche Menge ist isoliert; die Menge der Gitterpunkte des  $R_n$ , die Menge der Punkte  $\frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) des  $R_1$  ist isoliert.

Aus 12.2.1 folgt:

**12.3.1.** Jeder Teil einer isolierten Menge ist isoliert.

**12.3.2.** Bei beliebigem  $A$  ist  $A_j$  isoliert.

Aus  $A_j \subseteq A$  folgt nach 12.2.1:  $A_{jh} \subseteq A_h$ , und da auch  $A_{jh} \subseteq A_j$ , ist  $A_{jh} \subseteq A_h A_j$ ; wegen  $A_h A_j = A$  ist also auch  $A_{jh} = A$ , d. h.  $A_j$  ist isoliert.

**12.3.3.** In jedem unendlichen<sup>1)</sup> Raume  $E$  gibt es isolierte unendliche Mengen.

Dies ist trivial, wenn  $E$  selbst isoliert; wir nehmen also an:  $E_h \supset A$ . Sei  $a \in E_h$ . Wir definieren durch Induktion eine Folge von Punkten  $a_n$  und zwei Folgen offener Mengen  $G_n$  und  $G'_n$ : 1.  $a_1$  sei ein beliebiger Punkt  $\neq a$ , und  $G_1, G'_1$  seien zwei fremde offene Mengen, so daß  $a \in G_1, a_1 \in G'_1$  (§ 9, 1, Axiom 5<sub>4</sub>). 2. Seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  (unter einander und von  $a$  verschieden) gegeben, seien ferner  $G_n, G'_n$  zwei fremde offene Mengen, so daß  $a \in G_n, a_i \in G'_n$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); da  $a \in E_h$ , gibt es in  $G_n$  einen Punkt  $\neq a$ ; einen solchen wählen wir für  $a_{n+1}$ ; sodann seien  $H_n, H'_n$  zwei fremde offene Mengen, so daß  $a \in H_n, a_{n+1} \in H'_n$ , und sei  $G_{n+1} = G_n H_n, G'_{n+1} = G'_n + H'_n$ ; dann sind auch  $G_{n+1}, G'_{n+1}$  zwei fremde offene Mengen, und es ist  $a \in G_{n+1}, a_i \in G'_{n+1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n+1$ ). Die so gebildete Menge  $A$  der Punkte  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist isoliert; denn da  $a_n \in G'_n, a_i \in G'_n$  ( $i > n$ ) und  $G_n G'_n = A$ , kann  $a_n$  nicht Häufungspunkt von  $A$  sein.

Aus 10.4.7 folgt unmittelbar:

**12.3.4.** Ist  $A$  eine metrische Menge und  $B$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ , so ist  $B$  isoliert.

**12.3.41.** Sind  $A_1$  und  $A_2$  metrische Mengen, ist  $B_1$  ein  $\varrho_1$ -Netz in  $A_1$  und  $B_2$  ein  $\varrho_2$ -Netz in  $A_2$ , so ist  $B_1 + B_2$  isoliert.

Nach 10.4.7 ist  $B_1^1 = A_1, B_2^1 = A_2$ , also nach 10.4.5 auch  $(B_1 + B_2)^1 = A$ .

<sup>1)</sup> d. h. aus unendlich vielen Punkten bestehenden.

**4. Insichdichte Mengen.** Ist  $A_j = A$ , also  $A = A_h$ , d. h. ist jeder Punkt von  $A$  Häufungspunkt, so heißt  $A$  insichdicht<sup>1)</sup>; dies ist gleichbedeutend mit  $A \subseteq A^1$ , sowie mit  $A^0 = A^1$ . Der Begriff „insichdicht“ hat absoluten Charakter. Die leere Menge, jede Halbgerade, jedes Intervall des  $R_1$ , der  $R_n$ , die Menge aller rationalen, die Menge aller irrationalen Punkte des  $R_n$  ist insichdicht. Aus 12.2.1 folgt:

**12.4.1.** *Die Summe eines (endlichen oder unendlichen) Systemes insichdichter Mengen ist insichdicht.*

**12.4.2.** *Eine offene Menge  $G$ , die keinen isolierten Punkt des Raumes  $E$  enthält, ist insichdicht.*

Sei in der Tat  $a \in G$ ,  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ ; dann ist auch  $U_a G$  eine Umgebung von  $a$ , und da  $a$  Häufungspunkt von  $E$ , besteht  $U_a G$  aus unendlich vielen Punkten, daher enthält  $U_a$  unendlich viele Punkte von  $G$ , und  $a$  ist Häufungspunkt von  $G$ .

**12.4.21.** *Jede in einer insichdichten Menge  $B$  offene Menge ist insichdicht.*

Dies ist ein Spezialfall von 12.4.2; man hat nur in 12.4.2 für  $E$  die Menge  $B$  zu wählen.

**12.4.3.** *Ist  $A$  dicht in  $B$ , so ist, damit  $A$  insichdicht sei, notwendig und hinreichend, daß  $B$  insichdicht ist.*

Dies ist ein Spezialfall von 12.2.52.

Da nach 11.8.12  $A$  dicht in  $A^0$ , folgt daraus:

**12.4.31.** *Damit  $A$  insichdicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A^0$  insichdicht sei.*

**12.4.32.** *Ist  $A$  insichdicht und  $A \subseteq B \subseteq A^0$ , so ist auch  $B$  insichdicht.*

Denn aus  $A \subseteq B \subseteq A^0$  folgt  $A^0 = B^0$ ; ist nun  $A$  insichdicht, so nach 12.4.31 auch  $A^0$ , also auch  $B^0$ , also nach 12.4.31 auch  $B$ .

**12.4.4.**  *$A - (A_j)^0$  ist insichdicht.*

Wir setzen  $A - (A_j)^0 = B$ ,  $-(A_j)^0 = G$ ; dann ist  $G$  offen und  $B \subseteq A_h$ , d. h. jeder Punkt von  $B$  ist Häufungspunkt von  $A$ ; da aber  $A G = B = B G$ , ist nach 10.4.8 jeder Punkt von  $B$  auch Häufungspunkt von  $B$ , d. h.  $B$  ist insichdicht.

**12.4.5.** *Ist  $A$  insichdicht,  $B$  isoliert, so ist  $A \subseteq (A - B)^1$ .*

Andernfalls gäbe es ein  $a \in A$ , so daß  $a \sim \varepsilon (A - B)^1$ . Nach 10.4.2 gäbe es dann eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , so daß  $(A - B) U'_a = \Lambda$ , d. h.  $A U'_a \subseteq B$ ; nach 12.3.1 wäre also  $A U'_a$  isoliert. Das aber ist unmöglich, denn nach 12.4.21 ist  $A U'_a$  insichdicht, und nach 10.4.2 ist  $A U'_a \supset \Lambda$ .

<sup>1)</sup> In einem Worte zu schreiben: Jede Menge  $A$  ist dicht in  $A$ , also dicht in sich; aber keineswegs ist jede Menge insichdicht.

**12.4.6.** Ist  $A$  eine *insichdichte metrische Menge*, so gibt es ein  $B \subseteq A$ , so daß sowohl  $B$  als  $A - B$  *dicht* in  $A$ .

Dies ist trivial, wenn  $A = \Lambda$ ; sei also  $A \supset \Lambda$ . Nach 9.7.1 gibt es in  $A$  ein 1-Netz  $B_1$ ; da  $A$  *insichdicht*,  $B_1$  nach 12.3.4 *isoliert*, ist  $A - B_1 \supset \Lambda$ . Sei  $B_2$  ein  $\frac{1}{2}$ -Netz in  $A - B_1$ ; da  $B_1 + B_2$  nach 12.3.41 *isoliert*, ist  $A - (B_1 + B_2) \supset \Lambda$ .

Sei  $B_3$  ein  $\frac{1}{3}$ -Netz in  $A - (B_1 + B_2)$  usw. Wir setzen  $B = \bigcup_n B_{2n}$ ; dann gilt:  $A - B \supseteq \bigcup_n B_{2n-1}$ . Ist dann  $a \in A$  und  $\varrho > 0$ , so ist  $K_{a\varrho} B_n \supset \Lambda$  für

$n > \frac{1}{\varrho}$ ; denn nach 12.4.5 ist  $a \in (A - (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1}))^1$ , nach

10.4.1 gibt es also ein  $a' \in A - (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1})$ , so daß

$a a' < \varrho - \frac{1}{n}$ , und weil  $B_n$  ein  $\frac{1}{n}$ -Netz in  $A - (B_1 + B_2 + \dots + B_{n-1})$

ist, gibt es ein  $b \in B_n$ , so daß  $a' b < \frac{1}{n}$ ; aus  $a a' < \varrho - \frac{1}{n}$ ,  $a' b < \frac{1}{n}$  folgt

aber  $a b < \varrho$ , also ist  $K_{a\varrho} B_n \supset \Lambda$ , wie behauptet. Nach 10.5.41 folgt daraus:  $A \subseteq B^0$ ,  $A \subseteq (A - B)^0$ , also sind nach 11.3.1  $B$  und  $A - B$  *dicht* in  $A$ .

**12.4.61.** Ist  $A$  eine *insichdichte metrische Menge*, so gibt es eine *Zerlegung*  $A = \bigcup_n A_n$  von  $A$  in  $\aleph_0$  *disjunkte*, in  $A$  *dichte Teile*.

Nach 12.4.6 gibt es eine *Zerlegung*  $A = (A - B_1) + B_1$ , so daß  $A - B_1$  und  $B_1$  *dicht* in  $A$ . Nach 12.4.3 ist  $B_1$  *insichdicht*, also gibt es nach 12.4.6 eine *Zerlegung*  $B_1 = A_2 + B_2$  in zwei *fremde*, in  $B_1$  *dichte Summanden*; nach 11.3.3 sind  $A_2$  und  $B_2$  auch *dicht* in  $A$ , also nach 12.4.3 auch *insichdicht*. Daher gibt es wieder nach 12.4.6 eine *ebensolche Zerlegung*  $B_2 = A_3 + B_3$  usw. Nun ist für jedes  $n$ :  $A = (A - B_1) + A_2 + \dots + A_n + B_n$ , also  $A = (A - B_1) + \bigcup_{n \geq 2} A_n + \bigcup_n B_n$ , und jede der Mengen  $A - B_1$ ,  $A_2, \dots, A_n, \dots$  ist *dicht* in  $A$ . Setzen wir noch  $(A - B_1) + \bigcup_n B_n = A_1$ , so ist  $A = \bigcup_n A_n$ , und nach 11.3.2 ist auch  $A_1$  *dicht* in  $A$ .

**Literatur:** Die *insichdichten Mengen* wurden eingeführt von G. Cantor, *Math. Ann.* 23 (1884) S. 471.

**5. Perfekte Mengen.** Eine Menge, die zugleich abgeschlossen und *insichdicht* ist, heißt *perfekt*. Die leere Menge ist *perfekt*. Ist der Raum  $E$  *insichdicht*, so ist er *perfekt*; der  $R_n$  ist also *perfekt*. Im  $R_1$  ist jedes Intervall  $[a, b]$ , jede Halbgerade  $x \geq a$  ( $x \leq a$ ) *perfekt*. „ $A$  ist *perfekt*“, ist gleich-

bedeutend mit  $A = A^1$ . Der Begriff „perfekt“ hat, ebenso wie „abgeschlossen“ relativen Charakter; z. B. ist  $(0, 1]$  perfekt in der Halbgeraden  $x > 0$ , nicht aber im  $R_1$ .

**12.5.1.** Die Summe endlich vieler perfekter Mengen ist perfekt.

Dies folgt aus 12.4.1 und 10.2.1.

**12.5.2.** Ist  $A$  perfekt, so ist auch jedes Stück in  $A$  perfekt.

Ist  $B$  ein Stück in  $A$ , so ist  $B$  die abgeschlossene Hülle in  $A$  einer in  $A$  offenen Menge  $G$ . Nach 12.4.21 ist  $G$  insichdicht, nach 12.4.31 also auch  $B$ , und als Stück in  $A$  ist  $B$  auch abgeschlossen in  $A$ , also nach 10.8.11 abgeschlossen.

**12.5.3.** Damit  $A$  insichdicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A^0$  perfekt sei.

Dies folgt aus 12.4.31 und der Tatsache, daß  $A^0$  abgeschlossen.

**12.5.4.** Ist  $A$  insichdicht, so ist  $A^1$  perfekt.

Dies folgt aus 12.5.3, da für insichdichte Mengen  $A^0 = A^1$ .

Die Umkehrung von 12.5.4 gilt nicht; z. B. ist für jede endliche Menge  $A^1 = A$ , also perfekt.

Literatur: Die perfekten Mengen wurden eingeführt von G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883) S. 575.

**6. Separierte Mengen.** Eine Menge, die keinen insichdichten Teil  $\supset A$  hat, heißt separiert.

**12.6.1.** Jede isolierte Menge  $A$  ist separiert.

Sei  $B \supset A$  ein insichdichter Teil von  $A$ ; jeder Punkt  $b \in B$  ist dann Häufungspunkt von  $B$ , nach 10.4.3 also auch von  $A$ , also ist  $A$  nicht isoliert.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht; z. B. ist die aus den Punkten 0 und  $\frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) des  $R_1$  bestehende Menge separiert, aber nicht isoliert.

**12.6.2.** Jeder Teil einer separierten Menge ist separiert.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

**12.6.3.** Sind  $A$  und  $B$  separiert, so auch  $A + B$ .

Es ist zu zeigen: jede insichdichte Menge  $C \subseteq A + B$  ist  $= A$ . Es ist  $C = A C + B C$ . Da  $C - (A C)^0$  offen in  $C$ , so ist nach 12.4.21  $C - (A C)^0$  insichdicht, also als Teil der separierten Menge  $B$  leer, d. h.  $C \subseteq (A C)^0$ , also auch  $C^0 \subseteq (A C)^0$ ; da aber wegen  $A C \subseteq C$  auch  $(A C)^0 \subseteq C^0$ , ist  $(A C)^0 = C^0$ , d. h. nach 11.8.11:  $A C$  ist dicht in  $C$ , und mithin nach 12.4.3:  $A C$  ist insichdicht. Weil  $A$  separiert, ist also  $A C = A$ . Ebenso sieht man:  $B C = A$ . Also ist  $C = A$ , w. z. b. w.

Aus 12-6-2 und 12-6-3 folgt:

**12-6-31.** Das System aller separierten Mengen eines topologischen Raumes ist ein  $\delta$ -Körper.

**12-6-4.** Eine separierte Menge  $A$ , die keinen isolierten Punkt des Raumes enthält, ist nirgends dicht.

Wäre  $A$  nicht nirgends dicht, so gäbe es nach 11-3-7 eine offene Menge  $G \supset A$ , so daß  $A \cap G$  dicht in  $G$ ; dann ist  $A \cap G \supset A$ , und da  $A \cap G$  keinen isolierten Punkt des Raumes enthält, kann nach 12-2-5 auch  $G$  keinen isolierten Punkt des Raumes enthalten. Also ist  $G$  nach 12-4-2 insichdicht, und nach 12-4-3 ist auch  $A \cap G$  insichdicht. Wegen  $A \cap G \supset A$  steht das im Widerspruche zur Voraussetzung,  $A$  sei separiert.

Literatur: Die separierten Mengen (in der französischen Literatur neuerdings als „ensembles clairs“ bezeichnet) wurden eingeführt von G. Cantor, Acta math. 7 (1885) S. 106. Eingehendere Betrachtungen: M. Fréchet, Fund. math. 10 (1927) S. 328.

**7. Insichdichter Kern.** Da  $A$  insichdicht, hat jede Menge einen insichdichten Teil. Nach 12-4-1 ist die Summe aller insichdichten Teile von  $A$  wieder insichdicht; sie heißt der insichdichte Kern  $A_k$  von  $A$  und ist der größte insichdichte Teil von  $A$ . Wir setzen  $A - A_k = A_s$ , und nennen  $A_s$  den separierten Bestandteil von  $A$ . Denn es gilt:

**12-7-1.** Bei beliebigem  $A$  ist  $A_s$  separiert.

Hätte nämlich  $A_s$  einen insichdichten Teil  $B \supset A_s$ , so wäre  $A_k + B$  zufolge 12-4-1 ein insichdichter Teil von  $A$ , der  $\supset A_k$  wäre, entgegen der Definition von  $A_k$ .

Die Zerlegung:

$$(7) \quad A = A_k + A_s \quad (A_k A_s = A)$$

hat absoluten Charakter. Aus der Definition von  $A_k$  und  $A_s$  folgt unmittelbar:

$$(7-1) \quad A_k \subseteq A_k, \quad A_s \supseteq A_s.$$

**12-7-2.**  $A_s$  ist dicht in  $A_s$ .

Nach 12-4-4 ist  $A - (A_s)^0 \subseteq A_k$ ; durch Komplementbildung bezüglich  $A$  folgt also:  $(A_s)^0 \supseteq A_s$ , und daraus folgt die Behauptung nach 11-3-1.

**12-7-3.** Ist  $A \subseteq B$ , so  $A_k \subseteq B_k$ .

Denn jeder insichdichte Teil von  $A$  ist auch insichdichter Teil von  $B$ .

**12-7-31.** Ist  $A \subseteq B$ , so  $A B_s \subseteq A_s$ .

Denn aus 12-7-3 folgt durch Komplementbildung bezüglich  $B$ , daß:  $B - A_k \supseteq B_s$ , also  $A (B - A_k) \supseteq A B_s$ ; wegen  $A \subseteq B$ ,  $A_k \subseteq A$  ist aber hierin  $A (B - A_k) = A B - A A_k = A - A_k = A_s$ .

$$12.7.4. \quad (A + B)_k = (A + B) ((A_k)^0 + (B_k)^0).$$

Wir setzen  $(A + B) ((A_k)^0 + (B_k)^0) = M$ . Wegen  $A_k \subseteq (A + B) (A_k)^0 \subseteq (A_k)^0$  ist nach 12.4.32  $(A + B) (A_k)^0$ , und ebenso  $(A + B) (B_k)^0$  insichdicht, daher nach 12.4.1 auch  $(A + B) ((A_k)^0 + (B_k)^0)$ ; somit ist  $M \subseteq (A + B)_k$ . Es ist also nur mehr zu zeigen:  $(A + B)_k \subseteq M$ , oder was dasselbe heißt: Jeder insichdichte Teil  $C$  von  $A + B$  ist  $\subseteq M$ . Wäre nicht  $C \subseteq M$ , so wäre  $C - M \supset A$ , und weil  $CM = C((A_k)^0 + (B_k)^0)$  abgeschlossen in  $C$ , wäre  $C - M$  offen in  $C$ , also nach 12.4.21 insichdicht. Es genügt also weiter, zu zeigen:  $(A + B) - M$  hat keinen insichdichten Teil  $\supset A$ , d. h.  $(A + B) - M$  ist separiert. Nun ist

$$(A + B) - M = (A + B) - ((A_k)^0 + (B_k)^0) = (A - ((A_k)^0 + (B_k)^0)) + (B - ((A_k)^0 + (B_k)^0)) \subseteq (A - A_k) + (B - B_k) = A_s + B_s;$$

nach 12.7.1 sind  $A_s$  und  $B_s$  separiert, nach 12.6.3 also auch  $A_s + B_s$ , und somit nach 12.6.2 auch  $(A + B) - M$ , w. z. b. w.

12.7.5.  $A_k$  ist perfekt in  $A$ ;  $A_s$  ist offen in  $A$ .

Indem man in 12.7.4  $A = B$  setzt, erhält man  $A_k = A (A_k)^0$ , also ist  $A_k$  abgeschlossen in  $A$ , mithin  $A - A_k = A_s$  offen in  $A$ ; weil  $A_k$  insichdicht, ist  $A_k$  auch perfekt in  $A$ .

12.7.51. Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $A_k$  perfekt.

Dies folgt aus 12.7.5 und 10.8.11.

Wegen 12.7.51 nennen wir, wenn  $A$  abgeschlossen,  $A_k$  auch den perfekten Kern von  $A$ .

8. Kohärenzen, Adhärenzen. Sei  $A$  eine beliebige Punktmenge. Wir definieren durch transfinite Induktion (§ 7, 4) die  $\xi$ -te Kohärenz (oder Kohärenz  $\xi$ -ter Ordnung)  $A_\xi$  von  $A$  mittels folgender Vorschriften:

$$(8) \quad 1. A_0 = A; \quad 2. A_{\xi+1} = (A_\xi)_h; \quad 3. A_\xi = \bigcap_{\eta < \xi} A_\eta,$$

wenn  $\xi (> 0)$  Grenzzahl. Hierdurch ist  $A_\xi$  für alle Ordinalzahlen  $\xi$  definiert. Die Menge  $A_\xi - A_{\xi+1} = (A_\xi)_f$  heißt die  $\xi$ -te Adhärenz von  $A$ . Die Kohärenzen und Adhärenzen haben absoluten Charakter. Aus der Definition folgt unmittelbar:

$$(8.1) \quad A_{\xi'} \subseteq A_\xi \quad \text{für } \xi' > \xi.$$

12.8.1. Die  $\xi$ -te Kohärenz  $A_\xi$  ist abgeschlossen in  $A$ .

Beweis durch transfinite Induktion (7.4.12). Die Behauptung ist richtig für  $\xi = 0$ , da  $A_0 = A$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; dann gilt sie auch für  $\xi$ : ist  $\xi$  eine isolierte Zahl, so ist  $A_\xi = (A_{\xi-1})_h$ , also nach 12.2.3 abgeschlossen in  $A_{\xi-1}$ , also nach 10.8.5 auch abgeschlossen

in  $A$ , da  $A_{\xi-1}$  nach Annahme abgeschlossen in  $A$ ; ist hingegen  $\xi$  eine Grenzzahl, so ist  $A_\xi = \bigcup_{\eta < \xi} A_\eta$ , und da hierin die  $A_\eta$  abgeschlossen in  $A$ , so nach 10-2-2 auch  $A_\xi$ .

Für jedes  $\xi$  gilt:

$$(8-2) \quad A = \bigcup_{\eta < \xi} (A_\eta - A_{\eta+1}) + A_\xi.$$

Denn ist  $a \in A - A_\xi$ , so gibt es eine kleinste Ordinalzahl  $\mu$  ( $\leq \xi$ ), so daß  $a \in A_\mu$ ; wegen 1. in (8) ist  $\mu > 0$ , und wegen 3. in (8) ist  $\mu$  nicht Grenzzahl, kann also in der Form  $\mu = \eta + 1$  geschrieben werden; dann aber ist  $\eta < \xi$  und  $a \in A_\eta - A_{\eta+1}$ .

**12-8-2.** Es gibt eine kleinste Ordinalzahl  $\alpha$ , so daß  $A_\xi = A_\alpha$  für  $\xi \geq \alpha$ .

Sei  $\aleph_\nu$  die Mächtigkeit von  $A$ ; setzen wir in (8-2)  $\xi = \omega_{\nu+1}$ , so können nicht alle Summanden  $A_\eta - A_{\eta+1} \supset A$  sein; es gibt also eine kleinste Ordinalzahl  $\alpha$  ( $< \omega_{\nu+1}$ ), so daß  $A_\alpha - A_{\alpha+1} = A$ , d. h.  $A_{\alpha+1} = A_\alpha$ ; aus (8) folgt unmittelbar, daß dann  $A_\xi = A_\alpha$  für alle  $\xi \geq \alpha$ .

Die Menge  $A_\alpha$  von 12-8-2 wird als die letzte Kohärenz von  $A$  bezeichnet. Es gilt:

**12-8-21.** Die letzte Kohärenz von  $A$  ist der insichdichte Kern von  $A$ .

In der Tat,  $A_{\alpha+1} = A_\alpha$  besagt:  $(A_\alpha)_h = A_\alpha$ , d. h.  $A_\alpha$  ist insichdicht, also  $A_\alpha \subseteq A_k$ . Bleibt zu zeigen, daß auch  $A_k \subseteq A_\alpha$ , oder was wegen (8-1) dasselbe heißt:  $A_k \subseteq A_\xi$  für alle  $\xi$ . Wir zeigen dies durch transfinite Induktion: Die Behauptung ist richtig für  $\xi = 0$ , da  $A_0 = A$ ; angenommen sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; ist dann  $\xi$  eine isolierte Zahl, so ist, weil  $A_k$  insichdichter Teil von  $A_{\xi-1}$  ist:  $A_k \subseteq (A_{\xi-1})_h = A_\xi$ ; ist hingegen  $\xi$  eine Grenzzahl, so folgt  $A_k \subseteq A_\xi$  unmittelbar aus 3. in (8).

Literatur: Der Begriff der Kohärenzen und Adhärenzen stammt von G. Cantor, Acta math. 7 (1885) S. 110. Vgl. auch C. Kuratowski, Fund. math. 3 (1922) S. 76.

**9. Ableitungen.** Die  $\xi$ -te Kohärenz von  $A^0$  wird mit  $A^\xi$  bezeichnet, und heißt die  $\xi$ -te Ableitung von  $A$ . Für  $\xi = 1$  ist dies nach § 12 (2-11) die schon in § 10, 4 mit  $A^1$  bezeichnete Menge aller Häufungspunkte von  $A$ . Für abgeschlossene Mengen stimmt die  $\xi$ -te Ableitung mit der  $\xi$ -ten Kohärenz überein.

**12-9-1.** Die  $\xi$ -te Ableitung  $A^\xi$  ist abgeschlossen.

Nach 12-8-1 ist  $A^\xi$  abgeschlossen in  $A^0$ , und da  $A^0$  abgeschlossen, ist  $A^\xi$  abgeschlossen nach 10-8-11.

Die letzte Kohärenz von  $A^0$  heißt die letzte Ableitung von  $A$ . Aus 12-8-21 folgt:

**12-9-2.** Die letzte Ableitung von  $A$  ist der perfekte Kern von  $A^0$ .



Ist  $A^\alpha$  die letzte Ableitung von  $A$ , so ist  $A^\xi \supset A^{\xi+1}$  für  $\xi < \alpha$ , und da  $A^{\xi+1} = (A^\xi)_h$ , ist  $A^\xi$  nicht perfekt für  $\xi < \alpha$ ; man kann deshalb  $A^\alpha$  auch als die perfekte Ableitung von  $A$  bezeichnen.

Selbstverständlich kann die letzte Ableitung von  $A$  auch leer sein. Besteht z. B.  $A$  aus endlich vielen Punkten, so ist  $A^1 = \Lambda$  die letzte Ableitung von  $A$ .

**12.9.3.** Ist  $\beta$  eine Ordinalzahl  $< \omega_1$  (§ 8, 3), so gibt es im Intervalle  $[a, b]$  des  $R_1$  eine abzählbare, abgeschlossene Punktmenge  $A$ , für die  $A^\xi \supset \Lambda$ , wenn  $\xi \leq \beta$ , und  $A^{\beta+1} = \Lambda$ .

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Die Behauptung ist richtig für  $\beta = 0$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\xi < \beta$ ; sei dann  $((a_n))$  eine Punktfolge aus  $(a, b)$  mit  $a_n < a_{n+1}$  und  $a_n \rightarrow b$ ; ferner sei  $((\beta_n))$  eine Folge von Ordinalzahlen, in der alle  $\beta_n = \beta - 1$ , falls  $\beta$  eine isolierte Zahl, hingegen  $\beta_n < \beta_{n+1}$  und  $\beta = \lim_n \beta_n$ , wenn  $\beta$  eine Grenzzahl  $> 0$  (8.4.21).

Nach Annahme gibt es in  $[a_n, a_{n+1}]$  eine abgeschlossene Punktmenge  $A_n$ , so daß  $(A_n)^\xi \supset \Lambda$  für  $\xi \leq \beta_n$ ,  $(A_n)^{\beta_n+1} = \Lambda$ ; für  $A = \bigcup_n A_n + \{b\}$  gilt dann offenbar:  $A^\beta = \{b\}$ ,  $A^{\beta+1} = \Lambda$ .

In 12.9.3 ist die Voraussetzung  $\beta < \omega_1$  wesentlich, wie aus 13.2.4 folgt. Ferner werden wir in 15.3.2 sehen, daß es, wenn  $\gamma$  eine Grenzzahl ist, in  $[a, b]$  keine Punktmenge  $A$  geben kann, für die  $A^\xi \supset \Lambda$ , wenn  $\xi < \gamma$ ,  $A^\gamma = \Lambda$ . Wohl aber gilt:

**12.9.31.** Ist  $\gamma$  eine Ordinalzahl  $< \omega_1$ , so gibt es im  $R_1$  eine abzählbare, abgeschlossene Punktmenge  $A$ , für die  $A^\xi \supset \Lambda$ , wenn  $\xi < \gamma$ , und  $A^\gamma = \Lambda$ .

Ist  $\gamma$  eine isolierte Zahl, so ist dies (für  $\beta = \gamma - 1$ ) in 12.9.3 enthalten. Sei also  $\gamma$  eine Grenzzahl ( $> 0$ ). Nach 8.4.21 gibt es eine wachsende Folge  $((\gamma_n))$  von Ordinalzahlen mit  $\gamma = \lim_n \gamma_n$ . Nach 12.9.3 gibt es im Intervalle  $[n, n+1]$  eine Punktmenge  $A_n$ , so daß  $(A_n)^{\gamma_n} \supset \Lambda$ ,  $(A_n)^{\gamma_n+1} = \Lambda$ . Für  $A = \bigcup_n A_n$  gilt dann offenbar:  $A^\xi \supset \Lambda$  für  $\xi < \gamma$ ,  $A^\gamma = \Lambda$ .

Literatur: Die Ableitungen einer Punktmenge wurden eingeführt von G. Cantor, Math. Ann. 5 (1872) S. 129.

### § 13. Separable Mengen.

**1. Separable Mengen.** Sei  $A$  eine Punktmenge; wir nennen ein System  $\mathfrak{S}$  nicht leerer, in  $A$  offener Mengen ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen, wenn es in  $\mathfrak{S}$  zu jedem  $a \in A$  und zu jeder  $a$  enthaltenden, in  $A$  offenen Menge  $G$  eine Menge  $H$  gibt, so daß  $a \in H$ ,  $H \subseteq G$ .

**13.1.1.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen, so ist jede in  $A$  offene Menge  $G$  Summe eines Teilsystemes von  $\mathfrak{S}$ .

Denn zu jedem  $a \in G$  gibt es ein  $H_a \in \mathfrak{S}$ , so daß  $a \in H_a$ ,  $H_a \subseteq G$ . Dann aber ist  $G = \bigcup_{a \in G} H_a$ , wie behauptet.

Gibt es ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen, so heißt  $A$  separabel. Der Begriff „separabel“ hat absoluten Charakter.

**13-1-2.** Jeder Teil  $B$  einer separablen Menge  $A$  ist separabel.

Denn bilden die Mengen  $A G_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen, so bilden die nicht leeren  $B G_n$  ein ausgezeichnetes System in  $B$  offener Mengen.

**13-1-3.** Ist  $A$  separabel, so gibt es einen in  $A$  dichten abzählbaren Teil von  $A$ .

Sei  $H_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen, und sei  $a_n \in H_n$ . Ist  $G$  eine in  $A$  offene Menge  $\supset A$ , so gibt es ein  $H_n \subseteq G$ , also auch ein  $a_n \in G$ , nach 11-1-3 ist also die abzählbare Menge der  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) dicht in  $A$ .

In metrischen Räumen gilt hiervon die Umkehrung:

**13-1-31.** Ist  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes, und gibt es einen in  $A$  dichten abzählbaren Teil von  $A$ , so ist  $A$  separabel.

Sei in der Tat die abzählbare Menge  $A'$  der Punkte  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) dicht in  $A$ . Dann bilden die abzählbar vielen Mengen  $A K_{a_n \frac{1}{m}}$  ( $m, n = 1, 2, \dots$ ) ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen; denn ist  $G$  offen in  $A$  und  $a \in G$ , so gibt es nach 10-8-1 ein  $\varrho > 0$ , so daß  $A K_{a \varrho} \subseteq G$ ; ist dann  $\frac{1}{m} < \frac{\varrho}{2}$ , so gibt es, da nach 11-8-1  $a \in A'$ , zufolge 10-5-41 ein  $a_n$ , so daß  $a_n a < \frac{1}{m}$ ; dann aber ist  $a \in K_{a_n \frac{1}{m}}$  und  $K_{a_n \frac{1}{m}} \subseteq K_{a \varrho}$ , also  $a \in A K_{a_n \frac{1}{m}}$  und  $A K_{a_n \frac{1}{m}} \subseteq A K_{a \varrho} \subseteq G$ .

**13-1-32.** Der  $R_n$  ist separabel.

Denn die abzählbare Menge der rationalen Punkte des  $R_n$  ist dicht im  $R_n$ .

**13-1-321.** Der  $R_\omega$  ist separabel.

Denn offenbar ist die Menge der Punkte  $((a_n))$  des  $R_\omega$ , deren Koordinaten rational und fast alle  $= 0$  sind, abzählbar und dicht im  $R_\omega$ .

**13-1-322.** Der  $R_0$  ist separabel.

Denn offenbar ist die Menge der Punkte  $((k_n))$  des  $R_0$ , deren Koordinaten fast alle  $= 1$  sind, abzählbar und dicht im  $R_0$ .

**13-1-4.** Sind  $A$  und  $B$  Mengen eines metrischen Raumes, ist  $A$  separabel und dicht in  $B$ , so ist auch  $B$  separabel.

Denn nach 13-1-3 gibt es einen abzählbaren in  $A$  dichten Teil  $A'$  von  $A$ ; nach 11-8-3 ist  $A'$  auch dicht in  $B$ , also ist  $B$  separabel nach 13-1-31.

**13.1.5.** Die Summe abzählbar vieler separabler Mengen eines metrischen Raumes ist separabel.

Ist  $A_n$  separabel, so gibt es nach 13.1.3 eine abzählbare Menge  $A'_n \subseteq A_n$ , die dicht in  $A_n$  ist; dann ist auch  $\bigcup_n A'_n$  abzählbar und nach 11.3.4 dicht in  $\bigcup_n A_n$ , also ist  $\bigcup_n A_n$  nach 13.1.31 separabel.

Aus 13.1.5 und 13.1.2 folgt:

**13.1.51.** Das System aller separablen Mengen eines metrischen Raumes ist ein  $\sigma$ -Körper und ein  $\delta$ -Körper.

**13.1.6.** Damit die metrische Menge  $A$  separabel sei, ist notwendig und hinreichend, daß jedes  $\varrho$ -Netz in  $A$  abzählbar sei.

Notwendig: Sei  $B$  ein unabzählbares  $\varrho$ -Netz in  $A$ . Nach 12.2.5 ist kein echter Teil, insbesondere kein abzählbarer Teil von  $B$  dicht in  $B$ ; nach 13.1.3 ist also  $B$  nicht separabel, nach 13.1.2 ist auch  $A$  nicht separabel. Hinreichend: Nach 9.7.1 gibt es für jedes  $n$  ein  $\frac{1}{n}$ -Netz  $B_n$  in  $A$ ; nach Annahme ist  $B_n$  abzählbar, also ist auch  $C = \bigcup_n B_n$  abzählbar. Zu jedem  $a \in A$  gibt es nun ein  $b_n \in B_n$ , so daß  $b_n a < \frac{1}{n}$ ; somit gibt es zu jedem  $a \in A$  und zu jedem  $\varrho > 0$  ein  $c \in C$ , so daß  $ca < \varrho$ ; nach 10.5.41 ist demnach  $A \subseteq C^0$ , also ist nach 11.3.1  $C$  dicht in  $A$ , also ist nach 13.1.31  $A$  separabel.

Eine monoton abnehmende Folge  $((U_{n\alpha}))$  von Umgebungen des Punktes  $\alpha$  heißt eine sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Umgebungsfolge (oder: eine sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Folge offener Mengen), wenn für jede beliebige Umgebung  $U_\alpha$  gilt:  $U_{n\alpha} \subseteq U_\alpha$  für fast alle  $n$ . Nach 9.1.3 gilt für jede sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Umgebungsfolge:  $\bigcap_n U_{n\alpha} = \{\alpha\}$ . — In einem metrischen Raume ist, wenn  $(\varrho_n)$  eine monoton abnehmende Zahlenfolge mit  $\varrho_n \rightarrow 0$  bedeutet,  $((K_{\alpha\varrho_n}))$  eine sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Umgebungsfolge.

**13.1.7.** Ist der Raum  $E$  separabel, so gibt es zu jedem  $\alpha \in E$  eine sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Umgebungsfolge.

Sei  $\S$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen, und seien  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  die  $\alpha$  enthaltenden Mengen aus  $\S$ . Wir setzen  $U_{n\alpha} = H_1 H_2 \dots H_n$ ; dann ist  $U_{n+1\alpha} \subseteq U_{n\alpha}$ ; sei ferner  $U_\alpha$  eine beliebige Umgebung von  $\alpha$ ; dann gibt es unter den  $H_n$  eines, etwa  $H_{\bar{n}}$ , so daß  $H_{\bar{n}} \subseteq U_\alpha$ ; dann aber ist  $U_{n\alpha} \subseteq U_\alpha$  für  $n \geq \bar{n}$ ; also ist  $((U_{n\alpha}))$  eine sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Umgebungsfolge.

**13.1.71.** Ist  $A$  separabel und  $\alpha \in A^1$ , so gibt es ein  $B \subseteq A$ , so daß  $B^1 = \{\alpha\}$ .

Nach 13.1.7 (angewendet auf den Raum  $A$ ) gibt es eine sich auf  $a$  zusammenziehende Folge  $(G_n)$  in  $A$  offener Mengen. Da  $a \in A^1$ , gibt es in  $G_n$  ein  $a_n \neq a$ ; die Menge der  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) heiße  $B$ . Ist  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ , so ist  $G_n \subseteq U_a$  für fast alle  $n$ , also  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ , und da wegen  $D G_n = \{a\}$  nicht unendlich viele  $a_n$  zusammenfallen können, ist  $a \in B^1$ .  
Ist  $b \neq a$ , so gibt es Umgebungen  $U_a, U_b$ , so daß  $U_a U_b = \emptyset$ ; da  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ , ist  $b \notin U_a$ . Es ist also  $a \in B^1$ , und  $b \notin B^1$  für  $b \neq a$ , d. h. es ist  $B^1 = \{a\}$ .

**13.1.8.** Jede separable insichdichte Menge  $A$  (jede insichdichte Menge  $A$  eines metrischen Raumes) enthält einen abzählbaren insichdichten Teil.

Sei  $a \in A$ ; nach 13.1.7 gibt es eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge  $U_{n_1}$  ( $n_1 = 1, 2, \dots$ ); da  $A$  insichdicht gibt es in  $A U_{n_1}$  ein  $a_{n_1} \neq a$ . Zu jedem dieser Punkte  $a_{n_1}$  gibt es wieder eine sich auf  $a_{n_1}$  zusammenziehende Umgebungsfolge  $U_{n_1 n_2}$  ( $n_2 = 1, 2, \dots$ ) und in  $A U_{n_1 n_2}$  einen Punkt  $a_{n_1 n_2} \neq a_{n_1}$  u. s. f. Die Menge aller so gebildeten Punkte  $a_{n_1 n_2} \dots n_k$  ist ein abzählbarer insichdichter Teil von  $A$ .

Literatur: Der Begriff der separablen Menge wurde eingeführt von M. Fréchet, Rend. Pal. 22 (1906) S. 23; vgl. auch W. Sierpiski, Fund. math. 2 (1921) S. 178 und C. Kuratowski, Fund. math. 3 (1922) S. 41.

**2. Mchtigkeitsstze.** Für die Mächtigkeit einer separablen Menge gilt:

**13.2.1.** Eine separable Menge  $A$  hat höchstens die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Sei  $a \in A$ ,  $b \in A$ ,  $a \neq b$ ; nach 9.1.2 gibt es eine offene Menge  $G$ , so daß  $a \in G$ ,  $b \notin G$ ; in einem ausgezeichneten Systeme  $\mathfrak{S}$  in  $A$  offener Mengen gibt es also ein  $H$ , so daß  $a \in H$ ,  $b \notin H$ . Der Durchschnitt des Systemes  $\mathfrak{S}_a$  aller  $a$  enthaltenden Mengen aus  $\mathfrak{S}$  ist also  $\{a\}$ . Aus  $a \neq b$  folgt daher  $\mathfrak{S}_a \neq \mathfrak{S}_b$ . Nach 5.2.1 gibt es aber, wenn  $\mathfrak{S}$  abzählbar, höchstens  $\aleph$  Teilsysteme von  $\mathfrak{S}$ , daher gibt es auch höchstens  $\aleph$  Punkte von  $A$ .

In Verallgemeinerung von 5.1.42 zeigen wir nun:

**13.2.2.** Ist  $A$  separabel, so ist jedes disjunkte System  $\mathfrak{S}$  in  $A$  offener Mengen abzählbar.

Sei  $\mathfrak{S}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen. Zu jedem nicht leeren  $G \in \mathfrak{S}$  gibt es ein  $H_G \in \mathfrak{S}$ , so daß  $H_G \subseteq G$ ; da je zwei  $G$  fremd, folgt aus  $G \neq G'$  auch  $H_G \neq H_{G'}$ ; da es nur abzählbar viele  $H \in \mathfrak{S}$  gibt, so auch nur abzählbar viele  $G \in \mathfrak{S}$ .

Ein Mengensystem  $\mathfrak{M}$  heiße monoton, wenn zwischen je zwei verschiedenen Mengen  $A \in \mathfrak{M}$  und  $B \in \mathfrak{M}$  eine der beiden Relationen  $A \subset B$  oder  $B \subset A$  besteht. Das monotone Mengensystem  $\mathfrak{M}$  heißt aufsteigend

(absteigend) wohlgeordnet, falls die durch die Festsetzung: „ $A \prec B$ , wenn  $A \subset B$  (bzw. wenn  $A \supset B$ )“ definierte Ordnung von  $\mathfrak{M}$  eine Wohlordnung ist.

**13-2-3.** *Ist  $A$  separabel, so ist jedes aufsteigend (absteigend) wohlgeordnete System in  $A$  offener Mengen abzählbar.*

Sei  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen und  $G_\xi$  ( $\xi < \alpha$ ) ein aufsteigend wohlgeordnetes System in  $A$  offener Mengen. Nach Annahme ist  $G_{\xi-1} - G_\xi \supset A$  (für  $\xi + 1 < \alpha$ ). Nach 13-1-1 gibt es also ein  $n_\xi$ , so daß  $H_{n_\xi} \subseteq G_{\xi-1}$ , aber nicht  $H_{n_\xi} \subseteq G_\xi$ ; verschiedenen  $G_\xi$  sind so verschiedene  $H_{n_\xi}$  zugeordnet; da es aber nur abzählbar viele  $H_n$  gibt, kann es auch nur abzählbar viele  $G_\xi$  geben.

Durch Komplementbildung folgt aus 13-2-3:

**13-2-31.** *Ist  $A$  separabel, so ist jedes absteigend (aufsteigend) wohlgeordnete System in  $A$  abgeschlossener Mengen abzählbar.*

Wegen 12-8-1 folgt daraus:

**13-2-4.** *Ist  $A$  separabel und  $A_\alpha$  die letzte Kohärenz von  $A$ , so ist  $\alpha < \omega_1$ .*

**13-2-5.** *In einem separablen unendlichen Raume  $E$  gibt es  $\aleph$  offene Mengen.*

Sei  $\mathfrak{S}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen. Da  $\mathfrak{S}$  nach 5-2-1  $\aleph$  Teilsysteme hat, gibt es nach 13-1-1 in  $E$  höchstens  $\aleph$  offene Mengen. Andererseits gibt es nach 12-3-3 in  $E$  eine unendliche isolierte Punktmenge; diese enthält nach 5-1-5 einen Teil  $A$  der Mächtigkeit  $\aleph_0$ , der nach 12-3-1 gleichfalls isoliert ist. Sei  $B \subseteq A$ ; setzen wir  $G_B = E - B^0$ , so ist  $G_B$  offen, und weil  $A$  isoliert, also  $(A - B) B^0 = A$  ist:  $A - B \subseteq G_B$ , d. h.  $A - B = (A - B)G_B$ ; da  $BG_B = A$ , ist also  $A - B = AG_B$ ; daraus folgt, daß verschiedenen Teilen  $B$  von  $A$  verschiedene  $G_B$  zugeordnet sind; und da es nach 5-2-1  $\aleph$  verschiedene Teile  $B$  von  $A$  gibt, gibt es also auch mindestens  $\aleph$  offene Mengen.

Da die offenen und abgeschlossenen Mengen Komplemente voneinander sind, folgt aus 13-2-5:

**13-2-51.** *In einem separablen unendlichen Raume gibt es  $\aleph$  abgeschlossene Mengen.*

Literatur zu 13-2-3, 13-2-31: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 170, 171; A. Denjoy, C. R. 192 (1931) S. 1011; A. Lindenbaum, C. R. 192 (1931) S. 1511.

**3. Überdeckungssatz.** Wir nennen ein System in  $A$  offener Mengen, deren Summe  $A$  ist, ein  $A$  überdeckendes System, oder ein Überdeckungssystem von  $A$ .

**13.3.1.** Ist  $A$  separabel, so gibt es in jedem  $A$  überdeckenden System  $\mathfrak{B}$  ein  $A$  überdeckendes abzählbares Teilsystem.

Sei  $\mathfrak{S}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen. Zu jedem  $a \in A$  gibt es ein  $G \in \mathfrak{B}$ , so daß  $a \in G$ ; sodann gibt es zu diesem  $G$  ein  $H \in \mathfrak{S}$ , so daß  $a \in H$ ,  $H \subseteq G$ . Bezeichnen wir die sämtlichen so den Punkten von  $A$  zugeordneten  $H \in \mathfrak{S}$  mit  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ , so ist  $A = \bigcup_n H_n$ ; jedes dieser  $H_n$  aber war Teil eines  $G_n \in \mathfrak{B}$ ; also ist erst recht  $A = \bigcup_n G_n$ ; diese  $G_n$  bilden also ein abzählbares,  $A$  überdeckendes Teilsystem von  $\mathfrak{B}$ .

In metrischen Räumen gilt hiervon auch die Umkehrung:

**13.3.11.** Damit die metrische Menge  $A$  separabel sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jedem  $A$  überdeckenden Systeme  $\mathfrak{B}$  ein  $A$  überdeckendes abzählbares Teilsystem gebe.

Notwendig: Dies ist enthalten in 13.3.1. Hinreichend: Das System  $\mathfrak{G}_n$  der Mengen  $A \cap K_{a_n} \frac{1}{n}$  ( $a \in A$ ) ist ein Überdeckungssystem von  $A$ ; nach Voraussetzung gibt es in  $\mathfrak{G}_n$  ein  $A$  überdeckendes abzählbares Teilsystem  $A \cap K_{a_v} \frac{1}{n}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ); sei  $C_n$  die Menge der Punkte  $a_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ). Dann ist  $C = \bigcup_n C_n$  ein abzählbarer Teil von  $A$ . Da es zu jedem  $a \in A$  und jedem  $n$  ein  $c \in C$  mit  $ac < \frac{1}{n}$  gibt, ist (vgl. den Beweis von 13.1.6)  $C$  dicht in  $A$ ; also ist  $A$  separabel nach 13.1.31.

**13.3.2.** Ist  $A$  separabel und  $\mathfrak{F}$  ein System in  $A$  abgeschlossener Mengen, von denen je abzählbar viele einen Punkt gemein haben, so haben alle  $F \in \mathfrak{F}$  einen Punkt gemein.

Denn bezeichnen wir mit  $\mathfrak{B}$  das System der (in  $A$  offenen) Komplemente  $A - F$  ( $F \in \mathfrak{F}$ ), so besagt 13.3.2: gibt es in  $\mathfrak{B}$  kein abzählbares,  $A$  überdeckendes Teilsystem, so ist auch  $\mathfrak{B}$  kein  $A$  überdeckendes System. Das aber ist gleichbedeutend mit 13.3.1.

Literatur: Der Überdeckungssatz 13.3.1 geht zurück auf E. Lindelöf, C. R. 137 (1903) S. 697 und W. H. Young, Lond. Proc. 35 (1903) S. 384.

**4. Verdichtungspunkte.** Der Punkt  $a$  heißt Verdichtungspunkt von  $A$ , wenn zu jeder Umgebung  $U_a$  unabzählbar viele Punkte von  $A$  gehören. Ganz wie 10.4.1 beweist man:

**13.4.1.** Ist  $A$  Menge eines metrischen Raumes, so ist, damit  $a$  Verdichtungs-punkt von  $A$  sei, notwendig und hinreichend, daß für jedes  $\varrho > 0$  zu  $K_{a,\varrho}$  unabzählbar viele Punkte von  $A$  gehören.

Ganz wie 10.4.3 beweist man:

**13.4.2.** Ist  $a$  Verdichtungspunkt von  $A$  und gibt es eine Umgebung  $U_{1a}$  von  $a$ , so daß  $A \cap U_{1a} \subseteq B$ , so ist  $a$  auch Verdichtungspunkt von  $B$ .

Wir bezeichnen die Menge aller Verdichtungspunkte von  $A$  mit  $A^*$ . Es ist  $A^* \subseteq A^1$ . Aus 13.4.2 folgt:

**13.4.3.** Ist  $A \subseteq B$ , so  $A^* \subseteq B^*$ .

**13.4.4.**  $(A + B)^* = A^* + B^*$ .

Wegen 13.4.3 ist  $A^* \subseteq (A + B)^*$ ,  $B^* \subseteq (A + B)^*$ , also auch  $A^* + B^* \subseteq (A + B)^*$ . Bleibt zu beweisen, daß auch  $(A + B)^* \subseteq A^* + B^*$ . Sei  $a \sim \varepsilon (A^* + B^*)$ ; dann gibt es Umgebungen  $U_{1a}$ ,  $U_{2a}$ , so daß  $A \cap U_{1a}$ ,  $B \cap U_{2a}$  abzählbar; dann ist  $U_a = U_{1a} \cap U_{2a}$  eine Umgebung von  $a$ , für die  $(A + B) \cap U_a$  abzählbar; aus  $a \sim \varepsilon (A^* + B^*)$  folgt also  $a \sim \varepsilon (A + B)^*$ , d. h. es ist  $(A + B)^* \subseteq A^* + B^*$ , w. z. b. w.

**13.4.5.** Bei beliebigem  $A$  ist  $A^*$  abgeschlossen.

Sei  $a \in (A^*)^1$ ; in jeder Umgebung  $U_a$  liegt dann ein  $b \in A^*$ , und da  $U_a$  auch eine Umgebung  $U_b$  ist, liegen in  $U_a$  un abzählbar viele Punkte von  $A$ , d. h.  $a \in A^*$ . Aus  $a \in (A^*)^1$  folgt also  $a \in A^*$ , d. h. es ist  $(A^*)^1 \subseteq A^*$ , also ist nach 10.5.61  $A^*$  abgeschlossen.

**5. Verdichteter, unverdichteter Teil.** Wir setzen nun:

$$(5) \quad A_v = A \cap A^*, \quad A_u = A - A_v.$$

Daraus folgt:

$$(5.1) \quad A = A_u + A_v \quad (A_u \cap A_v = \emptyset).$$

$A_v$  (d. i. die Menge aller zu  $A$  gehörigen Verdichtungspunkte von  $A$ ) und  $A_u$  haben, im Gegensatz zu  $A^*$ , absoluten Charakter. Wir nennen  $A_v$  den verdichteten,  $A_u$  den unverdichteten Teil von  $A$ . Ist  $A$  abgeschlossen, so ist wegen  $A^* \subseteq A^1$  nach 10.5.61  $A^* \subseteq A$ , also nach (5):  $A_v = A^*$ .

Aus 13.4.3 folgt:

**13.5.1.** Ist  $A \subseteq B$ , so ist  $A_v \subseteq B_v$ ,  $A_u \subseteq B_u$ .

Ganz wie 12.2.2 beweist man:

$$\begin{aligned} 13.5.2. \quad (A + B)_v &= (A + B) \cap (A^* + B^*); \\ (A + B)_u &= (A + B) - (A^* + B^*). \end{aligned}$$

Wegen (5) folgt aus 13.4.5:

**13.5.3.**  $A_v$  ist abgeschlossen in  $A$ ;  $A_u$  ist offen in  $A$ .

Die Menge  $A$  heißt unverdichtet, wenn  $A_v = \emptyset$ ,  $A = A_u$ ; sie heißt verdichtet, wenn  $A_u = \emptyset$ ,  $A = A_v$ . Wegen  $A_v \subseteq A^* \subseteq A^1$  ist jede verdichtete Menge insichdicht.

**13.5.4.** Ist  $A$  separabel, so ist  $A_u$  abzählbar.

In der Tat, zu jedem  $a \in A_u$  gibt es ein  $U_a$ , so daß  $A \cap U_a$ , und somit auch  $A_u \cap U_a$  abzählbar. Diese  $A_u \cap U_a$  bilden ein  $A_u$  überdeckendes System. Wegen 13.1.2 ist auch  $A_u$  separabel, also gibt es nach 13.3.1 unter unseren  $A_u \cap U_a$  abzählbar viele, die ein  $A_u$  überdeckendes System bilden; also ist  $A_u$  Summe abzählbar vieler abzählbarer Mengen, mithin abzählbar.

Offenbar ist jede abzählbare Menge unverdichtet. Hiervon gilt folgende Umkehrung:

**13.5.41.** Jede separable unverdichtete Menge ist abzählbar.

Denn ist  $A$  unverdichtet, so ist  $A_u = A$ , und die Behauptung folgt aus 13.5.4.

Eine andere Formulierung von 13.5.41 lautet:

**13.5.42.** Ist die separable Menge  $A$  unabzählbar, so ist  $A_v \supset A$ .

**13.5.5.** Damit die Menge  $A$  eines metrischen Raumes separabel sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden unabzählbaren Teil  $B$  von  $A$  gelte:  $B^1 \supset A$ .

Notwendig: Nach 13.1.2 ist  $B$  separabel, also nach 13.5.42:  $B_v \supset A$ , also auch  $B^1 \supset A$ . Hinreichend: Ist  $B$  ein  $\varrho$ -Netz in  $A$ , so ist nach 10.4.7  $B^1 = A$ ; also kann nach Annahme kein  $\varrho$ -Netz in  $A$  unabzählbar sein; nach 13.1.6 ist also  $A$  separabel.

**13.5.6.** Ist  $A$  separabel, so ist  $A_v$  verdichtet:  $A_{vv} = A_v$ .

In der Tat, nach (5.1) und 13.5.2 ist  $A_v = (A_u + A_v) ((A_u)^* + (A_v)^*)$ , also, da nach 13.5.4  $(A_u)^* = A$  ist:  $A_v = (A_u + A_v) (A_v)^*$ ; da aber wegen 13.4.3  $(A_v)^* \subseteq A^*$ , und da  $A_u A^* = A$ , ist  $A_u (A_v)^* = A$ ; wir haben also weiter:  $A_v = A_v (A_v)^*$ , somit nach (5):  $A_v = A_{vv}$ .

Da jede verdichtete Menge insichdicht ist, folgt aus 13.5.6 und 13.5.3:

**13.5.61.** Ist  $A$  separabel, so ist  $A_v$  perfekt in  $A$ .

**13.5.7.** Ist  $A$  separabel, so ist  $(A_v)^* = A^*$ .

Denn nach (5.1) und 13.4.4 ist  $A^* = (A_u)^* + (A_v)^*$ , und nach 13.5.4 ist hierin  $(A_u)^* = A$ .

**13.5.71.** Ist  $A$  separabel, so ist  $(A^*)^* = A^*$ .

Denn wegen 13.5.7 und  $A_v \subseteq A^*$  ist nach 13.4.3:  $A^* = (A_v)^* \subseteq A^{**}$ . Umgekehrt ist  $A^{**} \subseteq (A^*)^1$ , also, weil nach 13.4.5  $(A^*)^1 \subseteq A^*$ , auch  $A^{**} \subseteq A^*$ .

In Ergänzung von 13.4.5 folgt nun:

**13.5.72.** Ist  $A$  separabel, so ist  $A^*$  perfekt.

Denn nach 13.4.5 ist  $A^*$  abgeschlossen, nach 13.5.71 verdichtet, also insichdicht.



Greifen wir zurück auf die Zerlegung § 12 (7), so erhalten wir:

**13·5·8.** *Ist  $A$  separabel, so ist  $A_*$  abzählbar.*

Denn nach 13·5·6 ist  $A_*$  insichdicht, also  $A_* \subseteq A_*$ , also  $A_* \supseteq A_*$ ; wegen 13·5·4 ist also  $A_*$  abzählbar.

Aus 13·1·2 folgt nun:

**13·5·81.** *In einem separablen Raume ist jede separierte Menge abzählbar.*

Aus § 12 (7·1) folgt nun unmittelbar:

**13·5·9.** *Ist  $A$  separabel, so ist  $A_*$  abzählbar.*

**13·5·91.** *In einem separablen Raume ist jede isolierte Menge abzählbar.*

Literatur: Die Sätze dieser Nummer gehen größtenteils zurück auf E. Lindelöf, Acta math. 29 (1905) S. 183.

## § 14. Reguläre und normale Räume.

**1. Abgesonderte Mengen.** Zwei Mengen  $A$  und  $B$  eines topologischen Raumes heißen abgesondert, wenn keine einen Punkt oder Häufungspunkt der anderen enthält, d. h. wenn:

$$(1) \quad A \cdot B^0 + B \cdot A^0 = \Lambda.$$

Der Begriff „abgesondert“ hat absoluten Charakter: sind  $A$  und  $B$  in einem topologischen Raum abgesondert, so in jedem, der sie beide enthält, insbesondere in ihrer Summe  $A + B$ . Die leere Menge ist von jeder abgesondert. Die Halbgeraden  $x > a$  und  $x < a$  des  $R_1$  sind abgesondert, die Halbgeraden  $x \geq a$  und  $x \leq a$  nicht. Zwei abgesonderte Mengen sind auch fremd.

**14·1·1.** *Damit zwei fremde Mengen  $A$  und  $B$  abgesondert seien, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  (und  $B$ ) in  $A + B$  sowohl offen als abgeschlossen sei.*

Notwendig: Aus  $A \cdot B^0 = \Lambda$ ,  $B \cdot A^0 = \Lambda$  folgt:  $A = A^0 (A + B)$ ,  $B = B^0 (A + B)$ ; also sind  $A$  und  $B$  nach 10·8·1 abgeschlossen in  $A + B$ ; also sind die Komplemente  $A = (A + B) - B$ ,  $B = (A + B) - A$  offen in  $A + B$ . Hinreichend: Da  $A$  abgeschlossen in  $A + B$ , so ist nach 10·8·3  $A = A^0 (A + B) = A^0 A + A^0 B = A + A^0 B$ ; also ist  $A^0 B \subseteq A$ , und da auch  $A^0 B \subseteq B$ , ist  $A^0 B \subseteq A \cdot B$ , und da  $A \cdot B = \Lambda$ , ist auch  $A^0 B = \Lambda$ . Da  $A$  offen in  $A + B$ , ist  $B$  abgeschlossen in  $A + B$ , und man erhält ebenso  $B^0 A = \Lambda$ . Also gilt (1), w. z. b. w.

Mit 14·1·1 ist gleichbedeutend:

**14·1·11.** *Damit zwei fremde Mengen  $A$  und  $B$  abgesondert seien, ist notwendig und hinreichend, daß sowohl  $A$  als  $B$  offen (oder abgeschlossen) in  $A + B$  sei.*

Daraus folgt nach 10·8·51:

**14·1·2.** Zwei fremde offene (abgeschlossene) Mengen  $A$ ,  $B$  sind abgesondert. Aus der Definition folgt unmittelbar:

**14·1·3.** Sind  $A$  und  $B$  abgesondert, und ist  $A' \subseteq A$ ,  $B' \subseteq B$ , so sind auch  $A'$  und  $B'$  abgesondert.

**14·1·4.** Sind sowohl  $A_1$  und  $B$ , als auch  $A_2$  und  $B$  abgesondert, so auch  $A_1 + A_2$  und  $B$ .

**2. Reguläre, normale Räume.** Wir sagen: die beiden fremden Mengen  $A$  und  $B$  sind durch offene Mengen trennbar, wenn es zwei fremde offene Mengen  $G$ ,  $G'$  gibt, so daß  $A \subseteq G$ ,  $B \subseteq G'$ . Nach Axiom 5<sub>i</sub>) (§ 9, 1) sind zwei fremde Mengen  $\{a\}$  und  $\{b\}$  durch offene Mengen trennbar. Ein topologischer Raum heißt regulär, wenn in ihm jede Menge  $\{a\}$  von jeder zu  $\{a\}$  fremden abgeschlossenen Menge durch offene Mengen trennbar ist; er heißt normal, wenn je zwei fremde abgeschlossene Mengen durch offene Mengen trennbar sind. Da jede Menge  $\{a\}$  abgeschlossen ist, gilt:

**14·2·1.** Jeder normale Raum ist regulär.

Mit der Umkehrung dieses Satzes, die nicht allgemein gilt, werden wir uns in 14·2·31 befassen.

**14·2·11.** Jeder abgeschlossene Teil  $C$  eines regulären (normalen) Raumes  $E$  ist regulär (normal).

Sei  $B$  abgeschlossen in  $C$  und  $a \in C - B$ ; nach 10·8·11 ist  $B$  auch abgeschlossen in  $E$ , und da  $E$  regulär, gibt es in  $E$  offene Mengen  $G$ ,  $G'$ , so daß  $a \in G$ ,  $B \subseteq G'$ ,  $G \cap G' = \Lambda$ . Dann sind  $CG$ ,  $CG'$  offen in  $C$ , es ist  $a \in CG$ ,  $B \subseteq CG'$ ,  $(CG) \cap (CG') = \Lambda$ ; d. h. auch  $C$  ist ein regulärer Raum.

Wir schreiben im folgenden:

(2)  $A \subseteq B$ , wenn  $A^0 \subseteq B$ .

Aus  $A \subseteq B$  folgt  $A \subseteq B$ . Aus  $A' \subseteq A \subseteq B \subseteq B'$  folgt  $A' \subseteq B'$ .

**14·2·2.** Damit der Raum  $E$  regulär sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $a \in E$  und jeder Umgebung  $U_a$  eine Umgebung  $U_a^*$  gebe, so daß  $U_a^* \subseteq U_a$ .

Notwendig: Ist  $E$  regulär, so ist  $\{a\}$  von der abgeschlossenen Menge  $-U_a$  durch offene Mengen trennbar; d. h. es gibt offene Mengen  $G^*$ ,  $G^{**}$ , so daß  $\{a\} \subseteq G^*$ ,  $-U_a \subseteq G^{**}$ ,  $G^* \cap G^{**} = \Lambda$ . Dann ist  $G^* \subseteq -G^{**}$ , und da  $-G^{**}$  abgeschlossen, ist nach 10·5·1 auch  $(G^*)^0 \subseteq -G^{**}$ , also  $(G^*)^0 - U_a = \Lambda$ , also  $(G^*)^0 \subseteq U_a$ . Wir können also  $U_a^* = G^*$  setzen. Hinreichend: Ist  $B$  abgeschlossen und  $\{a\} \cap B = \Lambda$ , so ist  $-B$  eine Umgebung  $U_a$ ; nach Annahme gibt es ein  $U_a^* \subseteq U_a$ ; dann ist  $-(U_a^*)^0$  eine offene Menge  $\supseteq B$ ,

und da  $U_a^* - (U_a^*)^0 = A$ , sind  $\{a\}$  und  $B$  durch die offenen Mengen  $U_a^*$  und  $-(U_a^*)^0$  getrennt.

Indem man hierin  $\{a\}$  durch eine abgeschlossene Menge  $A$  und  $U_a$  durch eine offene Menge  $G \supseteq A$  ersetzt, beweist man ganz ebenso:

**14.2.21.** *Damit der Raum  $E$  normal sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jeder abgeschlossenen Menge  $A \subseteq E$  und jeder offenen Menge  $G \supseteq A$  eine offene Menge  $G^* \supseteq A$  gebe, so daß  $G^* \subseteq G$ .*

**14.2.3.** *Ist der Raum  $E$  separabel und regulär, so sind je zwei abgesonderte Mengen  $A$  und  $B$  durch offene Mengen trennbar.*

Sei  $\mathfrak{S}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen. Da  $A \cap B^0 = \emptyset$ , ist  $-B^0$  für jedes  $a \in A$  eine Umgebung  $U_a$ ; also gibt es nach 14.2.2 zu jedem  $a \in A$  eine Umgebung  $U_a^* \subseteq -B^0$ ; sodann gibt es ein  $H_a \in \mathfrak{S}$ , so daß  $a \in H_a$ ,  $H_a \subseteq U_a^*$ ; somit ist auch  $H_a \subseteq -B^0$ . Ebenso gibt es zu jedem  $b \in B$  ein  $H_b \in \mathfrak{S}$ , so daß  $b \in H_b$ ,  $H_b \subseteq -A^0$ . Da  $\mathfrak{S}$  abzählbar, gibt es nur abzählbar viele verschiedene  $H_a$ , etwa  $H_1, H_2, \dots$ , und ebenso nur abzählbar viele verschiedene  $H_b$ , etwa  $H'_1, H'_2, \dots$ . Wir setzen:  $G_1 = H_1$ ,  $G'_1 = H'_1 - G_1^0$ , allgemein:  $G_n = H_n - (G_1^0 + G_2^0 + \dots + G_{n-1}^0)$ ,  $G'_n = H'_n - (G_1^0 + G_2^0 + \dots + G_n^0)$ . Dann sind alle  $G_n, G'_n$  offen, also auch  $G = \bigcup_n G_n$ ,  $G' = \bigcup_n G'_n$ . Wegen  $H'_i \subseteq -A^0$  ist  $H'_i \cap A = \emptyset$ , also auch  $G'_i \cap A = \emptyset$ , und ebenso ist  $G_i^0 \cap B = \emptyset$ ; ist also  $H_n = H_a$  ( $a \in A$ ), so ist wegen  $a \in H_n$  auch  $a \in G_n$ , also ist  $A \subseteq G$ , und ebenso  $B \subseteq G'$ ; und da offenbar jedes  $G_i$  fremd zu jedem  $G'_j$ , ist  $G \cap G' = \emptyset$ , d. h.  $A$  und  $B$  sind durch die offenen Mengen  $G, G'$  getrennt.

Da nach 14.1.2 zwei fremde abgeschlossene Mengen abgesondert sind, ist in 14.2.3 enthalten:

**14.2.31.** *Jeder separable reguläre Raum ist normal.*

**14.2.4.** *In einem metrischen Raume  $E$  sind je zwei abgesonderte Mengen  $A$  und  $B$  durch offene Mengen trennbar.*

Dies bedarf eines Beweises nur, wenn  $A \supset \emptyset, B \supset \emptyset$ . Wir setzen  $G = [\{x \in A \mid d(x, B) > 0\}]$ ; dann ist  $G = \bigcup_{r>0} [\{x \in A \mid d(x, B) > r\}]$  (wo  $r$  alle positiven rationalen Zahlen durchläuft); da  $[\{x \in A \mid d(x, B) > r\}]$  und  $[\{x \in B \mid d(x, A) > r\}]$  nach 9.4.1 und 9.4.2 offen sind, so ist nach 10.1.1, 10.1.2 auch  $G$  offen. Für alle  $a \in A$  ist  $d(a, B) > 0$  und (wegen  $A \cap B^0 = \emptyset$  zufolge 10.5.5)  $d(a, B) > 0$ ; für alle  $a \in A$  gilt also  $a \in G$ , d. h. es ist  $A \subseteq G$ . Ebenso sieht man: die Menge  $G' = [\{x \in B \mid d(x, A) > 0\}]$  ist offen, und es ist  $B \subseteq G'$ . Da  $G \cap G' = \emptyset$ , ist 14.2.4 bewiesen.

Wegen 14.1.2 ist in 14.2.4 enthalten:

**14.2.41.** *Jeder metrische Raum ist normal.*

**14-2-5.** Ist  $A$  eine abgeschlossene,  $B$  eine offene Menge eines normalen Raumes und  $A \subseteq B$ , so gibt es zu jedem reellen  $x$  aus  $[0, 1]$  eine offene Menge  $G_x$ , so daß  $A \subseteq G_0$ ,  $B = G_1$  und  $G_{x'} \subseteq G_x$ , für  $0 \leq x' < x \leq 1$ .

Wir setzen  $B = G_1$ . Nach 14-2-21 gibt es ein offenes  $G_0$ , so daß  $A \subseteq G_0 \subseteq G_1$ . Dann ist  $G_0^0 \subseteq G_1$ , also gibt es nach 14-2-21 ein offenes  $G_{\frac{1}{2}}$ , so daß  $G_0^0 \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq G_1$ , d. h.  $G_0 \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq G_1$ . Ebenso gibt es offene Mengen  $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$ , so daß  $G_0 \subseteq G_{\frac{1}{4}} \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq G_{\frac{3}{4}} \subseteq G_1$  usf. Wir erhalten so zu jedem endlichen Dualbruch  $r$  aus  $[0, 1]$  eine offene Menge  $G_r$ , so daß aus  $r' < r''$  folgt  $G_{r'} \subseteq G_{r''}$ ; für jeden endlichen Dualbruch  $x$  aus  $[0, 1]$  ist dann:

$$(2-1) \quad G_x = \bigcup_{0 \leq r \leq x} G_r \quad (r \text{ durchläuft die endlichen Dualbrüche}),$$

und für alle übrigen  $x$  definieren wir  $G_x$  durch (2-1). Sei nun  $0 \leq x' < x'' \leq 1$ ; dann gibt es zwei endliche Dualbrüche  $r', r''$ , so daß  $x' < r' < r'' < x''$ ; wegen  $G_{x'} \subseteq G_{r'} \subseteq G_{r''} \subseteq G_{x''}$  ist dann auch  $G_{x'} \subseteq G_{x''}$ . Damit ist 14-2-5 bewiesen.

**14-2-6.** In einem separablen und regulären unendlichen Raume  $E$  gibt es  $\aleph$  Stücke.

Sei wie beim Beweise von 13-2-5  $A$  ein isolierter Teil von  $E$  der Mächtigkeit  $\aleph_0$  und  $B \subseteq A$ ; da  $A$  isoliert, sind  $B$  und  $A - B$  abgesondert. Nach 14-2-3 gibt es offene Mengen  $G_B, G'_B$ , so daß  $B \subseteq G_B, A - B \subseteq G'_B, G_B G'_B = A$ ; es ist also  $-G'_B$  eine abgeschlossene Menge  $\supseteq G_B$ , somit nach 10-5-1  $G_B^0 \subseteq -G'_B$ , also  $G_B^0(A - B) = A$ ; und da  $B \subseteq G_B^0$ , also  $B = A G_B^0$ , gehören zu verschiedenen  $B$  auch verschiedene  $G_B^0$ . Da es nach 5-2-1  $\aleph$  verschiedene Teile  $B$  von  $A$  gibt, gibt es also auch  $\aleph$  verschiedene  $G_B^0$ , also mindestens  $\aleph$  verschiedene Stücke. Und nach 13-2-51 gibt es höchstens  $\aleph$  verschiedene Stücke.

**14-2-61.** In einem separablen und regulären Raume  $E$ , dessen insichdichter Kern  $E_k \supset A$  ist, gibt es  $\aleph$  perfekte Mengen.

Nach 12-7-5 ist  $E_k$  perfekt, also abgeschlossen, also nach 14-2-11 regulär, und nach 13-1-2 ist  $E_k$  separabel; nach 14-2-6 gibt es also  $\aleph$  Stücke in  $E_k$ , und nach 12-5-2 ist jedes Stück in  $E_k$  perfekt.

Literatur: L. Vietoris, Monatsh. f. Math. u. Phys. 31 (1921) S. 190; H. Tietze, Math. Ann. 88 (1923) S. 290; P. Alexandroff u. P. Urysohn, Math. Ann. 92 (1924) S. 275; A. Tichonoff, Math. Ann. 95 (1926) S. 139. Ein allgemeiner Trennungssatz: K. Menger, Ergebn. e. math. Koll. 1 (1931) S. 16.

**3. Metrisierung.** Sei nun im topologischen Raume  $E$  eine reelle Funktion  $f(a)$  definiert, d. h. jedem  $a \in E$  sei eine (endliche) reelle Zahl  $f(a)$  zugeordnet. Eine solche Funktion heißt stetig im Punkte  $a$ , wenn es

zu jedem  $\delta > 0$  eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $|f(a') - f(a)| < \delta$  für alle  $a' \in U_a$ ; ist die Funktion stetig in jedem Punkte  $a \in E$ , so heißt sie stetig auf  $E$ .

**14.3.1.** Sind  $G$  und  $G'$  zwei offene Mengen des normalen Raumes  $E$ , und ist  $G \subseteq G'$ , so gibt es eine auf  $E$  stetige, der Ungleichung  $0 \leq f(a) \leq 1$  genügende reelle Funktion  $f(a)$ , so daß  $f(a) = 0$  für  $a \in G$ ,  $f(a) = 1$  für  $a \in (-G')$ .

Wegen  $G \subseteq G'$  ist  $G^0 \subseteq G'$ , es gibt also nach 14.2.5 zu jedem  $x \in [0, 1]$  eine offene Menge  $G_x$ , so daß  $G \subseteq G^0 \subseteq G_0$ ,  $G' = G_1$ ,  $G_{x'} \subseteq G_{x''}$  für  $0 \leq x' < x'' \leq 1$ ; wir setzen noch  $G_x = \Lambda$  für  $x < 0$ ,  $G_x = E$  für  $x > 1$ , so daß nun  $G_x$  für alle reellen  $x$  definiert ist. Sei  $a \in E$ ; wir bezeichnen mit  $f(a)$  das Infimum aller  $x$ , für die  $a \in G_x$ ; dann ist  $0 \leq f(a) \leq 1$ ; weil  $G \subseteq G_0$ , ist  $f(a) = 0$  für  $a \in G$ , und weil  $G' = G_1$ , also  $G_x \subseteq G'$  für  $x \leq 1$ , ist  $f(a) = 1$  für  $a \in (-G')$ . Es ist noch zu zeigen, daß  $f$  stetig auf  $E$  ist. Sei  $a \in E$  und  $\delta > 0$ ; sei ferner:  $f(a) - \delta < x_0 < x_1 < f(a) < x_2 < f(a) + \delta$ ; dann ist  $a \in G_{x_1}$ ,  $a \sim G_{x_1}$ , und mithin, wegen  $G_{x_0} \subseteq G_{x_1}$ , auch  $a \sim G_{x_0}^0$ ; also ist  $a \in G_{x_1} - G_{x_0}^0$ , und da  $G_{x_1} - G_{x_0}^0$  offen, ist  $G_{x_1} - G_{x_0}^0$  eine Umgebung  $U_a$ ; für alle  $a' \in G_{x_1} - G_{x_0}^0$  aber ist  $x_0 \leq f(a') \leq x_2$ , also  $f(a) - \delta < f(a') < f(a) + \delta$ , also  $|f(a') - f(a)| < \delta$ , w. z. b. w.

Sei nun  $E$  ein separabler und regulärer, also nach 14.2.31 auch normaler Raum; wir wollen zeigen, daß es eine mit  $E$  homöomorphe (§ 9, 1) Punktmenge des  $R_\omega$  (§ 9, 3) gibt. Sei  $\mathfrak{H}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$ . Nach 5.1.2 ist auch die Menge der Paare  $(H_n, H_{n'})$  abzählbar, also auch die Menge der Paare  $(H_n, H_{n'})$  mit  $H_n \subseteq H_{n'}$ ; seien  $P_1, P_2, \dots, P_\nu, \dots$  diese Paare. Ist  $P_\nu$  etwa das Paar  $(H_n, H_{n'})$ , so gibt es nach 14.3.1 eine auf  $E$  stetige, der Ungleichung  $0 \leq f_\nu(a) \leq 1$  genügende Funktion  $f_\nu(a)$ , so daß  $f_\nu(a) = 0$  für  $a \in H_n$ ,  $f_\nu(a) = 1$  für  $a \in (-H_{n'})$ . Wir bilden nun zu jedem  $a \in E$  die Zahlenfolge

$$(3) \quad a_\nu = \frac{1}{\nu} f_\nu(a) \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

Wegen  $0 \leq a_\nu \leq \frac{1}{\nu}$  hat sie endliche Quadratsumme, also ist  $((a_\nu))$  ein Punkt des  $R_\omega$ . Bezeichnen wir die Menge aller Punkte  $((a_\nu)) \in R_\omega$ , deren Koordinaten der Ungleichung  $0 \leq a_\nu \leq \frac{1}{\nu}$  genügen, mit  $Q_\omega$ , so ist durch (3) eine Abbildung des Raumes  $E$  auf eine Punktmenge  $E^* \subseteq Q_\omega$  gegeben.

**14.3.2.** Die Abbildung (3) des regulären und separablen Raumes  $E$  auf die Punktmenge  $E^* \subseteq Q_\omega$  ist eineindeutig.

Da sie jedenfalls eindeutig ist, ist nur zu zeigen: verschiedenen Punkten  $a, a'$  von  $E$  entsprechen verschiedene Punkte  $((a_\nu)), ((a'_\nu))$  von  $E^*$ . Nach

Axiom 5<sub>1</sub>) (§ 9, 1) gibt es eine in  $E$  offene Menge  $G$ , so daß  $a \in G$ ,  $a' \sim \varepsilon G$ ; im ausgezeichneten Systeme  $\S$  in  $E$  offener Mengen gibt es ein  $H_n$ , so daß  $H_n \subseteq G$ ,  $a \in H_n$ ; wegen  $a' \sim \varepsilon G$ , ist  $a' \sim \varepsilon H_n$ . Nach 14.2.2 gibt es ein  $U_a^* \subseteq H_n$ , und weiter gibt es ein  $H_n \in \S$ , so daß  $H_n \subseteq U_a^*$ ,  $a \in H_n$ . Wegen  $H_n \subseteq U_a^* \subseteq H_n$ , ist  $H_n \subseteq H_n$ , d. h.  $(H_n, H_n)$  ist eines unserer Paare  $P_\nu$ , etwa  $P_{\bar{\nu}}$ . Für die zugehörige Funktion  $f_{\bar{\nu}}$  gilt, weil  $a \in H_n$ ,  $a' \sim \varepsilon H_n$ , ist:  $f_{\bar{\nu}}(a) = 0$ ,  $f_{\bar{\nu}}(a') = 1$ ; für die nach (3) den Punkten  $a$ ,  $a'$  zugeordneten Punkte  $((a_\nu))$ ,  $((a'_\nu))$  des  $R_\omega$  ist also  $a_{\bar{\nu}} \neq a'_{\bar{\nu}}$ , mithin ist  $((a_\nu)) \neq ((a'_\nu))$ .

**14.3.21.** Die eindeutige Abbildung (3) führt jede in  $E$  offene Menge in eine in  $E^*$  offene Menge über.

Sei  $G$  offen in  $E$  und  $G^* \subseteq E^*$  das Bild von  $G$ . Ist  $a \in G$ , so gibt es ein  $H_n \in \S$ , so daß  $H_n \subseteq G$ ,  $a \in H_n$ ; nach 14.2.2 gibt es ein  $U_a^* \subseteq H_n$ , und weiter gibt es ein  $H_n \in \S$ , so daß  $H_n \subseteq U_a^*$ ,  $a \in H_n$ ; dann ist auch  $H_n \subseteq H_n$ , also ist  $(H_n, H_n)$  eines unserer Paare  $P_\nu$ , etwa  $P_{\bar{\nu}}$ . Für die zugehörige Funktion  $f_{\bar{\nu}}$  ist:  $f_{\bar{\nu}}(a) = 0$  und  $f_{\bar{\nu}}(a') = 1$  für alle  $a' \in (-G)$ . Ist also  $a' \in (-G)$  und sind  $b = ((a_\nu))$  und  $b' = ((a'_\nu))$  die Bildpunkte von  $a$  und  $a'$  vermöge der Abbildung (3), so ist  $a_{\bar{\nu}} = 0$ ,  $a'_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\bar{\nu}}$ , also nach § 9, (3.3):

$b b' \geq \frac{1}{\bar{\nu}}$ . Aus  $a' \in (-G)$  folgt also  $b b' \geq \frac{1}{\bar{\nu}}$ ; daraus folgt umgekehrt: ist

$b' \in E^*$  und  $b b' < \frac{1}{\bar{\nu}}$ , so gilt für das Urbild  $a' \in E$  von  $b'$ :  $a' \notin G$ ; d. h. für

alle  $b' \in E^*$  mit  $b b' < \frac{1}{\bar{\nu}}$  gilt  $b' \notin G^*$ ; nach 10.3.1 und 10.3.6 ist also  $G^*$  offen in  $E^*$ , w. z. b. w.

**14.3.22.** Die eindeutige Abbildung (3) führt jede in  $E^*$  offene Menge in eine in  $E$  offene Menge über.

Sei  $G^*$  offen in  $E^*$  und  $G \subseteq E$  das Urbild von  $G^*$  vermöge der Abbildung (3). Ist  $b \in G^*$ , so gibt es nach 10.3.1 und 10.3.6 ein  $\varrho > 0$ , so daß für alle  $b' \in E^*$  mit  $b b' < \varrho$  gilt:  $b' \in G^*$ . Wir wählen  $\bar{\nu}$  so groß, daß

$$\sum_{\nu > \bar{\nu}} \frac{1}{\nu^2} < \frac{\varrho^2}{2}.$$

Sei  $a$  das Urbild von  $b$ ; wegen der Stetigkeit von  $f_\nu$  gibt es eine Umgebung  $U_{\nu a}$ , so daß

$$|f_\nu(a') - f_\nu(a)| < \frac{\varrho}{\sqrt{2\bar{\nu}}} \quad \text{für alle } a' \in U_{\nu a}.$$

Wir setzen  $U_a = U_{1a} U_{2a} \dots U_{\bar{\nu}a}$ ; dann gilt für alle  $a' \in U_a$ , wenn  $b'$  das Bild von  $a'$  vermöge (3) bedeutet:

$$(b b')^2 = \sum_{\nu} \frac{1}{\nu^2} (f_\nu(a) - f_\nu(a'))^2 \leq \sum_{\nu=1}^{\bar{\nu}} (f_\nu(a) - f_\nu(a'))^2 + \sum_{\nu > \bar{\nu}} \frac{1}{\nu^2} < \varrho^2,$$

also  $b b' < \varrho$ ; aus  $b b' < \varrho$  folgt aber, wie wir sahen:  $b' \in G^*$ ; das Bild jedes  $a' \in U_a$  gehört also zu  $G^*$ , d. h.  $U_a \subseteq G$ ; also ist  $a$  innerer Punkt von  $G$ , und nach 10·3·6 ist  $G$  offen.

Die Sätze 14·3·2, 14·3·21, 14·3·22 besagen:

**14·3·3.** *Jeder separable und reguläre topologische Raum  $E$  ist homöomorph einer Punktmenge  $E^* \subseteq Q_\omega$ .*

Seien nun  $a, a'$  zwei Punkte von  $E$ , und  $b, b'$  ihre Bildpunkte im  $R_\omega$ ; definieren wir dann den Abstand  $a a'$  durch:  $a a' = b b'$ , so ist der topologische Raum  $E$  zu einem metrischen geworden (der mit  $E^*$  isometrisch ist), und aus 14·3·21, 14·3·22 folgt, daß die offenen Mengen des topologischen Raumes  $E$  mit den nach § 9, 2 definierten offenen Mengen dieses metrischen Raumes übereinstimmen. Wir drücken das so aus:

**14·3·31.** *Jeder separable und reguläre topologische Raum ist metrisierbar.*

Da die wichtigeren topologischen Räume durchweg separabel und regulär sind, bedeutet also Beschränkung auf metrische Räume keine wesentliche Einschränkung.

Literatur: P. Urysohn, Math. Ann. 94 (1925) S. 309; A. D. Pitcher und E. W. Chittenden, Am. Trans. 19 (1918) S. 66; 20 (1919) S. 213; L. Vietoris, Jahresber. Math. Ver. 36 (1927), S. 14 der „Angel. d. D. Math. Ver.“

## § 15. Kompakte Mengen.

**1. Kompakte Mengen.** Die Menge  $A$  eines topologischen Raumes heißt kompakt, wenn für jeden unendlichen Teil  $B$  von  $A$  gilt:  $B^1 \supset A$ . Die leere Menge, jede endliche Menge ist kompakt.

Aus 5·1·5 und 10·4·4 folgt:

**15·1·1.** *Damit  $A$  kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden abzählbar unendlichen Teil  $B$  von  $A$  gelte:  $B^1 \supset A$ .*

**15·1·2.** *Jeder Teil einer kompakten Menge ist kompakt.*

**15·1·3.** *Die Summe zweier kompakter Mengen  $A, B$  ist kompakt.*

Denn ist  $C$  ein unendlicher Teil von  $A + B$ , so ist auch mindestens eine der beiden Mengen  $A C, B C$  unendlich, etwa  $A C$ ; dann ist  $(A C)^1 \supset A$ , also nach 10·4·4 auch  $C^1 \supset A$ .

Aus 15·1·2, 15·1·3 folgt:

**15·1·31.** *Das System aller kompakten Mengen eines topologischen Raumes ist ein  $\delta$ -Körper.*

Aus 10·4·7 folgt unmittelbar:

**15·1·4.** *Ist  $A$  eine kompakte Menge eines metrischen Raumes, so ist jedes  $\varrho$ -Netz in  $A$  endlich.*

Aus 15.1.4 und 13.1.6 folgt:

**15.1.41.** *Jede kompakte metrische Menge ist separabel.*

**15.1.5.** *Jede kompakte Menge  $A$  eines metrischen Raumes ist beschränkt.*

Sei  $A$  nicht beschränkt und  $c \in A$ . Nach 9.6.21 gibt es ein  $a_n \in A$ , so daß  $a_n c > n$ . Diese  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bilden einen unendlichen Teil  $B$  von  $A$ ; es genügt zu zeigen:  $B^1 = A$ . Wäre  $b \in B^1$ , so wäre nach 10.4.1  $a_n b < 1$  für unendlich viele  $n$ , also  $a_n c < b c + 1$  für unendlich viele  $n$ , im Widerspruch zu  $a_n c > n$ .

Aus 15.1.5 folgt, daß der  $R_n$  und der  $R_\omega$  nicht kompakt sind; in 20.2.81 werden wir sehen, daß jede beschränkte Punktmenge des  $R_n$  kompakt ist; hingegen gibt es im  $R_\omega$  beschränkte Punktmengen, die nicht kompakt sind; sei z. B.  $b_n$  der Punkt des  $R_\omega$ , dessen  $\nu$ -te Koordinate  $a_{n\nu} = 0$  ist für  $\nu \neq n$ , während seine  $n$ -te Koordinate  $a_{nn} = 1$  sei; die unendliche Menge  $B$  der Punkte  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist dann zugleich ein  $\sqrt{2}$ -Netz in  $B$ , also nach 15.1.4 nicht kompakt, aber beschränkt. — Der  $R_0$  ist beschränkt, aber nicht kompakt: sei z. B.  $b_n$  der Punkt des  $R_0$ , dessen sämtliche Koordinaten  $k_{n\nu} = n$  sind; die unendliche Menge  $B$  der Punkte  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist dann ein 1-Netz im  $R_0$ , also ist der  $R_0$  nach 15.1.4 nicht kompakt.

Der Begriff kompakt hat relativen Charakter; ist  $A \subseteq C$ , so bedeutet die Aussage: „ $A$  ist kompakt in  $C$ “: für jeden unendlichen Teil  $B$  von  $A$  ist  $B^1 C \supset A$ .

Offenbar gilt:

**15.1.6.** *Ist  $A$  kompakt in  $C$  und  $C \subseteq C'$ , so ist  $A$  auch kompakt in  $C'$ .*

Literatur: Der Begriff „kompakt“ wurde eingeführt von M. Fréchet, Rend. Pal. 22 (1906) S. 6.

**2. In sich kompakte Mengen.** Ist die Menge  $A$  kompakt in  $A$ , d. h. ist für jeden unendlichen Teil  $B$  von  $A$ :  $B^1 A \supset A$ , so heißt sie in sich kompakt. Dieser Begriff hat absoluten Charakter. Jede in sich kompakte Menge ist kompakt.

Wie 15.1.3 beweist man:

**15.2.1.** *Die Summe zweier in sich kompakter Mengen ist in sich kompakt.*

**15.2.2.** *Ist  $A$  kompakt und abgeschlossen, so ist  $A$  in sich kompakt.*

Denn ist  $B$  ein unendlicher Teil von  $A$ , so ist  $B^1 \supset A$ ; wegen  $B \subseteq A$  ist  $B^1 \subseteq A^1$ ; weil  $A$  abgeschlossen, ist  $A^1 \subseteq A$ ; also ist  $B^1 \subseteq A$ , d. h.  $B^1 A = B^1$ ; wegen  $B^1 \supset A$  ist also auch  $B^1 A \supset A$ .

Die Umkehrung gilt nicht allgemein. Wohl aber gilt:

**15.2.21.** *Eine separable, in sich kompakte Menge  $A$  ist kompakt und abgeschlossen.*



Da jede in sich kompakte Menge auch kompakt ist, haben wir nur zu zeigen:  $A$  ist abgeschlossen. Sei  $a \in A^1$ . Nach 13.1.71 gibt es ein  $B \subseteq A$ , so daß  $B^1 = \{a\}$ ; da  $A$  in sich kompakt, muß also  $a \in A$  sein. Aus  $a \in A^1$  folgt also  $a \in A$ , d. h.  $A$  ist abgeschlossen.

Aus 15.2.2, 15.1.41, 15.2.21 folgt:

**15.2.22.** *Damit die Menge  $A$  eines metrischen Raumes in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie kompakt und abgeschlossen sei.*

**15.2.3.** *Ist  $A$  in sich kompakt, so auch jeder in  $A$  abgeschlossene Teil  $C$  von  $A$ .*

Nach 15.1.2 ist  $C$  kompakt in  $A$ ; für jeden unendlichen Teil  $B$  von  $C$  gilt also:  $B^1 A \supset A$ . Da  $C$  abgeschlossen in  $A$ , ist aber nach 10.8.2  $B^1 A \subseteq C$ , also auch  $B^1 A \subseteq B^1 C$ ; wegen  $B^1 A \supset A$  ist also auch  $B^1 C \supset A$ .

**15.2.31.** *Ist die in sich kompakte Menge  $A$  separabel (oder Menge eines metrischen Raumes), so ist, damit die Menge  $C \subseteq A$  in sich kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß  $C$  abgeschlossen sei.*

Notwendig: Dies folgt wegen 13.1.2 aus 15.2.21 (bzw. aus 15.2.22). Hinreichend: Nach 10.8.51 ist  $C$  abgeschlossen in  $A$ ; die Behauptung folgt also aus 15.2.3.

**15.2.4.** *Ist die Menge  $A$  eines metrischen Raumes kompakt, so ist  $A^0$  in sich kompakt.*

Sei  $B$  ein abzählbar unendlicher Teil von  $A^0$ , bestehend aus den Punkten  $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ ; ist  $b_n \in A$ , so setzen wir  $b_n = c_n$ ; ist  $b_n \sim \varepsilon A$ , also  $b_n \in A^1$ , so gibt es nach 10.4.1 ein  $c_n \in A$ , so daß  $c_n b_n < \frac{1}{n}$  und  $c_n \neq c_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n-1$ ); die  $c_n$  bilden dann einen unendlichen Teil  $C$  von  $A$ , und weil  $A$  kompakt, ist  $C^1 \supset A$ . Sei  $c \in C^1$  und  $\varrho > 0$ ; nach 10.4.1 ist  $c_n c < \varrho$  für unendlich viele  $n$ ; wegen  $c_n b_n < \frac{1}{n}$  ist also auch  $b_n c < 2\varrho$  für unendlich viele  $n$ , mithin ist nach 10.4.1  $c \in B^1$ . Also ist  $B^1 \supset A$ , also ist  $A^0$  nach 15.1.1 kompakt, also nach 15.2.2 auch in sich kompakt.

**15.2.5.** *In einem metrischen Raume gibt es zu jeder in sich kompakten Menge  $B \supset A$  und jedem Punkte  $a$  ein  $b \in B$ , so daß  $a b = a B$ .*

Nach § 9 (4) gibt es in  $B$  eine Punktfolge  $((b_n))$ , so daß  $a b_n \rightarrow a B$ . Falls hierin für kein  $n$ :  $a b_n = a B$ , so sind unter den  $b_n$  unendlich viele verschiedene. Weil  $B$  in sich kompakt, hat dann die Menge der  $b_n$  einen Häufungspunkt  $b \in B$ ; für jedes  $\varrho > 0$  ist also nach 10.4.1  $b_n b < \varrho$  für unendlich viele  $n$ . Aus  $a b \leq a b_n + b_n b$  folgt also, weil  $a b_n \rightarrow a B$  war:  $a b \leq a B$ , mithin  $a b = a B$ .

**15.2.51.** In einem metrischen Raume gibt es zu jeder Menge  $B \supset A$  und jeder in sich kompakten Menge  $A \supset A$  ein  $a \in A$ , so daß  $aB = \overline{AB}$ .

Nach § 9 (5.1) gibt es in  $A$  eine Punktfolge  $((a_n))$ , so daß  $a_n B \rightarrow \overline{AB}$ . Ist hierin für kein  $n$ :  $a_n B = \overline{AB}$ , so sind unter den  $a_n$  unendlich viele verschiedene, und die Menge der  $a_n$  hat einen Häufungspunkt  $a \in A$ . Nach § 9 (4.1) ist  $aB \leq a_n B + a_n B$ , und da hierin  $a_n B \rightarrow \overline{AB}$ , und da für jedes  $\varrho > 0$ :  $a_n B < \varrho$  für unendlich viele  $n$ , folgt hieraus  $aB \leq \overline{AB}$ , mithin  $aB = \overline{AB}$ .

Aus 15.2.51 und 15.2.5 folgt:

**15.2.52.** Sind  $A$  und  $B$  in sich kompakte Mengen  $\supset A$  eines metrischen Raumes, so gibt es ein  $a \in A$  und ein  $b \in B$ , so daß  $ab = \overline{AB}$ .

**15.2.53.** Ist  $A \supset A$  eine in sich kompakte,  $B \supset A$  eine abgeschlossene Menge eines metrischen Raumes, und ist  $\overline{AB} = 0$ , so ist  $AB \supset A$ .

Nach 15.2.51 gibt es ein  $a \in A$ , so daß  $aB = 0$ . Nach 10.5.5 ist dann  $a \in B^0$ , also, weil  $B$  abgeschlossen, nach 10.5.6  $a \in B$ . Also ist  $a \in AB$ .

**15.2.54.** In einem metrischen Raume gibt es zu jeder in sich kompakten Menge  $A \supset A$  und zu jeder offenen Menge  $G \supseteq A$  ein  $\varrho > 0$ , so daß  $U_{A\varrho} \subseteq G$ .

Da  $-G$  abgeschlossen und  $A - G = A$ , folgt aus 15.2.53:  $\overline{A(-G)} > 0$ ; für  $\varrho < \overline{A(-G)}$  ist  $U_{A\varrho} \subseteq G$ .

Literatur: Auf die Bedeutung des Begriffes „in sich kompakt“ hat zuerst hingewiesen: H. Tietze, Math. Zeitschr. 5 (1919) S. 288.

**3. Durchschnittsatz.** Eine charakteristische Eigenschaft der in sich kompakten Mengen liefert der Satz:

**15.3.1.** Damit  $A$  in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß für jede monoton abnehmende Folge  $((A_n))$  nicht leerer, in  $A$  abgeschlossener Mengen auch  $\bigcap_n A_n \supset A$  sei.

Notwendig: Sei  $((A_n))$  eine monoton abnehmende Folge in  $A$  abgeschlossener Mengen mit  $\bigcap_n A_n = A$ , und sei  $b_n \in A_n$ . Die Menge  $B$  der  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ist dann unendlich. Da  $b_{n'} \in A_n$  für  $n' \geq n$ , ist  $B^1 \subseteq A_n^1$ , also weil  $A_n$  abgeschlossen in  $A$ , nach 10.8.2 auch  $B^1 A \subseteq A_n$ , also weil  $\bigcap_n A_n = A$ , auch  $B^1 A = A$ ; weil  $B$  ein unendlicher Teil von  $A$  war, ist somit  $A$  nicht in sich kompakt. Hinreichend: Ist  $A$  nicht in sich kompakt, so gibt es ein abzählbar unendliches  $B \subseteq A$ , so daß  $B^1 A = A$ . Seien  $b_1, b_2, \dots, b_\nu, \dots$  die Punkte von  $B$ , und sei  $A_n$  die Menge der  $b_\nu$  mit  $\nu \geq n$ ; wegen  $B^1 A = A$  ist auch  $A_n^1 A = A$ , also nach 10.8.2  $A_n$  abgeschlossen in  $A$ , es ist  $A_{n+1} \subseteq A_n$  und  $\bigcap_n A_n = A$ .

Durch Übergang zu den Komplementen erhält man aus 15.3.1:

**15.3.11.** *Damit  $A$  in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß in jeder monoton wachsenden Folge  $((B_n))$  in  $A$  offener Mengen mit  $\bigcup_n B_n = A$  fast alle  $B_n = A$  seien.*

**15.3.2.** *Ist  $\beta$  eine Grenzzahl  $> 0$ , ist  $A$  separabel und in sich kompakt, und ist die  $\xi$ -te Kohärenz  $A_\xi \supset A$  für alle  $\xi < \beta$ , so ist auch  $A_\beta \supset A$ .*

Wäre  $A_\beta = A$ , so wäre  $A_\beta$  die letzte Kohärenz von  $A$ , somit nach 13.2.4:  $\beta \in Z_0$ . Nach 8.4.21 gibt es dann eine wachsende Folge  $((\beta_n))$  von Ordinalzahlen mit  $\lim_n \beta_n = \beta$ . Wegen § 12 (8.1) und 12.8.1 ist dann  $((A_{\beta_n}))$  eine monoton abnehmende Folge in  $A$  abgeschlossener Mengen, und nach § 12 (8) ist  $A_\beta = \bigcap_n A_{\beta_n}$ . Wegen  $A_{\beta_n} \supset A$ ,  $A_\beta = A$  steht das in Widerspruch zu 15.3.1.

Literatur: Der Durchschnittssatz 15.3.1 geht im wesentlichen auf G. Cantor zurück: Math. Ann. 17 (1880) S. 358.

**4. Halbkompakte Mengen.** Eine Menge, die Summe abzählbar vieler in sich kompakter Mengen ist, heißt halbkompakt. Dieser Begriff hat absoluten Charakter. Jede abzählbare Menge ist halbkompakt; in 20.2.82 werden wir sehen, daß der  $R_n$  halbkompakt ist. Aus der Definition folgt unmittelbar:

**15.4.1.** *Die Summe abzählbar vieler halbkompakter Mengen ist halbkompakt.*

Aus 15.1.41 und 13.1.5 folgt:

**15.4.2.** *Jede halbkompakte metrische Menge ist separabel.*

**15.4.3.** *Jede separable halbkompakte Menge ist ein  $F_\sigma$ .*

Dies folgt aus 15.2.21.

**15.4.4.** *Ist  $A$  halbkompakt, so auch jedes  $F_\sigma$  in  $A$ .*

Sei  $A = \bigcup_n A_n$ , wo  $A_n$  in sich kompakt, und sei  $B = \bigcup_n F_n$ , wo  $F_n$  abgeschlossen in  $A$ . Dann ist  $B = \bigcup_n F_n A_n$ ; hierin ist  $F_n A_n$  abgeschlossen in  $A_n$ , also nach 15.2.3 in sich kompakt; also ist  $B$  als Summe abzählbar vieler in sich kompakter Mengen halbkompakt.

**15.4.41.** *Ist die halbkompakte Menge  $A$  separabel (oder Menge eines metrischen Raumes), so ist, damit die Menge  $C \subseteq A$  halbkompakt sei, notwendig und hinreichend, daß  $C$  ein  $F_\sigma$  sei.*

Notwendig: Dies folgt wegen 13.1.2 aus 15.4.3 und 15.4.2. Hinreichend: Da nach 10.9.21  $C$  ein  $F_\sigma$  in  $A$ , folgt dies aus 15.4.4.

**5. Überdeckungssätze.** Wir knüpfen wieder an den Begriff eines die Menge  $A$  überdeckenden Systemes (§ 13, 3).

**15-5-1.** *Damit  $A$  in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jedem abzählbaren,  $A$  überdeckenden Systeme  $\mathfrak{C}$  ein endliches  $A$  überdeckendes Teilsystem gebe.*

Notwendig: Seien  $C_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) die in  $A$  offenen Mengen von  $\mathfrak{C}$ . Setzen wir  $B_n = C_1 + \dots + C_n$ , so bilden die  $B_n$  eine monoton wachsende Folge in  $A$  offener Mengen mit  $\bigcup_n B_n = A$ . Also sind nach 15-3-11 fast alle  $B_n = A$ . Ist aber  $B_n = A$ , so bilden  $C_1, C_2, \dots, C_n$  ein  $A$  überdeckendes endliches Teilsystem von  $\mathfrak{C}$ . Hinreichend: Jede monoton wachsende Folge  $((B_n))$  in  $A$  offener Mengen mit  $\bigcup_n B_n = A$  ist ein abzählbares,  $A$  überdeckendes System  $\mathfrak{C}$ . Nach Annahme gibt es darin ein endliches  $A$  überdeckendes Teilsystem, bestehend etwa aus  $B_1, B_2, \dots, B_n$ . D. h. es ist  $B_n = B_1 + B_2 + \dots + B_n = A$ , und wegen  $B_{n'} \supseteq B_n$  für  $n' \geq n$  ist auch  $B_{n'} = A$  für  $n' \geq n$ . Die Bedingung von 15-3-11 ist also erfüllt, somit ist  $A$  in sich kompakt.

**15-5-11.** *Ist  $A$  separabel (oder eine metrische Menge), so ist, damit  $A$  in sich kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß es in jedem  $A$  überdeckenden Systeme  $\mathfrak{B}$  ein endliches  $A$  überdeckendes Teilsystem gebe.*

Notwendig. Nach 15-1-41 ist jede in sich kompakte Menge eines metrischen Raumes separabel. Ist  $A$  separabel, so gibt es nach 13-3-1 in  $\mathfrak{B}$  ein abzählbares  $A$  überdeckendes Teilsystem  $\mathfrak{C}$ ; ist  $A$  in sich kompakt, so gibt es weiter nach 15-5-1 in  $\mathfrak{C}$  ein  $A$  überdeckendes endliches Teilsystem. Hinreichend: Dies ist ein Spezialfall von 15-5-1.

Durch Übergang zu den Komplementen findet man, daß 15-5-11 gleichbedeutend ist mit:

**15-5-12.** *Ist  $A$  separabel (oder eine metrische Menge), so ist, damit  $A$  in sich kompakt sei, notwendig und hinreichend, daß es für jedes System  $\mathfrak{C}$  in  $A$  abgeschlossener Mengen, von denen je endlich viele Mengen einen Punkt gemein haben, auch einen Punkt gebe, der allen  $C \in \mathfrak{C}$  gemein ist.*

Ist  $((\mathfrak{B}_n))$  eine Folge von Überdeckungssystemen der Menge  $A$ , so heißt ein aus abzählbar vielen in  $A$  offenen Mengen  $B_1, B_2, \dots, B_n, \dots$  bestehendes Überdeckungssystem  $\mathfrak{B}$  von  $A$  eine Auswahlüberdeckung aus  $((\mathfrak{B}_n))$ , wenn jede Menge  $B_n \in \mathfrak{B}$  Summe endlich vieler Mengen des Systems  $\mathfrak{B}_n$  ist.

**15-5-2.** *Ist die halbkompakte Menge  $A$  separabel (oder eine metrische Menge), so gibt es zu jeder Folge  $((\mathfrak{B}_n))$  von Überdeckungssystemen von  $A$  eine Auswahlüberdeckung  $\mathfrak{B}$ .*

Sei  $A = S A_n$ , wo  $A_n$  in sich kompakt. Da die Durchschnitte der Mengen von  $\mathfrak{B}$ , mit  $A_n$ , ein  $A_n$  überdeckendes System bilden, gibt es nach 15-5-11

in  $\mathfrak{B}$ , ein endliches Teilsystem  $\mathfrak{B}'$ , so daß, wenn  $B$ , die Summe der Mengen von  $\mathfrak{B}'$  bedeutet:  $A \subseteq B$ . Dann ist  $B_1, B_2, \dots, B_r, \dots$  die gesuchte Auswahlüberdeckung  $\mathfrak{B}$ .

Eine leichte Verschärfung dieses Resultates liefert der Satz:

**15.5.21.** *Gibt es zu jeder Folge  $((\mathfrak{B}_r))$  von Überdeckungssystemen der Menge  $A$  eine Auswahlüberdeckung  $\mathfrak{B}$ , so gibt es auch eine Auswahlüberdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_r, \dots$  aus  $((\mathfrak{B}_r))$ , so daß für jeden Punkt  $a \in A$  gilt:  $a \in B_r$  für unendlich viele  $r$ .*

Nach Annahme gibt es zur Folge  $\mathfrak{B}, \mathfrak{B}_{r+1}, \dots, \mathfrak{B}_{r+n}, \dots$  von Überdeckungssystemen eine Auswahlüberdeckung  $B_r, B_{r+1}, \dots, B_{r+n}, \dots$ , wo  $B_{r+n}$  Summe endlich vieler Mengen aus  $\mathfrak{B}_{r+n}$ ; wir setzen:  $B_r = B_{1,r} + B_{2,r} + \dots + B_{r,r}$ ; dann ist  $B_r$  Summe endlich vieler Mengen aus  $\mathfrak{B}_r$ . Sei  $a \in A$ ; zu jedem  $r^*$  gibt es ein  $v \geq r^*$ , so daß  $a \in B_{r^*}$ , und mithin  $a \in B_r$ ; also gilt  $a \in B_r$  für unendlich viele  $r$ .

Literatur: Der Überdeckungssatz 15.5.1 geht zurück auf É. Borel, Ann. ée. norm. (3) 12 (1895) S. 51, der Überdeckungssatz 15.5.11 auf H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives (Paris 1904) S. 105. Der Überdeckungssatz 15.5.2 stammt im wesentlichen von K. Menger, Wien. Ber. 133 (1924) S. 421; vgl. hierzu auch W. Hurewicz, Math. Zeitschr. 24 (1926) S. 401; Fund. math. 9 (1927) S. 193; W. Sierpiński, Fund. math. 8 (1926) S. 223. Eine zusammenfassende Darstellung der verschiedenen Überdeckungstheoreme: T. H. Hildebrandt, Am. Bull. 32 (1926) S. 423; K. Menger, Erg. e. math. Koll. 2 (1932) S. 23.

## § 16. Zusammenhängende Mengen.

**1. Zusammenhängende Mengen.** In jeder Menge  $A$  ist  $A$  und  $A$  sowohl offen als auch abgeschlossen. Wir nennen nun eine Menge  $A$  zusammenhängend, wenn es außer  $A$  und  $A$  keinen Teil von  $A$  gibt, der gleichzeitig offen und abgeschlossen in  $A$  ist; anderenfalls heißt  $A$  unzusammenhängend. Diese Begriffe haben absoluten Charakter. — Da das Komplement (bezüglich  $A$ ) einer in  $A$  offenen Menge abgeschlossen in  $A$ , das Komplement einer in  $A$  abgeschlossenen Menge offen in  $A$  ist, haben wir:

**16.1.1.** *Die Menge  $A$  ist unzusammenhängend dann und nur dann, wenn es eine Zerlegung  $A = A_1 + A_2$  von  $A$  in zwei fremde Summanden gibt, die beide  $\supset A$  und beide offen (abgeschlossen) in  $A$  sind.*

Wegen 10.8.11 folgt daraus insbesondere:

**16.1.11.** *Eine offene (abgeschlossene) Menge ist unzusammenhängend dann und nur dann, wenn sie in zwei fremde offene (abgeschlossene) Summanden  $\supset A$  zerlegt werden kann.*

Zufolge 14.1.11 ist 16.1.1 gleichbedeutend mit:

**16.1.12.** Die Menge  $A$  ist unzusammenhängend dann und nur dann, wenn es eine Zerlegung  $A = A_1 + A_2$  von  $A$  in zwei abgesonderte Summanden  $\supset A$  gibt.

**16.1.2.** Ist  $A = A_1 + A_2$  eine Zerlegung von  $A$  in zwei abgesonderte Teile, so gilt für jeden zusammenhängenden Teil  $B$  von  $A$  entweder  $B \subseteq A_1$  oder  $B \subseteq A_2$ .

Denn ist  $B A_1 \supset A$  und  $B A_2 \supset A$ , so ist  $B = A_1 B + A_2 B$  zufolge 14.1.8 eine Zerlegung von  $B$  in zwei nicht leere abgesonderte Teile, d. h.  $B$  ist unzusammenhängend.

Daraus folgt wegen 16.1.12 unmittelbar:

**16.1.21.** Gibt es zu je zwei Punkten  $a_1$  und  $a_2$  von  $A$  einen zusammenhängenden Teil  $B$  von  $A$ , so daß  $a_1 \in B$ ,  $a_2 \in B$ , so ist  $A$  zusammenhängend.

Die leere Menge, jede Menge  $\{a\}$  ist zusammenhängend; jede endliche Menge mit mehr als einem Element ist unzusammenhängend.

**16.1.3.** Die einzigen zusammenhängenden Mengen des  $R_1$  sind:  $A$ ; die Mengen  $\{a\}$ , die Intervalle  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$ ; die Halbgeraden  $x > a$ ,  $x < a$ ; die Halbgeraden  $x \geq a$ ,  $x \leq a$ ; der  $R_1$  selbst.

Um zu beweisen, daß alle diese Mengen zusammenhängend sind, genügt es zufolge 16.1.21 zu zeigen, daß die Intervalle  $[a, b]$  zusammenhängend sind. Sei also  $[a, b] = A_1 + A_2$  eine Zerlegung von  $[a, b]$  in zwei fremde Summanden  $\supset A$ , und sei  $A_1$  abgeschlossen; es ist nach 16.1.11 zu zeigen, daß  $A_2$  nicht abgeschlossen sein kann; sei  $a_1 \in A_1$ ,  $a_2 \in A_2$  und etwa  $a_1 < a_2$ ; sei  $c$  das Supremum aller  $x \in A_1$ , die der Ungleichung  $a_1 \leq x < a_2$  genügen; weil  $A_1$  abgeschlossen, ist  $c \in A_1$ , also  $c < a_2$ , und es ist  $(c, a_2] \subseteq A_2$ ; daher ist  $c$  Häufungspunkt von  $A_2$ , wegen  $c \in A_1$  aber ist  $c \sim \varepsilon A_2$ , d. h.  $A_2$  ist nicht abgeschlossen, w. z. b. w. — Um zu beweisen, daß es außer den in 16.1.3 aufgezählten keine anderen zusammenhängenden Mengen des  $R_1$  gibt, genügt es, zu zeigen: ist  $A \subseteq R_1$  und gibt es im  $R_1$  drei Punkte  $a_1 < a_3 < a_2$ , so daß  $a_1 \in A$ ,  $a_2 \in A$ ,  $a_3 \sim \varepsilon A$ , so ist  $A$  unzusammenhängend. Seien zu dem Zwecke  $A_1$  und  $A_2$  die Durchschnitte von  $A$  mit den Halbgeraden  $x < a_3$ ,  $x > a_3$ ; dann ist  $A = A_1 + A_2$ ,  $A_1 \supset A$ ,  $A_2 \supset A$ ,  $A_1 A_2 = A$ , und  $A_1, A_2$  sind offen in  $A$ ; also ist  $A$  nach 16.1.1 unzusammenhängend.

Sind  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  zwei verschiedene Punkte des  $R_n$ , so verstehen wir unter der Strecke  $[a, b]$  des  $R_n$  die Menge der Punkte  $(a_1 + t(b_1 - a_1), \dots, a_n + t(b_n - a_n))$  mit  $0 \leq t \leq 1$ ; sind  $a = (a_i)$ ,  $b = (b_i)$  zwei verschiedene Punkte des  $R_\omega$ , so verstehen wir unter der Strecke  $[a, b]$  des  $R_\omega$  die Menge der Punkte  $((a_i + t(b_i - a_i)))$  mit  $0 \leq t \leq 1$ . Aus 16.1.3 folgert man ohne weiteres:

**16.1.31.** Jede Strecke des  $R_n$  (des  $R_\omega$ ) ist zusammenhängend.

Aus 16.1.31 und 16.1.21 folgt nun:

**16.1.32.** Der  $R_n$  (der  $R_\omega$ ) ist zusammenhängend. Jede Kugel des  $R_n$  (des  $R_\omega$ ) ist zusammenhängend.

**16.1.4.** Die Summe zweier nicht abgesonderter zusammenhängender Mengen ist zusammenhängend.

Denn seien  $B, C$  zusammenhängend,  $A = B + C$  unzusammenhängend. Dann gibt es eine Zerlegung  $A = A_1 + A_2$  in zwei nicht leere abgesonderte Teile  $A_1, A_2$ . Nach 16.1.2 ist  $B \subseteq A_1$  oder  $B \subseteq A_2$ ; ebenso  $C \subseteq A_1$  oder  $C \subseteq A_2$ . Ist etwa  $B \subseteq A_1$ , so  $C \subseteq A_2$ ; denn wäre auch  $C \subseteq A_1$ , so wäre  $A_2 = \Lambda$ . Aus 14.1.3 folgt nun, daß  $B$  und  $C$  abgesondert, entgegen der Annahme.

**16.1.41.** Ist  $A$  die Summe eines Systems  $\mathfrak{S}$  zusammenhängender Mengen, von denen keine zwei abgesondert sind, so ist  $A$  zusammenhängend.

Sei in der Tat  $a_1 \in A, a_2 \in A$ ; es gibt ein  $B_1 \in \mathfrak{S}$  und ein  $B_2 \in \mathfrak{S}$ , so daß  $a_1 \in B_1, a_2 \in B_2$ . Nach 16.1.4 ist  $B_1 + B_2$  zusammenhängend, nach 16.1.21 also auch  $A$ .

**16.1.42.** Ist  $A$  die Summe eines Systemes  $\mathfrak{S}$  zusammenhängender Mengen, unter denen es eine  $B_0$  gibt, die von keiner anderen Menge  $B \in \mathfrak{S}$  abgesondert ist, so ist  $A$  zusammenhängend.

Denn ersetzt man jedes  $B \in \mathfrak{S}$  durch  $B' = B + B_0$ , so sind alle  $B'$  zusammenhängend nach 16.1.4, keine zwei  $B'$  sind abgesondert, da keine zwei  $B'$  fremd sind, und  $A$  ist auch die Summe der  $B'$ . Also ist  $A$  zusammenhängend nach 16.1.41.

**16.1.5.** Ist  $A$  zusammenhängend, und  $A \subseteq B \subseteq A^0$ , so ist auch  $B$  zusammenhängend.

Zufolge 16.1.1 haben wir zu zeigen: ist  $B = B_1 + B_2$ , wo  $B_1, B_2$  abgeschlossen in  $B$  und fremd, so ist  $B_1 = \Lambda$  oder  $B_2 = \Lambda$ . Wir setzen  $A_1 = A \cap B_1, A_2 = A \cap B_2$ ; dann ist  $A = A_1 + A_2$ . Da  $B_1, B_2$  nach 14.1.11 abgesondert, so nach 14.1.3 auch  $A_1$  und  $A_2$ , und da  $A$  zusammenhängend, ist  $A_1 = \Lambda$  oder  $A_2 = \Lambda$ ; sei etwa  $A_2 = \Lambda$ . Dann ist  $A \subseteq B_1$ , also  $A^0 \subseteq B_1^0$ ; andererseits ist wegen  $B_1 \subseteq B \subseteq A^0$  auch  $B_1^0 \subseteq A^0$ , also  $A^0 = B_1^0$ . Da  $B_1$  abgeschlossen in  $B$ , ist nach 10.8.3  $B_1 = B_1^0 \cap B = A^0 \cap B = B$ , also  $B_2 = \Lambda$ , w. z. b. w.

Insbesondere ist in 16.1.5 enthalten:

**16.1.51.** Ist  $A$  zusammenhängend, so auch  $A^0$ .

**16.1.6.** Eine zusammenhängende Menge  $A$ , die mehr als einen Punkt enthält, ist insichdicht.

Denn ist  $a$  ein isolierter Punkt von  $A$ , so ist  $A = \{a\} + (A - \{a\})$  eine Zerlegung von  $A$  in zwei abgesonderte Teile  $\supset A$ .

Bezeichnen wir mit  $A_g$  die Begrenzung von  $A$  (§ 10, 6), so gilt:

**16-1-7.** Ist  $A$  beliebig,  $B$  zusammenhängend, und ist  $A B \supset A$ ,  $(-A) B \supset A$ , so ist auch  $A_g B \supset A$ .

Denn wäre  $A_g B = A$ , so wäre wegen  $A_g = A_r + (-A)_r$  auch  $A_r B = A$ ,  $(-A)_r B = A$ , also  $A B = A_i B$ ,  $(-A) B = (-A)_i B$ , und es wäre  $B = A B + (-A) B = A_i B + (-A)_i B$  eine Zerlegung der zusammenhängenden Menge  $B$  in zwei fremde, zufolge 10-8-5 und 10-8-1 in  $B$  offene Mengen  $\supset A$ , entgegen 16-1-1.

**16-1-8.** Jede zusammenhängende Menge  $C$  eines separablen regulären Raumes  $E$ , die mehr als einen Punkt enthält, hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Nach 14-2-31 ist  $E$  normal. Sei  $a \in C$ ,  $b \in C$ ,  $a \neq b$ ; es gibt ein offenes  $G$ , so daß  $a \in G$ ,  $b \notin G$ ; wir setzen in 14-2-5:  $A = \{a\}$ ,  $B = G$ ; dann ist  $a \in G_x$ ,  $b \notin G_x$  für jedes  $x \in [0, 1]$ . Nach 16-1-7 ist also  $(G_x)_g C \supset A$ . Nun ist  $(G_{x'})_g (G_{x''})_g = A$  für  $x' \neq x''$ ; denn ist etwa  $x' < x''$ , so ist  $G_{x'} \subseteq G_{x''}$ , d. h.  $(G_{x'})^0 \subseteq G_{x''}$ , also, da nach § 10 (6-3)  $(G_{x'})_g \subseteq (G_{x'})^0$  ist, auch  $(G_{x'})_g \subseteq G_{x''}$ , während, weil  $G_{x''}$  offen,  $G_{x''} (G_{x'})_g = A$  ist. Da also je zwei  $(G_x)_g$  fremd sind, und  $(G_x)_g C \supset A$  für jedes  $x \in [0, 1]$ , hat  $C$  mindestens die Mächtigkeit  $\aleph$ , also nach 13-2-1 die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Literatur: Der hier behandelte Begriff des Zusammenhanges zuerst bei N. J. Lennes, Am. Journ. 33 (1911) S. 303 und F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre (1914) S. 244.

**2.  $\varrho$ -Ketten.** Sei  $\varrho > 0$ ; wir sagen: die Punkte  $a_0, a_1, \dots, a_n$  eines metrischen Raumes bilden eine  $a_0$  und  $a_n$  verbindende  $\varrho$ -Kette, wenn  $a_{i-1} a_i < \varrho$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**16-2-1.** Ist  $A$  eine metrische Menge und  $\sigma > 0$ , so ist die Menge  $A'$  aller  $a \in A$ , die mit einem gegebenen Punkte  $a_0 \in A$  für jedes  $\varrho > \sigma$  durch eine  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$  verbunden sind, sowohl offen als abgeschlossen in  $A$ .

Sei  $a \in A'$ ,  $b \in A$ ,  $a b < \sigma$ . Ist  $a_0, a_1, \dots, a_n$ ,  $a$  eine  $a_0$  und  $a$  verbindende  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$ , und ist  $\varrho > \sigma$ , so ist  $a_0, a_1, \dots, a_n, a, b$  eine  $a_0$  und  $b$  verbindende  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$ , d. h. es ist auch  $b \in A'$ ; also: ist  $a \in A'$ , so ist  $A K_{a\sigma} \subseteq A'$ , d. h.  $A'$  ist offen in  $A$ . — Sei sodann  $b \in A A'^1$ ; dann gibt es ein  $a \in A'$ , so daß  $a b < \sigma$ ; da  $a$  mit  $a_0$  durch eine zu  $A$  gehörige  $\varrho$ -Kette ( $\varrho > \sigma$ ) verbunden ist, so auch  $b$ ; aus  $b \in A A'^1$  folgt also  $b \in A'$ , d. h. nach 10-8-2:  $A'$  ist abgeschlossen in  $A$ .

**16-2-2.** Ist die metrische Menge  $A$  zusammenhängend, so sind je zwei Punkte von  $A$  für jedes  $\varrho > 0$  verbunden durch eine  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$ .



Sei  $a_0 \in A$  und  $\sigma > 0$ ; nach 16.2.1 ist die Menge  $A'$  aller  $a \in A$ , die mit  $a_0$  für jedes  $\varrho > \sigma$  durch eine  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$  verbunden sind, sowohl offen als abgeschlossen in  $A$ ; da jedenfalls  $a_0 \in A'$ , ist  $A' \supset A$ , also, weil  $A$  zusammenhängend:  $A' = A$ ; d. h. jeder Punkt von  $A$  ist für jedes  $\varrho > \sigma$  mit  $a_0$  durch eine  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$  verbunden. Da dies für jedes  $\sigma > 0$  gilt, ist 16.2.2 bewiesen.

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein; Beispiel im  $R_1$ : die Menge aller  $x \neq 0$  ist nach 16.1.3 nicht zusammenhängend. Wohl aber gilt:

**16.2.21.** *Ist die metrische Menge  $A$  in sich kompakt, und sind je zwei Punkte von  $A$  für jedes  $\varrho > 0$  verbunden durch eine  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$ , so ist  $A$  zusammenhängend.*

Sei  $A$  unzusammenhängend. Da  $A$  nach 15.2.22 abgeschlossen, ist nach 16.1.11  $A = A_1 + A_2$ , wo  $A_1, A_2$  fremde abgeschlossene Mengen  $\supset A$ . Nach 15.2.31 sind  $A_1, A_2$  in sich kompakt, also ist nach 15.2.53  $A_1 A_2 > 0$ . Ist  $0 < \varrho < A_1 A_2$  und  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$ , so sind offenbar  $a_1$  und  $a_2$  nicht durch eine  $\varrho$ -Kette  $\subseteq A$  verbunden.

**3. Komponenten.** Sei  $A$  eine beliebige Menge  $\supset A$  und  $a \in A$ . Wir bilden die Summe aller  $a$  enthaltenden zusammenhängenden Teile von  $A$  (zu denen mindestens  $\{a\}$  gehört); nach 16.1.41 ist sie zusammenhängend; wir nennen sie: die zu  $a$  gehörige Komponente von  $A$  und bezeichnen sie mit  $A_a$ ; sie ist der größte  $a$  enthaltende, zusammenhängende Teil von  $A$ .

**16.3.1.** *Zwei Komponenten  $A_a$  und  $A_b$  von  $A$  sind entweder abgesondert (und daher fremd) oder identisch.*

Denn sind  $A_a, A_b$  nicht abgesondert, so ist  $A_a + A_b$  nach 16.1.4 zusammenhängend, also ein sowohl  $a$  als  $b$  enthaltender zusammenhängender Teil von  $A$ , also ist  $A_a + A_b \subseteq A_a, A_a + A_b \subseteq A_b$ , also  $A_a = A_b$ .

Eine nicht leere Menge ist zusammenhängend dann und nur dann, wenn sie nur eine einzige Komponente hat. Jede Menge ist Summe ihrer (zu je zweien fremden) Komponenten. Die Zerlegung einer Menge in ihre Komponenten hat absoluten Charakter.

**16.3.2.** *Jede Komponente von  $A$  ist abgeschlossen in  $A$ .*

Denn nach 16.1.5 ist  $(A_a)^0 A$  ein zusammenhängender,  $a$  enthaltender Teil von  $A$ , also  $(A_a)^0 A \subseteq A_a$ ; da auch umgekehrt  $A_a \subseteq (A_a)^0 A$ , ist  $A_a = (A_a)^0 A$ , also ist nach 10.3.3  $A_a$  abgeschlossen in  $A$ .

Hingegen ist i. a. die Komponente  $A_a$  nicht offen in  $A$ . Beispiel: die aus den Punkten 0 und  $\frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bestehende Menge  $A$  des  $R_1$ ; die zu 0 gehörige Komponente ist  $\{0\}$  und nicht offen in  $A$ .

Literatur: F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre S. 245, 248.

**4. Kontinua.** Eine in sich kompakte, zusammenhängende Menge, die mehr als einen Punkt enthält, heißt ein Kontinuum; dieser Begriff hat absoluten Charakter. Aus 15-1-5, 15-2-22 und 16-1-3 folgt:

**16-4-1.** Die einzigen Kontinua  $\subseteq R_1$  sind die Intervalle  $[a, b]$ .

Aus 15-2-21, 15-2-22, 16-1-6 folgt:

**16-4-2.** Jedes separable (jedes metrische) Kontinuum ist perfekt.

Aus 16-3-2 und 15-2-3 folgt:

**16-4-3.** Jede Komponente einer in sich kompakten Menge ist ein Kontinuum oder besteht aus einem Punkte.

Ist kein Teil der Menge  $A$  ein Kontinuum, so heißt  $A$  diskontinuierlich.

**5. Gebiete.** Eine zusammenhängende, in  $A$  offene Menge  $\supset A$  heißt ein Gebiet in  $A$ . Aus 16-1-3 folgt:

**16-5-1.** Die einzigen Gebiete im  $R_1$  sind: die Intervalle  $(a, b)$ ; die Halbgeraden  $x > a$ ,  $x < a$ ; der  $R_1$  selbst.

Die Menge  $A$  heißt im Punkte  $a \in A$  lokal-zusammenhängend, wenn es zu jeder Umgebung  $U_a$  eine Umgebung  $U_a^*$  von  $a$  gibt, so daß  $A \cap U_a^*$  Teil der zu  $a$  gehörigen Komponente von  $A \cap U_a$  ist. Die Menge  $A$  heißt lokal-zusammenhängend, wenn sie in jedem ihrer Punkte lokal-zusammenhängend ist. Der Begriff „lokal-zusammenhängend“ hat absoluten Charakter.

**16-5-2.** Damit die Komponenten jeder in  $A$  offenen Menge  $\supset A$  Gebiete in  $A$  seien, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  lokal-zusammenhängend ist.

Notwendig: Sei  $a \in A$  und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ ; dann ist  $A \cap U_a$  offen in  $A$ ; die zu  $a$  gehörige Komponente  $B$  von  $A \cap U_a$  ist nach Voraussetzung ein Gebiet in  $A$ ; also gibt es eine offene Menge  $C$ , so daß  $B = CA$ ; setzen wir  $C \cap U_a = U_a^*$ , so ist  $A \cap U_a^* = A \cap C \cap U_a = B \cap U_a = B$ ; d. h.  $A$  ist in  $a$  lokal-zusammenhängend. Hinreichend: Sei  $G$  offen in  $A$ ,  $K$  eine Komponente von  $G$ ; es ist zu zeigen, daß auch  $K$  offen in  $A$ . Sei also  $a \in K$ ; weil  $G$  offen in  $A$ , gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $A \cap U_a \subseteq G$ . Sei  $B$  die zu  $a$  gehörige Komponente von  $A \cap U_a$ ; dann ist  $B \subseteq K$ . Weil  $A$  lokal-zusammenhängend in  $a$ , gibt es eine Umgebung  $U_a^*$ , so daß  $A \cap U_a^* \subseteq B \subseteq K$ ; also ist  $a$  in  $A$  innerer Punkt von  $K$ , d. h.  $K$  ist offen in  $A$ , wie behauptet.

Aus 16-1-32 folgt:

**16-5-3.** Der  $R_n$  (der  $R_m$ ) ist lokal-zusammenhängend.

Somit folgt aus 16.5.2 und 16.5.1 bei Beachtung von 5.1.42:

**16.5.4.** Ist  $G$  offen in  $R_1$  und  $A \subset G \subset R_1$ , so ist  $G$  Summe abzählbar vieler fremder Intervalle  $(a, b)$  und höchstens zweier zu diesen Intervallen und untereinander fremder offener Halbgeraden.

Literatur: Der Begriff des lokalen Zusammenhanges stammt von H. Hahn, Wien. Ber. 123 (1914) S. 2433 und St. Mazurkiewicz, Fund. math. 1 (1920) S. 170. Vgl. auch H. Tietze, Monatsh. f. Math. 33 (1923) S. 15; N. Aronszajn, Monatsh. f. Math. 37 (1930) S. 241.

**6. Nulldimensionale Mengen.** Die Menge  $A$  heißt nulldimensional im Punkte  $a \in A$ , wenn es zu jeder Umgebung  $U_a$  eine Zerlegung  $A = A_1 + A_2$  von  $A$  in zwei abgesonderte Summanden gibt, so daß  $a \in A_1$  und  $A_1 \subseteq U_a$ . Dieser Begriff hat absoluten Charakter.

**16.6.1.** Ist  $A$  nulldimensional im Punkte  $a$ , so reduziert sich die  $a$  enthaltende Komponente  $A_a$  von  $A$  auf  $\{a\}$ .

Denn nach 16.1.2 muß für jede Umgebung  $U_a$  gelten:  $A_a \subseteq U_a$ .

Die Menge  $A$  heißt nulldimensional, wenn sie in jedem ihrer Punkte nulldimensional ist. Jede Komponente einer nulldimensionalen Menge besteht wegen 16.6.1 aus einem einzigen Punkte; die Umkehrung hiervon aber gilt nicht.

Aus 14.1.3 folgt:

**16.6.2.** Jeder Teil einer nulldimensionalen Menge ist nulldimensional.

**16.6.3.** Damit die Menge  $A \subseteq R_1$  nulldimensional sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie kein Intervall enthält.

Notwendig: Ist  $(b, c) \subseteq A$  und  $a \in (b, c)$ , so gilt wegen 16.1.3 für die  $a$  enthaltende Komponente:  $A_a \supseteq (b, c)$ ; die Behauptung folgt also aus 16.6.1. Hinreichend: Sei  $a \in A$ ,  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ . Da  $U_a$  offen, gibt es zufolge 16.5.4 ein offenes Intervall  $I$ , so daß  $a \in I$ ,  $I \subseteq U_a$ . Da  $A$  kein Intervall enthält, gibt es in  $I - A$  zwei Punkte  $b, c$ , so daß  $b < a < c$ . Setzen wir  $A_1 = A \cap (b, c)$ ,  $A_2 = A - A_1$ , so ist  $a \in A_1$ ,  $A_1 \subseteq U_a$ , und  $A_1, A_2$  sind abgesondert. Also ist  $A$  nulldimensional.

**16.6.4.** Gilt in einem metrischen Raume  $E$  für je drei Punkte die Ungleichung  $a c \leq \max(a b, b c)$ , so ist  $E$  nulldimensional.

Sei  $a \in E$  und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ . Da  $a$  innerer Punkt von  $U_a$ , gibt es nach 10.3.1 ein  $\varrho > 0$ , so daß  $K_{a\varrho} \subseteq U_a$ . Wir setzen  $A_1 = K_{a\varrho}$ ,  $A_2 = E - K_{a\varrho}$ . Ist  $a_1 \in A_1$ ,  $a_2 \in A_2$ , so ist  $a_1 a_2 \geq \varrho$ ; denn anderenfalls würde nach Annahme aus  $a_1 a_2 < \varrho$ ,  $a a_1 < \varrho$  folgen  $a a_2 < \varrho$ , entgegen der Definition von  $A_2$ . Es ist also  $A_1 A_2 \geq \varrho$ , somit sind  $A_1$  und  $A_2$  abgesondert.

Aus 16-6-4 und § 9 (3-41) folgt:

**16-6-41.** *Der  $R_0$  ist nulldimensional.*

Aus 16-6-1 folgt:

**16-6-5.** *Jeder zusammenhängende Teil einer nulldimensionalen Menge ist entweder  $= A$  oder besteht aus einem Punkte.*

Literatur: Über den Begriff „nulldimensional“ und verwandte Begriffe vgl. K. Menger, Dimensionstheorie (Leipzig und Berlin 1928) S. 202ff.

## § 17. Mengenfolgen, Punktfolgen.

1. Mengenfolgen. Der Punkt  $\alpha$  heißt ein oberer Näherungspunkt der Mengenfolge  $((A_n))$ , wenn für jede Umgebung  $U_\alpha$  der Durchschnitt  $A_n U_\alpha \supset A$  ist für unendlich viele  $n$ ; er heißt ein unterer Näherungspunkt von  $((A_n))$ , wenn für jedes  $U_\alpha$  der Durchschnitt  $A_n U_\alpha \supset A$  ist für fast alle  $n$ . Die Menge aller oberen (unteren) Näherungspunkte von  $((A_n))$  heißt die obere (untere) Näherungsgrenze von  $((A_n))$  und wird (zum Unterschiede von den in § 3, 7 betrachteten Bildungen) bezeichnet mit  $\varlimsup_n A_n$  (mit  $\varliminf_n A_n$ ). Läßt man aus  $((A_n))$  endlich viele Mengen weg, oder fügt endlich viele hinzu, so ändern sich  $\varlimsup_n A_n$  und  $\varliminf_n A_n$  nicht. Offenbar gilt:

$$(1) \quad \varlimsup_n A_n \subseteq \overline{\varlimsup_n A_n}.$$

$$(1-1) \quad \varlimsup_n A_n + \varlimsup_n B_n \subseteq \varlimsup_n (A_n + B_n) \subseteq \overline{\varlimsup_n A_n} + \overline{\varlimsup_n B_n} \subseteq \overline{\varlimsup_n (A_n + B_n)} \\ = \overline{\varlimsup_n A_n} + \overline{\varlimsup_n B_n}.$$

$$(1-2) \quad \varlimsup_n A_n B_n \subseteq \varlimsup_n A_n \cdot \varlimsup_n B_n; \quad \overline{\varlimsup_n A_n B_n} \subseteq \overline{\varlimsup_n A_n} \cdot \overline{\varlimsup_n B_n}.$$

$$(1-3) \quad \varlimsup_n A_n - \overline{\varlimsup_n B_n} \subseteq \varlimsup_n (A_n - B_n); \quad \overline{\varlimsup_n A_n} - \overline{\varlimsup_n B_n} \subseteq \overline{\varlimsup_n (A_n - B_n)}.$$

**17-1-1.** *Ist  $A_n \subseteq B_n$  für fast alle  $n$ , so ist:*

$$\varlimsup_n A_n \subseteq \varlimsup_n B_n; \quad \overline{\varlimsup_n A_n} \subseteq \overline{\varlimsup_n B_n}.$$

**17-1-11.** *Für jede Teilfolge  $((A_{n_p}))$  von  $((A_n))$  gilt:*

$$\varlimsup_n A_n \subseteq \varlimsup_{p \rightarrow \infty} A_{n_p} \subseteq \overline{\varlimsup_{p \rightarrow \infty} A_{n_p}} \subseteq \overline{\varlimsup_n A_n}.$$

$$(17-1-12) \quad \varlimsup_n A_n = \varlimsup_n A_n^0; \quad \overline{\varlimsup_n A_n} = \overline{\varlimsup_n A_n^0}.$$

Wegen 17-1-1 ist  $\varlimsup_n A_n \subseteq \overline{\varlimsup_n A_n^0}$ . Es ist noch zu zeigen:  $\varlimsup_n A_n^0 \subseteq \varlimsup_n A_n$ , d. h. aus  $\alpha \in \varlimsup_n A_n^0$  folgt  $\alpha \in \varlimsup_n A_n$ . Sei also  $\alpha \in \varlimsup_n A_n^0$ ; dann

ist  $U_a A_n^0 \supset A$  für fast alle  $n$ , also nach 10·5·4 auch  $U_a A_n \supset A$  für fast alle  $n$ , also  $a \in \varinjlim A_n$ , w. z. b. w.

**17·1·13.** Bei beliebigen  $A_n$  sind  $\varinjlim A_n$  und  $\overline{\varinjlim A_n}$  abgeschlossen.

Sei  $\varinjlim A_n = B$  und  $a \in B^1$ ; in jedem  $U_a$  liegt dann ein  $b \in B$ , und da  $U_a$  auch ein  $U_b$ , ist also  $A_n U_a \supset A$  für fast alle  $n$ ; d. h.  $a \in B$ . Nach 10·5·61 ist also  $B$  abgeschlossen.

**17·1·14.**  $\overline{\varinjlim A_n} = D \left( \bigcap_{n \geq n} A_n \right)^0$ .

Wir setzen:  $\bigcap_{n \geq n} A_n = B_n$ . Die Aussage  $a \in \overline{\varinjlim A_n}$  ist äquivalent mit: „Ist  $U_a$  eine beliebige Umgebung von  $a$ , so ist  $A_n U_a \supset A$  für unendlich viele  $n$ “; dies ist äquivalent mit „ $B_n U_a \supset A$  für alle  $n$ “, und dies ist nach 10·5·4 äquivalent mit „ $a \in B_n^0$  für alle  $n$ “, d. h. mit  $a \in \bigcap_n D B_n^0$ ; und dies ist die Behauptung.

Gilt in (1) das Zeichen  $=$ , so setzen wir:

$$(1·4) \quad \lim A_n = \varinjlim A_n = \overline{\varinjlim A_n},$$

und nennen diese Menge: die Näherungsgrenze von  $((A_n))$ ; die Folge  $((A_n))$  heißt dann konvergent.

Aus 17·1·1 folgt:

**17·1·2.** Ist  $A_n \subseteq B_n \subseteq C_n$  für fast alle  $n$ , und ist  $\lim A_n = \lim C_n$ , so ist auch  $\lim B_n = \lim A_n = \lim C_n$ .

Aus 17·1·11 folgt:

**17·1·21.** Ist  $\lim A_n = A$ , so auch für jede Teilfolge:  $\lim A_{n_p} = A$ .

Aus 10·5·4 folgt:

**17·1·22.** Ist  $A_n = A$  für fast alle  $n$ , so ist  $\lim A_n = A^0$ .

Aus 17·1·22 und 17·1·1 folgt:

**17·1·23.** Ist  $A_n \subseteq A$  für fast alle  $n$ , so ist  $\overline{\varinjlim A_n} \subseteq A^0$ .

Aus (1·1) folgt:

**17·1·24.** Sind  $((A_n))$  und  $((B_n))$  konvergent, so ist  $\lim (A_n + B_n) = \lim A_n + \lim B_n$ .

**17·1·25.** In einem separablen Raume  $E$  enthält jede Mengenfolge  $((A_n))$  eine konvergente Teilfolge.

Sei  $H_1, H_2, \dots, H_\nu, \dots$  ein ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen. Wir bilden eine Folge von Teilfolgen  $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \dots, A_{\nu n}, \dots$  von  $((A_n))$  nach folgender Regel: 1. Es sei  $A_{1n} = A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); 2. Ist  $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \dots, A_{\nu n}, \dots$  gewählt, und gibt es in dieser Folge eine Teilfolge  $((A_{\nu n_i}))$ , so daß  $A_{\nu n_i} \cap H_\nu = \emptyset$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), so wähle man für  $A_{\nu+1 1}, A_{\nu+1 2}, \dots$  eine solche Teilfolge  $A_{\nu+1 n_1}, A_{\nu+1 n_2}, \dots$ ; gibt es aber in  $A_{\nu 1}, A_{\nu 2}, \dots$  keine solche Teilfolge, so setze man  $A_{\nu+1 n} = A_{\nu n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Wir zeigen, daß dann  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{nn}, \dots$  eine konvergente Teilfolge von  $((A_n))$  ist; d. h. wir haben zu zeigen: ist  $a \sim \varlimsup_n A_{nn}$ , so ist auch  $a \sim \varliminf_n A_{nn}$ . Sei also  $a \sim \varliminf_n A_{nn}$ . Dann gibt es eine Umgebung  $U_a$  und eine Teilfolge  $((A_{n_i n_i}))$  von  $((A_{nn}))$ , so daß  $U_a \cap A_{n_i n_i} = \emptyset$  für alle  $i$ ; da die  $H_\nu$  ein ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen bilden, gibt es ein  $H_{\nu^*}$ , so daß  $a \in H_{\nu^*}$ ,  $H_{\nu^*} \subseteq U_a$ ; es ist also auch  $H_{\nu^*} \cap A_{n_i n_i} = \emptyset$  für alle  $i$ . Da die  $A_{n_i n_i}$  ( $i \geq \nu^*$ ) eine Teilfolge von  $A_{\nu^* 1}, A_{\nu^* 2}, \dots$  bilden, ist nach Definition der  $A_{\nu n}$  auch  $A_{\nu^*+1 n} \cap H_{\nu^*} = \emptyset$  für alle  $n$ ; und da die  $A_{nn}$  ( $n \geq \nu^* + 1$ ) eine Teilfolge von  $A_{\nu^*+1 1}, A_{\nu^*+1 2}, \dots$  bilden und  $a \in H_{\nu^*}$  ist, so ist  $a \sim \varliminf_n A_{nn}$ , w. z. b. w.

Wir vergleichen nun die Begriffe  $\varliminf_n$ ,  $\varlimsup_n$  mit den Begriffen  $\underline{\text{Lim}}_n$ ,  $\overline{\text{Lim}}_n$  von § 3, 7.

$$17.1.3. \quad (\underline{\text{Lim}}_n A_n)^0 \subseteq \varliminf_n A_n; \quad (\overline{\text{Lim}}_n A_n)^0 \subseteq \varlimsup_n A_n.$$

Sei  $a \in (\underline{\text{Lim}}_n A_n)^0$ ; dann ist nach 10.5.4  $U_a \cap \varliminf_n A_n \supset \emptyset$ , also auch  $U_a \supset \emptyset$  für fast alle  $n$ , also  $a \in \varliminf_n A_n$ .

$$17.1.31. \quad \underline{\text{Lim}}_n A_n^0 \subseteq \varliminf_n A_n; \quad \overline{\text{Lim}}_n A_n^0 \subseteq \varlimsup_n A_n.$$

Sei  $a \in \underline{\text{Lim}}_n A_n^0$ ; dann ist  $a \in A_n^0$  für fast alle  $n$ , also  $U_a \cap A_n \supset \emptyset$  für fast alle  $n$ , also  $a \in \varliminf_n A_n$ .

$$17.1.32. \text{ Ist } ((A_n)) \text{ monoton abnehmend, so ist } \varlimsup_n A_n = \overline{\text{Lim}}_n A_n^0 = \overline{D A_n^0}.$$

Nach 3.7.3 ist  $\underline{\text{Lim}}_n A_n^0 = D A_n^0$ ; da nach 17.1.31  $\underline{\text{Lim}}_n A_n^0 \subseteq \varliminf_n A_n$ , genügt es also zu zeigen:  $\varlimsup_n A_n = \overline{\text{Lim}}_n A_n^0$ . Da  $((A_n))$  monoton abnimmt, ist  $A_n = \bigcap_{\nu \geq n} A_\nu$ ; die Behauptung folgt also aus 17.1.14.

$$17.1.33. \text{ Ist } ((A_n)) \text{ monoton wachsend, so ist } \varlimsup_n A_n = (\overline{\text{Lim}}_n A_n)^0 = (\overline{S A_n})^0.$$

Nach 17.1.3 genügt es, zu zeigen, daß  $\overline{\lim}_n A_n = (S A_n)^0$ ; da  $((A_n))$  monoton wachsend, also  $S A_n = S A_n$ , folgt dies aus 17.1.14.

**17.1.4.** Ist  $B$  kompakt und  $A \subset A_n \subseteq B$  für unendlich viele  $n$ , so ist  $\overline{\lim}_n A_n \supset A$ .

Sei  $A \subset A_{n_i} \subseteq B$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) und  $a_i \in A_{n_i}$ . Fallen unendlich viele  $a_i$  in denselben Punkt  $a$ , so ist  $a \in \overline{\lim}_n A_n$ . Anderenfalls bilden die  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) einen unendlichen Teil  $A$  der kompakten Menge  $B$ ; also ist  $A^1 \supset A$ . Ist  $a \in A^1$ , so liegen in jedem  $U_a$  unendlich viele Punkte von  $A$ , also ist  $A_n U_a \supset A$  für unendlich viele  $n$ , somit  $a \in \overline{\lim}_n A_n$ .

**17.1.5.** Sind  $A_n$  und  $A \supset A$  Mengen eines metrischen Raumes, und gilt für jedes  $\varrho > 0$ :  $A_n \subseteq U_{A_\varrho}$  für fast alle  $n$ , so ist  $\overline{\lim}_n A_n \subseteq A^0$ .

Sei  $a \sim \varepsilon A^0$ ; dann ist nach 10.5.5  $a A > 0$ ; für  $0 < \varrho < \frac{1}{2} a A$  ist  $K_{a_\varrho} U_{A_\varrho} = A$ , also ist  $A_n K_{a_\varrho} = A$  für fast alle  $n$ , also  $a \sim \varepsilon \overline{\lim}_n A_n$ .

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein (Beispiel im  $R_1$ :  $A_n = \{0, n\}$ ,  $\overline{\lim}_n A_n = \{0\}$ ,  $A = \{0\}$ ), wohl aber in der Form:

**17.1.51.** Ist  $B$  kompakt,  $A \supset A$ ,  $A_n \subseteq B$  für fast alle  $n$  und  $\overline{\lim}_n A_n \subseteq A$ , so gilt für jede Umgebung  $U_A$ :  $A_n \subseteq U_A$  für fast alle  $n$ .

Anderenfalls wäre  $A_n - U_A \supset A$  für unendlich viele  $n$ , also gäbe es nach 17.1.4 ein  $a \in \overline{\lim}_n (A_n - U_A)$ ; nach 17.1.1 ist dann auch  $a \in \overline{\lim}_n A_n$ , also nach Annahme auch  $a \in A$ ; andererseits folgt aus 17.1.23:  $\overline{\lim}_n (A_n - U_A) \subseteq (-U_A)^0 = -U_A$ , also  $a \in (-U_A)$ , also  $a \sim \varepsilon A$ , im Widerspruche zu der eben bewiesenen Aussage  $a \in A$ .

**17.1.6.** Sind  $A_n \supset A$  und  $A$  Mengen eines metrischen Raumes, und gilt für jedes  $\varrho > 0$ :  $A \subseteq U_{A_n \varrho}$  für fast alle  $n$ , so ist  $\overline{\lim}_n A_n \supseteq A^0$ .

Sei  $a \in A^0$  und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ . Es gibt ein  $\varrho > 0$ , so daß  $K_{a_{2\varrho}} \subseteq U_a$ , und ein  $a' \in A$ , so daß  $a a' < \varrho$ . Sobald  $A \subseteq U_{A_n \varrho}$ , gibt es ferner ein  $a_n \in A_n$ , so daß  $a' a_n < \varrho$ , mithin  $a a_n < 2\varrho$ ; dann aber ist  $a_n \in K_{a_{2\varrho}}$ , also  $a_n \in U_a$ , also  $A_n U_a \supset A$ ; also ist  $A_n U_a \supset A$  für fast alle  $n$ , d. h. es ist  $a \in \overline{\lim}_n A_n$ .

Die Umkehrung hiervon gilt nicht allgemein (Beispiel im  $R_1$ :  $A_n = [-n, n]$ ,  $\overline{\lim}_n A_n = R_1$ ,  $A = R_1$ ), wohl aber in der Form:

**17.1.61.** Sind  $A_n \supset A$  und  $A$  Mengen eines metrischen Raumes, ist  $A$  kompakt und  $\lim_n A_n \supseteq A$ , so gilt für jedes  $\varrho > 0$ :  $A \subseteq U_{A_n, \varrho}$  für fast alle  $n$ .

In der Tat, nach 9.7.1 und 15.1.4 gibt es in  $A$  ein endliches  $\frac{\varrho}{2}$ -Netz, bestehend etwa aus den Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Weil  $a_i \in \lim_n A_n$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), gibt es ein  $N$ , so daß  $K_{a_i, \frac{\varrho}{2}} A_n \supset A$  für  $i = 1, 2, \dots, k$  und  $n \geq N$ ; sei  $a_{in} \in K_{a_i, \frac{\varrho}{2}} A_n$ . Ist  $a \in A$ , so gilt für mindestens einen der Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , etwa für  $a_1$ :  $a a_1 < \frac{\varrho}{2}$ ; dann aber ist  $a a_{1n} < \varrho$  ( $n \geq N$ ), es ist also  $a \in U_{A_n, \varrho}$  für  $n \geq N$ , also auch  $A \subseteq U_{A_n, \varrho}$  ( $n \geq N$ ), wie behauptet.

Machen wir Gebrauch von der Abweichung  $e(A, B)$  zweier Mengen (§ 9, 6), so erhalten wir:

**17.1.7.** Sind  $A_n \supset A$  und  $A \supset A$  Mengen eines metrischen Raumes und ist  $\lim_n e(A_n, A) = 0$ , so ist  $\lim_n A_n = A^0$ .

In der Tat, zufolge 17.1.5 ist  $\overline{\lim_n A_n} \subseteq A^0$ , zufolge 17.1.6 ist  $\underline{\lim_n A_n} \supseteq A^0$ , also ist  $\overline{\lim_n A_n} = \underline{\lim_n A_n} = A^0$ .

**17.1.71.** Sind  $A_n \supset A$ ,  $A \supset A$  und  $B$  Mengen eines metrischen Raumes, ist  $B$  kompakt,  $A_n \subseteq B$  für fast alle  $n$  und  $\lim_n A_n = A$ , so ist  $\lim_n e(A_n, A) = 0$ .

In der Tat, nach 17.1.28 ist  $\lim_n A_n \subseteq B^0$ ; nach 15.2.4 ist  $B^0$  kompakt, also ist auch  $\lim_n A_n = A$  kompakt. Nun folgt die Behauptung aus 17.1.51 und 17.1.61. <sup>n</sup>

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre § 28.

**2. Häufungspunkte von Punktfolgen.** Besteht in der Mengenfolge  $((A_n))$  jede Menge nur aus einem einzigen Punkte:  $A_n = \{a_n\}$ , so wird das Studium der Mengenfolge  $((A_n))$  gleichbedeutend mit dem Studium der Punktfolge  $((a_n))$ . Die oberen Näherungspunkte von  $((a_n))$  heißen dann die Häufungspunkte von  $((a_n))$ . Es heißt also  $a$  ein Häufungspunkt von  $((a_n))$ , wenn für jede Umgebung  $U_a$  gilt:  $a_n \in U_a$  für unendlich viele  $n$ . Bezeichnet  $A$  die Menge der in der Folge  $((a_n))$  auftretenden Punkte, so ist also jeder Häufungspunkt von  $A$  auch ein Häufungspunkt von  $((a_n))$ ; die Umkehrung gilt nur, wenn in  $((a_n))$  nicht derselbe Punkt unendlich oft auftritt; denn ist  $a_n = a$  für unendlich viele  $n$ , so ist nach 17.1.81  $a$  Häufungspunkt von  $((a_n))$ , braucht aber nicht Häufungspunkt von  $A$  zu sein.



Aus den Sätzen 17.1-11, 17.1-13, 17.1-1, 17.1-23 folgert man der Reihe nach:

**17.2-1.** Ist  $((a_n))$  Teilfolge von  $((a_n))$ , so ist jeder Häufungspunkt von  $((a_n))$  auch Häufungspunkt von  $((a_n))$ .

**17.2-11.** Die Menge aller Häufungspunkte von  $((a_n))$  ist abgeschlossen.

**17.2-2.** Ist  $a_n \in A_n$  für fast alle  $n$ , so gehört jeder Häufungspunkt von  $((a_n))$  zu  $\varlimsup_n A_n$ .

**17.2-21.** Ist  $a_n \in A$  für fast alle  $n$ , so gehört jeder Häufungspunkt von  $((a_n))$  zu  $A^0$ .

**17.2-3.** Damit  $B$  kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Punktfolge aus  $B$  mindestens einen Häufungspunkt habe.

Notwendig: Dies folgt aus 17.1-4. Hinreichend: Ist  $B$  nicht kompakt, so gibt es nach 15.1-1 einen abzählbar unendlichen Teil  $A$  von  $B$ , so daß  $A^1 = A$ . Sind  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) die Punkte von  $A$ , so hat  $((a_n))$  keinen Häufungspunkt.

**17.2-31.** Damit  $B$  in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß jede Punktfolge aus  $B$  mindestens einen Häufungspunkt  $a \in B$  besitze.

Dies ist in 17.2-3 enthalten, wenn man als den zugrunde gelegten Raum die Menge  $B$  ansieht.

**3. Grenzpunkte von Punktfolgen.** Sei wieder  $A_n = \{a_n\}$ ; wir beschäftigen uns nun mit den unteren Näherungspunkten solcher Mengenfolgen.

**17.3-1.** Ist  $A_n = \{a_n\}$  und  $\varliminf_n A_n \supset A$ , so gibt es einen Punkt  $a$ , so daß  $\lim_n A_n = \{a\}$ .

Sei  $a \in \varliminf_n A_n$  und  $b \neq a$ ; dann gibt es Umgebungen  $U_a, U_b$ , so daß  $U_a U_b = A$ ; weil  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ , ist  $A_n U_b = A$  für fast alle  $n$ , also  $b \sim \varliminf_n A_n$ , also  $\varliminf_n A_n = \{a\}$ , also auch  $\varlimsup_n A_n = \{a\}$ , mithin  $\lim_n A_n = \{a\}$ .

Statt  $\lim_n \{a_n\} = \{a\}$  schreiben wir  $\lim_n a_n = a$ , oder  $a_n \rightarrow a$ , und nennen  $a$  den Grenzpunkt der Punktfolge  $((a_n))$ ; die Folge  $((a_n))$  heißt dann konvergent;  $\lim_n a_n = a$  besagt also: für jede Umgebung  $U_a$  gilt:  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ . Nach 17.3-1 ist  $a \in \varliminf_n \{a_n\}$  gleichbedeutend mit  $\lim_n a_n = a$ .

Ist  $a = \lim_n a_n$ , so ist  $a$  auch Häufungspunkt von  $((a_n))$ . Aus der Definition folgt unmittelbar:

**17.3.2.** Ist  $a_n = a$  für fast alle  $n$ , so ist  $\lim_n a_n = a$ .

**17.3.21.** Ist  $\lim_n a_n = a$  und  $((a_{n_\nu}))$  Teilfolge von  $((a_n))$ , so ist auch  $\lim_{\nu} a_{n_\nu} = a$ .

**17.3.3.** In einem metrischen Raume ist  $\lim_n a_n = a$  gleichbedeutend mit  $\lim_n a_n a = 0$ .

Denn zu jeder Umgebung  $U_a$  gibt es ein  $\varrho > 0$ , so daß  $K_{a\varrho} \subseteq U_a$ .

**17.3.31.** In einem metrischen Raume folgt aus  $\lim_n a_n = a$ :

$$\lim_n a_n b = a b, \quad \lim_n a_n B = a B.$$

Dies ergibt sich wegen 17.3.3 aus § 9 (2) und § 9 (4.11).

**17.3.32.** In einem metrischen Raume folgt aus  $\lim_n a_n = a$  und  $\lim_n b_n = b$ :  $\lim_n a_n b_n = a b$ .

Nach § 9 (2) ist  $a_n b - b b_n \leq a_n b_n \leq a_n b + b b_n$ ; die Behauptung folgt also aus 17.3.3 und 17.3.31.

Ist  $\lim_n a_n = a$ , so ist auch  $\overline{\lim_n \{a_n\}} = \{a\}$ , d. h.  $a$  ist der einzige Häufungspunkt von  $((a_n))$ . Die Umkehrung gilt nicht; Beispiel: die Punktfolge  $1, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{3}, 3, \dots, \frac{1}{n}, n, \dots$  des  $R_1$  hat den einzigen Häufungspunkt 0, ist aber nicht konvergent. Wohl aber gilt:

**17.3.4.** Ist  $B$  kompakt,  $a_n \in B$ , und ist  $a$  der einzige Häufungspunkt von  $((a_n))$ , so ist  $\lim_n a_n = a$ .

Denn nach 17.1.51 gilt für jede Umgebung  $U_a$ :  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ .

**17.3.5.** Ist  $a_n \in A_n$  für fast alle  $n$  und ist  $\lim_n a_n = a$ , so ist  $a \in \varliminf_n A_n$ .

Dies folgt aus 17.1.1. — Die Umkehrung gilt in der Form:

**17.3.51.** Sind die  $A_n$  nicht leere Mengen eines separablen oder metrischen Raumes, und ist  $a \in \varliminf_n A_n$ , so gibt es ein  $a_n \in A_n$ , so daß  $\lim_n a_n = a$ .

Sei  $((U_{\nu a}))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge (13.1.7). Da  $a \in \varliminf_n A_n$ , gibt es eine wachsende Indizesfolge  $((n_\nu))$ , so daß  $A_n U_{\nu a} \supset A$  für  $n \geq n_\nu$ ; sei  $a_n \in A_n$  für  $n < n_1$  und  $a_n \in A_n U_{\nu a}$  für  $n_\nu \leq n < n_{\nu+1}$ . Ist  $U_a$  eine beliebige Umgebung von  $a$ , so ist  $U_{\nu a} \subseteq U_a$  für fast alle  $\nu$ , also  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ , d. h.  $\lim_n a_n = a$ .

**17.3.52.** Gibt es in  $((A_n))$  eine Teilfolge  $((A_{n_v}))$  und ein  $a_{n_v} \in A_{n_v}$ , so daß  $\lim_v a_{n_v} = a$ , so ist  $a \in \varliminf_n A_n$ .

Nach 17.2.2 ist  $a \in \varliminf_n A_{n_v}$ , also nach 17.1.11 auch  $a \in \overline{\varliminf_n A_n}$ .

**17.3.521.** Sind die  $A_n$  Mengen eines separablen oder metrischen Raumes, und ist  $a \in \varliminf_n A_n$ , so gibt es eine Teilfolge  $((A_{n_v}))$  und ein  $a_{n_v} \in A_{n_v}$ , so daß  $\lim_v a_{n_v} = a$ .

Sei  $((U_{\nu a}))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge. Da  $a \in \varliminf_n A_n$ , gibt es für unendlich viele  $n$  ein  $a_n \in A_n \cap U_{\nu a}$ ; es gibt also eine wachsende Folge  $((n_\nu))$  von Indizes, so daß  $a_{n_\nu} \in A_{n_\nu} \cap U_{\nu a}$ ; dann aber ist  $\lim_\nu a_{n_\nu} = a$ .

Setzt man in 17.3.521  $A_n = \{a_n\}$ , so erhält man:

**17.3.53.** Ist  $((a_n))$  eine Punktfolge in einem separablen oder metrischen Raume, so gibt es zu jedem Häufungspunkte  $a$  von  $((a_n))$  eine Teilfolge  $((a_{n_v}))$ , so daß  $\lim_v a_{n_v} = a$ .

**17.3.531.** Damit die Punktmenge  $B$  eines separablen oder metrischen Raumes kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jeder Punktfolge  $((a_n))$  aus  $B$  eine konvergente Teilfolge gebe.

Notwendig: Dies folgt aus 17.2.3 und 17.3.53. Hinreichend: Dies folgt aus 17.2.3.

**17.3.6.** Ist  $A$  Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes, so ist, damit  $a \in A^0$  sei, notwendig und hinreichend, daß es in  $A$  eine Punktfolge  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$  gebe.

Notwendig: Sei  $((U_{na}))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge. Da  $a \in A^0$ , gibt es nach 10.5.4 ein  $a_n \in A \cap U_{na}$ . Ist  $U_a$  eine beliebige Umgebung von  $a$ , so ist  $U_{na} \subseteq U_a$  für fast alle  $n$ , also auch  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ . Hinreichend: Dies folgt aus 17.2.21.

Ganz ebenso zeigt man, unter Berufung auf 10.4.2:

**17.3.61.** Ist  $A$  Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes, so ist, damit  $a \in A^1$  sei, notwendig und hinreichend, daß es in  $A$  eine Punktfolge  $((a_n))$  mit  $a_n \neq a$  und  $\lim_n a_n = a$  gebe.

**17.3.62.** Ist  $A$  Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes, so ist, damit  $a \in A_1$  sei, notwendig und hinreichend, daß für jede Punktfolge  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $a_n \in A$  für fast alle  $n$ .

Notwendig: Ist  $a \in A_1$ , so gibt es ein  $U_a \subseteq A$ , und aus  $\lim_n a_n = a$  folgt:  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ . Hinreichend: Ist  $a \sim \varepsilon A_1$ , so ist nach 10.5.11

$a \in (-A)^0$ , also gibt es nach 17.3.6 eine Punktfolge  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$  und  $a_n \in (-A)$ .

**17.3.63.** Ist  $B$  Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes und  $A \subseteq B$ , so ist, damit  $A$  dicht sei in  $B$ , notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $b \in B$  in  $A$  eine Punktfolge  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = b$  gebe.

Dies folgt aus 11.3.1 und 17.3.6.

**17.3.64.** Ist  $B$  Punktmenge eines separablen oder metrischen Raumes und ist  $A$  nirgends dicht in  $B$ , so gibt es zu jedem  $a \in A$  in  $B - A$  eine Punktfolge  $((b_n))$  mit  $\lim_n b_n = a$ .

Nach 11.2.5 ist  $B - A$  dicht in  $B$ ; die Behauptung folgt daher aus 17.3.63.

Wegen späterer Anwendungen zeigen wir noch:

**17.3.7.** Sind  $a = ((k_v))$  und  $a_n = ((k_v^n))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) Punkte des  $R_0$ , so ist, damit  $\lim_n a_n = a$  sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $v$  ein  $n_v$  gebe, so daß  $k_v^n = k_v$  für  $n \geq n_v$ .

Notwendig: Ist  $\lim_n a_n = a$ , so gilt  $a_n \rightarrow 0$ , also gibt es ein  $n_v$ , so daß  $a_n a < \frac{1}{v}$  für  $n \geq n_v$ ; dann ist nach § 9 (3.4):  $k_v^n = k_v$  für  $n \geq n_v$ . Hinreichend: Setzen wir  $\bar{n}_v = \max(n_1, n_2, \dots, n_v)$ , so gilt für  $n \geq \bar{n}_v$ :  $k_1^n = k_1$ ,  $k_2^n = k_2, \dots, k_v^n = k_v$ ; also ist nach § 9 (3.4):  $a_n a < \frac{1}{v}$  für  $n \geq \bar{n}_v$ , also gilt  $a_n a \rightarrow 0$ , d. h.  $\lim_n a_n = a$ .

## § 18. Vollständige Mengen.

1. **Cauchysche Folgen.** Die Punktfolge  $((a_n))$  eines metrischen Raumes heißt eine Cauchysche Folge, wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_\delta$  gibt, so daß  $a_n a_{n'} < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ ,  $n' \geq n_\delta$  — oder, was damit gleichbedeutend: wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_\delta$  gibt, so daß  $a_n a_{n_\delta} < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ . Es folgt sofort:

**18.1.1.** Ist  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge, so auch jede Teilfolge  $((a_{n'}))$ .

**18.1.2.** Jede konvergente Folge  $((a_n))$  eines metrischen Raumes ist eine Cauchysche.

Denn ist  $\lim_n a_n = a$ , d. h. gilt  $a_n a \rightarrow 0$ , so gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_\delta$ , so daß  $a_n a < \frac{\delta}{2}$  für  $n \geq n_\delta$ . Ist  $n \geq n_\delta$ ,  $n' \geq n_\delta$ , so ist also  $a_n a < \frac{\delta}{2}$ ,  $a_{n'} a < \frac{\delta}{2}$ , mithin  $a_n a_{n'} < \delta$ .

**18-1-3.** Ist  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge und  $a$  Häufungspunkt von  $((a_n))$ , so ist  $\lim_n a_n = a$ .

Denn es gibt zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_\delta$ , so daß  $a_n a_{n'} < \frac{\delta}{2}$  für  $n \geq n_\delta, n' \geq n_\delta$ ; da  $a$  Häufungspunkt von  $((a_n))$ , gibt es ein  $n' \geq n_\delta$ , so daß  $a_n a < \frac{\delta}{2}$ ; dann aber ist  $a_n a \leq a_n a_{n'} + a_n a < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ , d. h.  $\lim_n a_n = a$ .

Wir nennen die Punktfolge  $((a_n))$  eines metrischen Raumes  $E$  beschränkt, wenn es eine Zahl  $d$  gibt, so daß  $a_n a_{n'} \leq d$  für alle  $n$  und  $n'$ ; nach 9-6-2 und 9-6-21 ist damit gleichbedeutend: „zu jedem  $c \in E$  gibt es ein  $\delta_c$ , so daß  $a_n c \leq \delta_c$  für alle  $n$ “, sowie: „es gibt ein  $c \in E$  und ein  $\delta$ , so daß  $a_n c \leq \delta$  für alle  $n$ “.

**18-1-4.** Jede Cauchysche Folge  $((a_n))$  ist beschränkt.

Denn es gibt ein  $n_1$ , so daß  $a_n a_{n_1} < 1$  für  $n \geq n_1$ ; setzen wir  $\delta = \max(a_1 a_{n_1}, a_2 a_{n_1}, \dots, a_{n_1-1} a_{n_1}, 1)$ , so ist  $a_n a_{n_1} \leq \delta$  für alle  $n$ .

**18-1-5.** Für je zwei Cauchysche Folgen  $((a_n)), ((b_n))$  eines metrischen Raumes existiert der endliche Grenzwert  $\lim_n a_n b_n$ .

Wegen der Dreiecksungleichung ist:  $a_n b_n \leq a_n a_n + a_n b_n + b_n b_n$ ; da  $((a_n)), ((b_n))$  Cauchysche Folgen, gibt es ein  $n_\delta$ , so daß hierin:  $a_n a_n < \delta$ ,  $b_n b_n < \delta$  für  $n \geq n_\delta, n' \geq n_\delta$ ; also ist  $a_n b_{n'} < a_n b_n + 2\delta$  für  $n \geq n_\delta, n' \geq n_\delta$ . Ebenso erhält man:  $a_n b_n < a_n b_{n'} + 2\delta$  für  $n \geq n_\delta, n' \geq n_\delta$ ; also ist  $|a_n b_n - a_n b_{n'}| < 2\delta$  für  $n \geq n_\delta, n' \geq n_\delta$ , d. h. es existiert der endliche Grenzwert  $\lim_n a_n b_n$ .

**2. Vollständige Mengen.** Eine Punktmenge  $A$  eines metrischen Raumes heißt vollständig, wenn jede Cauchysche Folge aus  $A$  einen zu  $A$  gehörigen Grenzpunkt hat. Der Begriff „vollständig“ hat absoluten Charakter<sup>1)</sup>.

**18-2-1.** Die Summe zweier vollständiger Mengen  $A, B$  ist vollständig.

Sei  $((c_n))$  eine Cauchysche Folge aus  $A + B$ ; dann gilt sei es  $c_n \in A$ , sei es  $c_n \in B$  für unendlich viele  $n$ ; sei etwa  $c_{n_\nu} \in A$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ); nach 18-1-1 ist  $((c_{n_\nu}))$  eine Cauchysche Folge, also hat, weil  $A$  vollständig,  $((c_{n_\nu}))$  einen Grenzpunkt  $a \in A$ ; nach 17-2-1 ist  $a$  Häufungspunkt von  $((c_n))$ , also nach 18-1-3  $\lim_n c_n = a$ , und wegen  $a \in A$  ist auch  $a \in A + B$ .

<sup>1)</sup> D. h. ist die metrische Menge  $A$  vollständig bei Zugrundelegung des metrischen Raumes  $E \supseteq A$ , so auch bei Zugrundelegung jedes anderen metrischen Raumes  $E' \supseteq A$ .

**18.2.11.** Der Durchschnitt eines (endlichen oder unendlichen) Systemes vollständiger Mengen ist vollständig.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition.

Aus 18.2.1 und 18.2.11 folgt:

**18.2.12.** Das System aller vollständigen Mengen eines metrischen Raumes ist ein  $\delta$ -Ring.

Der bekannte Satz, daß jede Cauchysche Folge reeller Zahlen einen Grenzwert besitzt, besagt:

**18.2.2.** Der  $R_1$  ist vollständig.

Daß auch der  $R_n$  vollständig ist, werden wir daraus in 20.2.8 folgern.

**18.2.21.** Der  $R_\omega$  ist vollständig.

Sei  $((a_n))$  eine Cauchysche Punktfolge im  $R_\omega$ ; wir haben zu zeigen: es gibt ein  $a \in R_\omega$ , so daß  $\lim_n a_n = a$ . Seien  $x_{n\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) die Koordinaten von  $a_n$ ; aus  $a_n a_{n'} < \delta$  folgt dann  $|x_{n\nu} - x_{n'\nu}| < \delta$ , also ist  $x_{1\nu}, x_{2\nu}, \dots, x_{n\nu}, \dots$  für jedes  $\nu$  eine Cauchysche Folge reeller Zahlen, es existiert also  $\lim_n x_{n\nu} = x_\nu$ .

Wir setzen  $a = ((x_\nu))$  und zeigen:  $a \in R_\omega$ , d. h.  $\sum_\nu x_\nu^2$  ist endlich. Nach 18.1.4 ist die Punktfolge  $((a_n))$  beschränkt; es gibt also ein  $\varrho$ , so daß  $\sum_\nu x_{n\nu}^2 \leq \varrho$

für alle  $n$ ; daher ist auch  $\sum_{\nu=1}^k x_{n\nu}^2 \leq \varrho$ , also auch  $\sum_{\nu=1}^k x_\nu^2 \leq \varrho$ , also auch

$\sum_\nu x_\nu^2 \leq \varrho$ , w. z. b. w. — Nun haben wir noch zu zeigen:  $\lim_n a_n = a$ ; nach 17.3.3

ist dies gleichbedeutend mit  $\lim_n a_n a = 0$ , d. h. mit  $\lim_n \sum_\nu (x_{n\nu} - x_\nu)^2 = 0$ .

Da  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge, ist  $a_n a_{n'} < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ ,  $n' \geq n_\delta$ , also:

$\sum_{\nu=1}^k (x_{n\nu} - x_{n'\nu})^2 < \delta^2$  für  $n \geq n_\delta$ ,  $n' \geq n_\delta$ , also auch  $\sum_{\nu=1}^k (x_{n\nu} - x_\nu)^2 \leq \delta^2$

für  $n \geq n_\delta$ , und mithin auch  $\sum_\nu (x_{n\nu} - x_\nu)^2 \leq \delta^2$  für  $n \geq n_\delta$ ; d. h. es ist

$\lim_n \sum_\nu (x_{n\nu} - x_\nu)^2 = 0$ , w. z. b. w.

**18.2.22.** Der  $R_0$  ist vollständig.

Eine Folge von Punkten  $a_n = ((k_{n\nu}))$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) des  $R_0$  ist eine Cauchysche Folge dann und nur dann, wenn es zu jedem  $\nu$  ein  $n_\nu$  und eine natürliche Zahl  $k_\nu$  gibt, so daß  $k_{n\nu} = k_\nu$  für  $n \geq n_\nu$ ; setzen wir  $a = ((k_\nu))$ , so ist  $a \in R_0$  und nach 17.3.7:  $\lim_n a_n = a$ .

Literatur: Der Begriff des vollständigen Raumes stammt von M. Fréchet, Rend. Pal. 22 (1906) S. 23.

**3. Kompakte Mengen in vollständigen Räumen.** Ganz allgemein gilt:

**18.3.1.** Jede in sich kompakte metrische Menge  $A$  ist vollständig.

Sei  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge aus  $A$ . Nach 17.2.31 besitzt sie einen Häufungspunkt  $a \in A$ ; nach 18.1.3 ist  $\lim a_n = a$ , also ist  $A$  vollständig.

**18.3.2.** Damit die Menge  $A$  des vollständigen Raumes  $E$  kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es in jeder Folge  $((a_n))$  aus  $A$  eine Cauchysche Teilfolge gebe.

Notwendig: Ist  $A$  kompakt, so besitzt  $((a_n))$  nach 17.2.3 einen Häufungspunkt  $a$ ; nach 17.3.53 gibt es eine Teilfolge mit  $\lim a_{n_v} = a$ ; nach 18.1.2 ist  $((a_{n_v}))$  eine Cauchysche Folge. Hinreichend: Da der Raum  $E$  vollständig, ist jede Cauchysche Folge konvergent; die Behauptung folgt also aus 17.3.531.

**18.3.3.** Damit die Menge  $A$  eines vollständigen Raumes kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß jedes  $\mathcal{Q}$ -Netz in  $A$  endlich sei.

Notwendig: Dies ist enthalten in 15.1.4. Hinreichend: Sei  $B_n$  ein  $\frac{1}{n}$ -Netz in  $A$ ; nach Annahme ist  $B_n$  endlich, etwa  $B_n = \{b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nk_n}\}$ ; dann ist

$$(3) \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_n} K_{b_{ni}, \frac{1}{n}}.$$

Wir bezeichnen die endlich vielen Kugeln  $K_{b_{1i}, 1}$  mit  $K_{1m}$ , die endlich vielen Durchschnitte  $K_{b_{1i}, 1} \cap K_{b_{2j}, \frac{1}{2}}$  mit  $K_{2m}$ , die endlich vielen Durchschnitte  $K_{b_{1i}, 1} \cap K_{b_{2j}, \frac{1}{2}} \cap K_{b_{3k}, \frac{1}{3}}$  mit  $K_{3m}$  usw. Ist  $((a_n))$  eine beliebige Punktfolge aus  $A$ , so muß es unter den endlich vielen Kugeln  $K_{1m}$  wegen (3) mindestens eine, etwa  $K_{1m_1}$ , geben, so daß  $a_n \in K_{1m_1}$  für unendlich viele  $n$ ; ebenso muß es ein  $K_{2m_2} \subseteq K_{1m_1}$  geben, so daß  $a_n \in K_{2m_2}$  für unendlich viele  $n$ , ebenso ein  $K_{3m_3} \subseteq K_{2m_2}$  usw. Es gibt also eine wachsende Indizesfolge  $((n_i))$ , so daß  $a_{n_i} \in K_{1m_i}$ ; wegen  $K_{i+1, m_{i+1}} \subseteq K_{im_i}$  ist  $a_{n_j} \in K_{im_i}$  für  $j \geq i$ ; da  $d(K_{1m_i}) \leq \frac{2}{i}$ , ist also  $((a_{n_i}))$  eine Cauchysche Teilfolge von  $((a_n))$ ; nach 18.3.2 ist somit  $A$  kompakt.

**4. Vervollständigung eines Raumes.** Wir nennen zwei Cauchysche Folgen  $((a_n)), ((b_n))$  zusammengehörig, in Zeichen  $((a_n)) \longleftrightarrow ((b_n))$ , wenn  $\lim_n a_n b_n = 0$ . Dann gilt:

**18.4.1.** Aus  $((a_n)) \longleftrightarrow ((a'_n)), ((b_n)) \longleftrightarrow ((b'_n))$  folgt:  $\lim_n a_n b_n = \lim_n a'_n b'_n$ .

Denn nach der Dreiecksungleichung ist:  $a_n b_n \leq a_n a'_n + a'_n b'_n + b'_n b_n$ . Hierin ist  $\lim_n a_n a'_n = 0$ ,  $\lim_n b_n b'_n = 0$ , also wegen 18.1.5:  $\lim_n a_n b_n \leq \lim_n a'_n b'_n$ . Ganz ebenso:  $\lim_n a'_n b'_n \leq \lim_n a_n b_n$ , also ist  $\lim_n a_n b_n = \lim_n a'_n b'_n$ .

Die Relation  $\longleftrightarrow$  ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv, also eine Gleichheitsrelation (§ 4, 1). Die Gesamtheit aller Cauchyschen Folgen aus  $E$  zerfällt also in fremde Klassen untereinander zusammengehöriger. Diese Klassen bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben  $\alpha, \beta, \dots$ , die Menge aller dieser Klassen mit  $\bar{K}$ . Auf Grund von 18.1.5 und 18.4.1 können wir in  $\bar{K}$  einen Abstand definieren durch: Ist  $((a_n)) \varepsilon \alpha$ ,  $((b_n)) \varepsilon \beta$ , so sei:

$$(4) \quad \alpha \beta = \lim_n a_n b_n.$$

Da diese Abstandsdefinition offenbar den metrischen Axiomen  $1_m), 2_m)$  genügt (§ 9, 2), so ist dadurch  $\bar{K}$  zu einem metrischen Raum gemacht.

Die Gesamtheit aller Folgen  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$  bildet eine Klasse  $\alpha \varepsilon \bar{K}$ ; denn einerseits folgt aus  $\lim_n a_n = a$ ,  $\lim_n b_n = a$ , wegen  $a_n b_n \leq a_n a + a b_n$ , sofort  $\lim_n a_n b_n = 0$ , d. h.  $((a_n)) \longleftrightarrow ((b_n))$ ; andererseits folgt aus  $((a_n)) \longleftrightarrow ((b_n))$  und  $\lim_n a_n = a$ , wegen  $b_n a \leq b_n a_n + a_n a$ , auch  $\lim_n b_n a = 0$ , d. h.  $\lim_n b_n = a$ . Wir nennen die Klasse aller  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$  die zu  $a$  gehörige Klasse. Setzt man in (4) alle  $a_n = a$ , alle  $b_n = b$ , so sieht man: Ist  $\alpha$  die zu  $a$ ,  $\beta$  die zu  $b$  gehörige Klasse, so ist  $\alpha \beta = a b$ ; mithin:

**18.4.2.** Die Menge  $K$  aller zu den Punkten von  $E$  gehörigen  $\alpha \varepsilon \bar{K}$  ist mit  $E$  isometrisch.

Indem man in (4) alle  $a_n = a$  setzt, erhält man: Ist  $\alpha$  die zu  $a$  gehörige Klasse und  $((b_n)) \varepsilon \beta$ , so ist:

$$(4.1) \quad \alpha \beta = \lim_n a b_n.$$

Daraus folgern wir:

**18.4.3.** Ist  $((a_n)) \varepsilon \alpha$  und  $a_n$  die zu  $a_n$  gehörige Klasse, so ist  $\lim_n \alpha_n = \alpha$ .

Denn nach (4.1) ist  $\alpha_n \alpha = \lim_n a_n a_n$ ; da  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge, gibt es ein  $n_\delta$ , so daß  $a_n a_n < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ ,  $n \geq n_\delta$ ; also ist  $\lim_n a_n a_n \leq \delta$  für  $n \geq n_\delta$ , d. h.  $\alpha_n \alpha \leq \delta$  für  $n \geq n_\delta$ , d. h.  $\lim_n \alpha_n \alpha = 0$ , d. h.  $\lim_n \alpha_n = \alpha$ .

**18.4.4.**  $K$  ist dicht in  $\bar{K}$ .



Denn ist  $\alpha \in \bar{K}$ ,  $((a_n)) \in \alpha$  und  $\alpha_n$  die zu  $a_n$  gehörige Klasse, so ist nach 18.4.3  $\lim_n \alpha_n = \alpha$ , und da  $\alpha_n \in K$ , ist nach 17.3.63  $K$  dicht in  $\bar{K}$ .

#### 18.4.5. $\bar{K}$ ist vollständig.

Sei in der Tat  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge aus  $\bar{K}$ . Wegen 18.4.4 gibt es ein  $\beta_n \in K$ , so daß  $\alpha_n \beta_n < \frac{1}{n}$ . Dann ist  $\beta_n \beta_{n'} \leq \beta_n \alpha_n + \alpha_n \alpha_{n'} + \alpha_n \beta_{n'}$ ,  
 $< \alpha_n \alpha_{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n'}$ ; es ist also  $((\beta_n))$  ebenso wie  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge. Wegen  $\beta_n \in K$  gibt es ein  $b_n \in E$ , dessen zugehörige Klasse  $\beta_n$  ist, und wegen 18.4.2 ist auch  $((b_n))$  eine Cauchysche Folge. Also gibt es ein  $\beta \in \bar{K}$ , so daß  $((b_n)) \in \beta$ . Nach 18.4.3 ist dann  $\lim_n \beta_n = \beta$ , und wegen  $\alpha_n \beta_n < \frac{1}{n}$  folgt daraus auch  $\lim_n \alpha_n = \beta$ . Die Cauchysche Folge  $((a_n))$  hat also einen Grenzpunkt  $\beta \in \bar{K}$ , d. h.  $\bar{K}$  ist vollständig.

Ersetzen wir nun in  $\bar{K}$  den Teil  $K$  durch die nach 18.4.2 isometrische Menge  $E$ , so entsteht ein vollständiger Raum  $\bar{E} \supseteq E$ , und wir haben bei Berücksichtigung von 18.4.4:

**18.4.6.** Zu jedem metrischen Raum  $E$  gibt es einen vollständigen Raum  $\bar{E} \supseteq E$ , in dem  $E$  dicht ist.

Wir beschränken also in keiner Weise die Allgemeinheit, wenn wir den zugrunde gelegten Raum  $E$  als vollständig voraussetzen.

**18.4.61.** Zu jedem separablen metrischen Raum  $E$  gibt es einen vollständigen, separablen Raum  $\bar{E} \supseteq E$ .

Dies folgt aus 18.4.6 und 18.1.4.

**18.4.7.** Ist  $E^*$  ein vollständiger Raum  $\supseteq E$  und  $E^0$  die abgeschlossene Hülle von  $E$  in  $E^*$ , so ist  $E^0$  isometrisch mit  $\bar{K}$ .

Nach 17.3.6 gibt es zu jedem  $a \in E^0$  in  $E$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$ ; die Klasse aller Folgen  $((a_n))$  aus  $E$  mit  $\lim_n a_n = a$  ist offenbar eine der Klassen  $\alpha \in \bar{K}$ ; wir nennen sie  $\alpha_a$ . Dadurch ist eine eindeutige Abbildung von  $E^0$  auf  $\bar{K}$  gegeben; denn ist  $\alpha \in \bar{K}$  und  $((a_n)) \in \alpha$ , so ist  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge in  $E$ , also auch eine Cauchysche Folge im vollständigen Raume  $E^*$ , besitzt also einen Grenzpunkt  $a \in E^0$ ; nach 17.3.6 ist  $a \in E^0$ , und offenbar ist  $\alpha = \alpha_a$ . Diese eindeutige Abbildung von  $E^0$  auf  $\bar{K}$  ist isometrisch; denn ist  $a \in E^0$ ,  $b \in E^0$  und sind  $((a_n))$ ,  $((b_n))$  Folgen aus  $E$  mit

$\lim_n a_n = a$ ,  $\lim_n b_n = b$ , so ist nach 17.3.32  $ab = \lim_n a_n b_n$  und nach (4) auch  $\alpha_a \alpha_b = \lim_n \alpha_{a_n} \alpha_{b_n}$ , also  $\alpha_a \alpha_b = a b$ .

**18.4.71.** Ist  $A$  eine metrische Menge und sind  $E^*$ ,  $E^{**}$  vollständige Räume  $\supseteq A$ , so sind die abgeschlossenen Hüllen von  $A$  in  $E^*$  und  $E^{**}$  isometrisch.

Dies folgt für  $E = A$  aus 18.4.7.

Literatur: Die vorstehende Theorie der Vervollständigung eines Raumes stammt von F. Hausdorff, Mengenlehre S. 106.

**5. Absolut abgeschlossene Mengen.** Ganz allgemein gilt:

**18.5.1.** Jede vollständige Menge  $A$  ist abgeschlossen.

Sei  $a \in A^1$ ; nach 17.3.61 gibt es in  $A$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $\lim_n a_n = a$ ; nach 18.1.2 ist  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge; weil  $A$  vollständig, ist also  $a \in A$ . Aus  $a \in A^1$  folgt also  $a \in A$ , somit ist  $A$  nach 10.5.61 abgeschlossen.

**18.5.11.** Jede in einer vollständigen Menge  $B$  abgeschlossene Menge  $A$  ist vollständig.

Sei  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge aus  $A$ ; weil  $B$  vollständig, besitzt  $((a_n))$  einen Grenzpunkt  $a \in B$ ; nach 17.3.6 ist  $a \in A^0 B$ ; weil  $A$  abgeschlossen in  $B$ , folgt daraus nach 10.8.3  $a \in A$ , also ist  $A$  vollständig.

Wir nennen eine metrische Menge  $A$  absolut abgeschlossen, wenn sie in jedem metrischen Raume  $E \supseteq A$  abgeschlossen ist. Dann gilt:

**18.5.2.** Damit die metrische Menge  $A$  absolut abgeschlossen sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie vollständig sei.

Notwendig: Da es nach 18.4.6 einen vollständigen Raum  $E \supseteq A$  gibt, folgt dies aus 18.5.11. Hinreichend: Dies ist enthalten in 18.5.1.

Wir nennen eine metrische Menge  $A$  ein absolutes  $F_\sigma$ , wenn sie in jedem metrischen Raume  $E \supseteq A$  ein  $F_\sigma$  ist. Aus 18.5.2 folgt:

**18.5.21.** Damit eine metrische Menge ein absolutes  $F_\sigma$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie Summe abzählbar vieler vollständiger Mengen sei.

Eine metrische Menge  $A \neq \emptyset$ , die absolut offen (d. h. offen in jedem metrischen Raume  $E \supseteq A$ ) wäre, kann es nicht geben; sei nämlich  $a_0 \in A$ ; wir bilden einen metrischen Raum  $E \supset A$ , indem wir zu  $A$  noch abzählbar unendlich viele Elemente  $b_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit den Abstandsdefinitionen

$$a b_n = a a_0 + \frac{1}{n} \quad \text{für alle } a \in A, \quad b_n b_{n'} = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n'} \right|$$

hinzufügen; dann ist  $a_0 b_n = \frac{1}{n}$ , also  $\lim_n b_n = a_0$ , und da  $b_n \sim \varepsilon A$ , ist nach

17.9.62  $a_0$  nicht innerer Punkt von  $A$ , also ist nach 10.3.6  $A$  nicht offen in  $E$ . — Wohl aber gibt es absolute  $G_\delta$ ; wir werden uns mit ihnen ausführlich in § 19 beschäftigen.

Literatur: P. Alexandroff u. P. Urysohn, Math. Ann. 92 (1924) S. 261.

**6. Durchschnittssätze.** Für vollständige Mengen gilt folgender Durchschnittssatz:

**18.6.1.** Ist  $((A_n))$  eine monoton abnehmende Folge nicht leerer vollständiger Mengen mit (§ 9, 6)  $\lim_n d(A_n) = 0$ , so gibt es ein  $a$ , so daß  $\bigcap_n A_n = \{a\}$ .

Sei  $a_n \in A_n$ ; da dann auch  $a_{n'} \in A_n$  für  $n' \geq n$ , ist  $a_n a_{n'} \leq d(A_n)$  für  $n' \geq n$ ; wegen  $d(A_n) \rightarrow 0$  ist also  $((a_n))$  eine Cauchysche Folge; da  $a_n \in A_n$  für  $n' \geq n$ , und da  $A_n$  vollständig, hat  $((a_n))$  einen Grenzpunkt  $a \in A_n$ ; da dies für alle  $n$  gilt, ist  $a \in \bigcap_n A_n$ . Ist auch  $b \in \bigcap_n A_n$ , so ist  $a b \leq d(A_n)$  für alle  $n$ , wegen  $d(A_n) \rightarrow 0$  also  $a b = 0$ , d. h.  $b = a$ . Also ist  $\bigcap_n A_n = \{a\}$ .

In vollständigen Räumen gilt folgende Verschärfung von 11.1.51:

**18.6.2.** In einem vollständigen Raume  $E$  ist der Durchschnitt abzählbar vieler offener dichter Mengen dicht.

Sei  $A = \bigcap_n G_n$ , wo  $G_n$  offen und dicht. Nach 11.1.3 haben wir zu zeigen: ist  $G \supset A$  und offen, so ist  $A \subset G$ . Da  $G_1$  dicht, gibt es nach 11.1.3 ein  $a_1 \in G_1 \setminus G$ . Da  $G_1$  offen, gibt es ein  $\varrho_1 > 0$  und  $\leq 1$ , so daß die abgeschlossene Kugel  $\bar{K}_{a_1, \varrho_1} \subseteq G_1 \setminus G$ . Da  $G_2$  dicht, gibt es nach 11.1.3 ein  $a_2 \in G_2 \setminus K_{a_1, \varrho_1}$  und ein  $\varrho_2 > 0$  und  $\leq \frac{1}{2}$ , so daß  $\bar{K}_{a_2, \varrho_2} \subseteq G_2 \setminus K_{a_1, \varrho_1}$ . Da  $G_3$  dicht, gibt es ein  $a_3 \in G_3 \setminus K_{a_2, \varrho_2}$  und ein  $\varrho_3 > 0$  und  $\leq \frac{1}{3}$ , so daß  $\bar{K}_{a_3, \varrho_3} \subseteq G_3 \setminus K_{a_2, \varrho_2}$  usw. Da die Folge der  $\bar{K}_{a_n, \varrho_n}$  monoton abnehmend,  $\varrho_n \rightarrow 0$ , und  $\bar{K}_{a_n, \varrho_n}$  nach 18.5.11 vollständig, gibt es nach 18.6.1 ein  $a \in \bigcap_n \bar{K}_{a_n, \varrho_n}$ ; da  $\bar{K}_{a_n, \varrho_n} \subseteq G_n$ , ist auch  $a \in \bigcap_n G_n$ , d. h.  $a \in A$ ; da  $\bar{K}_{a_n, \varrho_n} \subseteq G$ , ist auch  $a \in G$ , also  $a \in A \cap G$ , somit  $A \subset G$ , w. z. b. w.

Literatur: Eine Verallgemeinerung von Satz 18.6.1 bei C. Kuratowski, Fund. math. 15 (1930) S. 302.

**7. Dyadische Schemata.** Wir nennen ein System endlich vieler Zahlen  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  einen dyadischen Komplex, wenn jede seiner „Stellen“  $k_i$  einen der beiden Werte 0, 1 hat; ebenso nennen wir  $((k_n))$  eine dyadische Folge, wenn jede Stelle  $k_n$  einen der beiden Werte 0, 1 hat.

**18-7-1.** Zu jeder Folge dyadischer Komplexe  $(k_1^n, k_2^n, \dots, k_r^n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gibt es eine dyadische Folge  $k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$ , so daß für jedes  $v$  unendlich viele Komplexe  $(k_1^v, k_2^v, \dots, k_r^v)$  ( $n \geq v$ ) mit den  $v$  Stellen  $k_1, k_2, \dots, k_r$  beginnen.

In der Tat, da alle auftretenden Stellen nur die Werte 0, 1 haben, muß es unter den Komplexen  $(k_1^n, k_2^n, \dots, k_r^n)$  unendlich viele mit gleichem Werte  $k_1$  der ersten Stelle geben, unter diesen unendlich viele mit gleichem Werte  $k_2$  der zweiten Stelle usw. Die so gebildete Folge  $k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$  leistet das Verlangte.

Sei nun jedem dyadischen Komplexe  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  eine Menge  $A_{k_1 k_2 \dots k_n} \supset A$  zugeordnet. Wir sagen, diese Mengen bilden ein dyadisches Schema, wenn sie folgenden Bedingungen genügen:

1. Jede Menge  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  ist vollständig.
2.  $A_{k_1 k_2 \dots k_n} \supseteq A_{k_1 k_2 \dots k_n k_{n+1}}$ .
3. Für jede dyadische Folge  $((k_r))$  gilt  $d(A_{k_1 k_2 \dots k_r}) \rightarrow 0$ .

In einem dyadischen Schema bezeichnen wir die Mengen  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  mit  $n$  Indizes als die Mengen  $n$ -ter Stufe.

**18-7-2.** Ist  $d_n$  der größte unter den Durchmessern der  $2^n$  Mengen  $n$ -ter Stufe eines dyadischen Schemas, so gilt  $d_n \rightarrow 0$ .

Angenommen, es wäre nicht  $d_n \rightarrow 0$ ; da wegen 2. offenbar  $d_{n+1} \leq d_n$ , gäbe es dann ein  $p > 0$ , so daß  $d_n \geq p$  für alle  $n$ . Nach Definition von  $d_n$  gibt es eine Menge  $A_{k_1^n k_2^n \dots k_r^n}$   $n$ -ter Stufe, deren Durchmesser  $= d_n$  ist. Nach 18-7-1 gibt es eine dyadische Folge  $k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$ , so daß unendlich viele  $(k_1^n, k_2^n, \dots, k_r^n)$  mit den  $v$  Stellen  $k_1, k_2, \dots, k_r$  beginnen; für diese Komplexe ist  $A_{k_1^n k_2^n \dots k_r^n} \subseteq A_{k_1 k_2 \dots k_r}$ , also  $d(A_{k_1 k_2 \dots k_r}) \geq d(A_{k_1^n k_2^n \dots k_r^n}) = d_n$ , es wäre also  $d(A_{k_1 k_2 \dots k_r}) \geq p (> 0)$  für alle  $v$ , entgegen 3.

Wegen 18-6-1 besteht für jede dyadische Folge  $((k_r))$  der Durchschnitt  $A_{k_1} A_{k_1 k_2} \dots A_{k_1 k_2 \dots k_r} \dots$  aus genau einem Punkte, den wir mit  $a_{((k_r))}$  bezeichnen. Natürlich können verschiedene dyadische Folgen denselben Punkt  $a_{((k_r))}$  liefern.

Wir betrachten eine Folge dyadischer Folgen  $((k_r^1)), ((k_r^2)), \dots, ((k_r^i)), \dots$ . Es gilt:

**18-7-3.** Gibt es zu jedem  $n$  ein  $i_n$ , so daß für  $i \geq i_n$  die ersten  $n$  Stellen von  $((k_r^i))$  mit den ersten  $n$  Stellen von  $((k_r))$  übereinstimmen, so ist  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_{((k_r^i))} = a_{((k_r))}$ .

Wir setzen:  $a_{((k_r^i))} = a_i$ ,  $a_{((k_r))} = a$ . Für  $i \geq i_n$  ist  $A_{k_1^i \dots k_n^i} = A_{k_1 \dots k_n}$ , also auch  $a_i \in A_{k_1 \dots k_n}$ ; da auch  $a \in A_{k_1 \dots k_n}$ , ist also  $a a_i \leq d(A_{k_1 \dots k_n})$  für  $i \geq i_n$ ; wegen  $d(A_{k_1 \dots k_n}) \rightarrow 0$  gilt also auch  $a a_i \rightarrow 0$ , d. h.  $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$ .

**8. Dyadisch darstellbare Mengen.** Sei ein dyadisches Schema, bestehend aus den Mengen  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  gegeben. Zu jeder dyadischen Folge  $((k_r))$  bilden wir den zugehörigen Punkt  $a_{((k_r))}$ , d. h. den einzigen Punkt des Durchschnittes  $A_{k_1} A_{k_1 k_2} \dots A_{k_1 k_2 \dots k_r} \dots$ . Die Menge  $A$  aller dieser Punkte nennen wir die durch unser dyadisches Schema dargestellte Menge; sie kann auch so aufgeschrieben werden:

$$(8) \quad A = \sum_{((k_r))} A_{k_1} A_{k_1 k_2} \dots A_{k_1 k_2 \dots k_r} \dots$$

(die Summe erstreckt sich über alle möglichen dyadischen Folgen  $((k_r))$ ). Natürlich kann ein und dieselbe Menge durch verschiedene dyadische Schemata dargestellt werden. Jede durch ein dyadisches Schema dargestellte Menge heißt eine *dyadisch darstellbare Menge*.

Wir bezeichnen nun mit  $A^{(v)}$  die Summe der  $2^v$  Mengen  $v$ -ter Stufe im dyadischen Schema der  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ . Als Summe endlich vieler vollständiger Mengen ist auch  $A^{(v)}$  nach 18.2.1 vollständig.

**18.8.1.** Die Menge (8) ist auch gegeben durch:  $A = \bigcap_v A^{(v)}$ .

Daß  $A \subseteq \bigcap_v A^{(v)}$  ist, ist evident. Sei umgekehrt  $a \in \bigcap_v A^{(v)}$ ; dann gibt es für jedes  $n$  einen Komplex  $(k_1^n, k_2^n, \dots, k_n^n)$ , so daß  $a \in A_{k_1^n k_2^n \dots k_n^n}$ ; nach 18.7.1 gibt es dann auch eine dyadische Folge  $((k_r))$ , so daß  $a \in A_{k_1 k_2 \dots k_r}$  für jedes  $r$ ; dann aber ist  $a \in A$ . Es ist also auch  $\bigcap_v A^{(v)} \subseteq A$ .

**18.8.2.** Damit die metrische Menge  $A \supset A$  dyadisch darstellbar sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie in sich kompakt sei.

Notwendig: Sei  $A$  darstellbar durch das dyadische Schema  $A_{k_1 k_2 \dots k_r}$  und sei  $((a_i))$  eine Punktfolge aus  $A$ . Unter den Mengen  $n$ -ter Stufe gibt es mindestens eine, etwa  $A_{k_1^n k_2^n \dots k_n^n}$ , die unendlich viele Glieder von  $((a_i))$  enthält; nach 18.7.1 gibt es also eine dyadische Folge  $((k_r))$ , so daß (für jedes  $v$ )  $A_{k_1 k_2 \dots k_v}$  unendlich viele Glieder von  $((a_i))$  enthält. Sei  $a = a_{((k_r))}$  der zugehörige Punkt von  $A$ ; dann ist  $a$  Häufungspunkt von  $((a_i))$ ; denn wegen  $d(A_{k_1 k_2 \dots k_v}) \rightarrow 0$  ist für fast alle  $v$ :  $A_{k_1 k_2 \dots k_v} \subseteq K_{a, \epsilon}$ , und  $A_{k_1 k_2 \dots k_v}$  enthält unendlich viele Glieder von  $((a_i))$ . Jede Folge  $((a_i))$  aus  $A$  hat also einen Häufungspunkt  $a \in A$ , somit ist  $A$  nach 17.2.31 in sich kompakt. Hinreichend: Sei  $A$  in sich kompakt. Nach 9.7.1 und 15.1.4 gibt es ein endliches 1-Netz in  $A$ , bestehend etwa aus den Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_k$ ; dann ist, wenn  $\bar{K}_{a_i, 1}$  die abgeschlossene Kugel vom Mittelpunkt  $a_i$  und Radius 1 bedeutet:  $A = \bigcup_{i=1}^k \bar{K}_{a_i, 1}$ ; nach 15.2.3 ist hierin jeder Summand in sich kom-

pakt, also nach 18-8-1 vollständig; ferner ist jeder Summand enthalten in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius 1; indem wir eventuell einen Summanden mehrmals anschreiben, können wir annehmen, ihre Anzahl sei eine Potenz  $2^{n_1}$  von 2; wir nehmen diese  $2^{n_1}$  Summanden als die Mengen  $n_1$ -ter Stufe  $A_{k_1, k_2, \dots, k_{n_1}}$  eines dyadischen Schemas (die Mengen niedrigerer Stufe können etwa alle  $= A$  gewählt werden). Da jede dieser Mengen  $A_{k_1, k_2, \dots, k_{n_1}}$  in sich kompakt ist, zeigt derselbe Schluß: jede Menge  $A_{k_1, k_2, \dots, k_{n_1}}$  kann dargestellt werden als Summe endlich vieler in sich kompakter (also vollständiger) Summanden, deren jeder in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius  $\frac{1}{2}$  enthalten ist; durch mehrmaliges Anschreiben eines Summanden kann man erreichen, daß die Anzahl dieser Summanden für jedes  $A_{k_1, k_2, \dots, k_{n_1}}$  dieselbe, und zwar eine Potenz  $2^{n_2}$  von 2 ist; die sämtlichen  $2^{n_1+n_2}$  Summanden der  $2^{n_1}$  Mengen  $A_{k_1, k_2, \dots, k_{n_1}}$  nehmen wir als Mengen  $(n_1 + n_2)$ -ter Stufe unseres dyadischen Schemas (für  $n_1 < n < n_1 + n_2$  kann man als Mengen  $n$ -ter Stufe in leicht ersichtlicher Weise die Mengen  $A_{k_1, k_2, \dots, k_{n_1}}$  wählen). Da die so gebildeten Mengen  $(n_1 + n_2)$ -ter Stufe wieder in sich kompakt sind, kann man sie nach demselben Verfahren durch endlich viele in sich kompakte (also vollständige) Summanden darstellen, deren jeder ganz in einer abgeschlossenen Kugel vom Radius  $\frac{1}{3}$  enthalten ist, und die (eventuell mehrmals angeschrieben) die Mengen  $(n_1 + n_2 + n_3)$ -ter Stufe unseres Schemas bilden usw. Das in dieser Weise gebildete dyadische Schema stellt nach 18-8-1 offenbar die Menge  $A$  dar.

Aus 18-8-2 und 18-8-1 folgt:

**18-8-21.** Jede dyadisch darstellbare Menge ist vollständig.

**18-8-22.** Jede dyadisch darstellbare Menge  $A$  ist separabel.

Dies folgt aus 18-8-2 und 15-1-41.

**18-8-3.** Eine dyadisch darstellbare Menge  $A$  hat höchstens die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Denn die Punkte von  $A$  sind in der Form dargestellt:  $a_{((k_v))}$ , wo  $((k_v))$  alle dyadischen Folgen durchläuft; nach 5-2-2 gibt es aber  $\aleph$  dyadische Folgen.

Literatur: Zu vorstehender Theorie vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre S. 131.

**9. Dyadische Diskontinua.** Ein dyadisches Schema, in dem für jedes  $n$  die  $2^n$  Mengen  $n$ -ter Stufe disjunkt sind, heißt ein disjunktes dyadisches Schema. Eine durch ein disjunktes dyadisches Schema dargestellte Menge heißt ein dyadisches Diskontinuum. Ein disjunktes dyadisches

Schema ordnet offenbar verschiedenen dyadischen Folgen  $((k_r))$  auch verschiedene Punkte  $a_{((k_r))}$  zu. Infolgedessen verschärft sich 18-8-3 zu:

**18-9-1.** *Jedes dyadische Diskontinuum hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

**18-9-2.** *Damit in einem dyadischen Diskontinuum  $A: \lim_i a_{((k_r^i))} = a_{((k_r))}$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $n$  ein  $i_n$  gebe, so daß für  $i \geq i_n$  die ersten  $n$  Stellen von  $((k_r^i))$  übereinstimmen mit den ersten  $n$  Stellen von  $((k_r))$ .*

Hinreichend: Dies ist enthalten in 18-7-3. Notwendig: Stimmen für unendlich viele  $i$  die ersten  $n$  Stellen von  $((k_r^i))$  nicht überein mit den ersten  $n$  Stellen von  $((k_r))$ , so liegt  $a_{((k_r^i))}$  für unendlich viele  $i$  in der Summe  $B_n$  der von  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  verschiedenen Mengen  $n$ -ter Stufe des  $A$  darstellenden disjunkten dyadischen Schemas. Nach 18-2-1 ist  $B_n$  vollständig, also nach 18-5-1 abgeschlossen; wegen  $\lim_i a_{((k_r^i))} = a_{((k_r))}$  müßte also auch  $a_{((k_r))} \in B_n$  sein; das aber ist unmöglich, denn  $a_{((k_r))} \in A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ , und weil das  $A$  darstellende dyadische Schema disjunkt, sind  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  und  $B_n$  fremd.

Nennen wir eine metrische Menge  $A$  absolut perfekt, wenn sie perfekt ist in jedem metrischen Raume  $\supseteq A$ , so gilt:

**18-9-3.** *Jedes dyadische Diskontinuum  $A$  ist absolut perfekt.*

Da  $A$  nach 18-8-21 und 18-5-2 absolut abgeschlossen, ist nur mehr zu zeigen, daß  $A$  insichdicht. Ist  $a_{((k_r))}$  ein beliebiger Punkt von  $A$ , so gibt es nach 18-9-2 dyadische Folgen  $((k_r^i)) \neq ((k_r))$ , so daß  $\lim_i a_{((k_r^i))} = a_{((k_r))}$ ; da dann  $a_{((k_r^i))} \neq a_{((k_r))}$ , ist nach 17-3-61  $a_{((k_r^i))} \in A^1$ ; also ist  $A \subseteq A^1$ , d. h.  $A$  ist insichdicht, w. z. b. w.

**18-9-4.** *Jedes dyadische Diskontinuum  $A$  ist nulldimensional.*

Sei  $a = a_{((k_r))}$  ein beliebiger Punkt von  $A$ , und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ . Wegen  $d(A_{k_1 k_2 \dots k_n}) \rightarrow 0$  gibt es ein  $n$ , so daß  $A_{k_1 k_2 \dots k_n} \subseteq U_a$ . Ist  $B_n$  die Summe der von  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  verschiedenen Mengen  $n$ -ter Stufe in dem  $A$  darstellenden disjunkten dyadischen Schema, so ist  $B_n A_{k_1 k_2 \dots k_n} = A$ , und  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  und  $B_n$  sind vollständig, also abgeschlossen. Nach 14-1-11 ist also  $A = A_{k_1 k_2 \dots k_n} + A_{B_n}$  eine Zerlegung von  $A$  in zwei abgesonderte Summanden, und wegen  $a \in A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ,  $A_{k_1 k_2 \dots k_n} \subseteq U_a$  ist  $A$  nulldimensional.

Ein bekanntes Beispiel eines disjunkten dyadischen Schemas erhält man in folgender Weise: die Mengen erster Stufe seien die Intervalle  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ ,

$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$  des  $R_1$ , die Mengen zweiter Stufe seien die Intervalle  $\left[0, \frac{1}{3^2}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}\right]$ ,  $\left[\frac{2}{3}, \frac{7}{3^2}\right]$ ,  $\left[\frac{8}{3^2}, 1\right]$ ; allgemein sind die Mengen  $n$ -ter Stufe  $2^n$  fremde abgeschlossene Intervalle der Gestalt  $\left[a, a + \frac{1}{3^n}\right]$ , deren jedes die zwei Mengen  $(n+1)$ -ter Stufe liefert:  $\left[a, a + \frac{1}{3^{n+1}}\right]$ ,  $\left[a + \frac{2}{3^{n+1}}, a + \frac{1}{3^n}\right]$ . Die durch dieses disjunkte dyadische Schema dargestellte Menge heißt das Cantorsche Diskontinuum; es besteht, wie man leicht erkennt, aus allen Punkten von  $[0, 1]$ , die durch einen Systembruch  $\sum \frac{g_r}{3^r}$  darstellbar sind, unter dessen Stellen  $g_r$  keine 1 vorkommt.

Literatur: G. Cantor gab das nach ihm benannte Diskontinuum an in Math. Ann. 21 (1883) S. 590.

**10. Beschränkte Mengen in vollständigen Räumen.** Sei  $E$  ein metrischer Raum; wir betrachten das System  $\mathfrak{B}$  aller nicht leeren, abgeschlossenen, beschränkten Punktmengen von  $E$ , und zeigen, daß es zu einem metrischen Raum wird, wenn wir als die Entfernung zweier Elemente  $A, B$  von  $\mathfrak{B}$  die Abweichung  $e(A, B)$  (§ 9, 6) ansehen. In der Tat ist  $e(A, B)$  endlich nach 9-6-6; wegen § 9 (6-32) ist das metrische Axiom  $2_m$ ) (§ 9, 2) erfüllt; um zu sehen, daß auch  $1_m$ ) erfüllt ist, zeigen wir:

**18-10-1.** Sind  $A$  und  $B$  nicht leere, abgeschlossene Mengen, so ist, damit  $e(A, B) = 0$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $A = B$ .

Notwendig: Sei etwa  $a \in A - B$ ; dann ist, da  $B$  abgeschlossen, auch  $a \in A - B^0$ ; also ist nach 10-5-5:  $aB > 0$ , also nach § 9 (6-3) auch  $e(A, B) > 0$ . Hinreichend: Dies ist trivial.

Daraus folgt sofort:

**18-10-11.** Ist  $A_n \supset A$ , so kann es höchstens eine abgeschlossene Menge  $A$  geben, so daß  $e(A_n, A) \rightarrow 0$ .

Nun werden wir zeigen, daß, wenn der Raum  $E$  vollständig ist, das System  $\mathfrak{B}$  der nicht leeren, abgeschlossenen, beschränkten Punktmengen von  $E$  — im eben besprochenen Sinne — einen vollständigen metrischen Raum bildet. Dies ist enthalten in den Sätzen 18-10-2, 18-10-21, 18-10-22, 18-10-3.

Wir bezeichnen die Folge  $((A_n))$  nicht leerer Mengen als eine Cauchysche Folge, wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_\delta$  gibt, so daß  $e(A_n, A_{n'}) < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ ,  $n' \geq n_\delta$ . Dann gilt:

**18-10-2.** Ist  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge nicht leerer Mengen, so existiert  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ .



Nach § 17 (1) und (1.4) ist nur zu zeigen:  $\overline{\lim}_n A_n - \lim_n A_n = \Lambda$ . Wäre  $a \in \overline{\lim}_n A_n - \lim_n A_n$ , so gäbe es ein  $\varrho > 0$ , so daß  $A_n K_{a\varrho} = \Lambda$  für unendlich viele  $n$ , und  $\overline{A_n K_{a\frac{\varrho}{2}}} \supset \Lambda$  für unendlich viele  $n$ ; zu jedem  $n^*$  gäbe es dann ein  $n' > n^*$  und ein  $n'' > n^*$ , so daß  $A_{n'} K_{a\varrho} = \Lambda$ ,  $A_{n''} K_{a\frac{\varrho}{2}} \supset \Lambda$ ; dann aber ist  $e(A_{n'}, A_{n''}) \geq \frac{\varrho}{2}$ , entgegen der Annahme,  $((A_n))$  sei eine Cauchy-sche Folge.

**18.10.21.** Ist  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge nicht leerer, beschränkter Mengen, so ist  $\lim_n A_n$  beschränkt und abgeschlossen.

Daß  $\lim_n A_n$  abgeschlossen, folgt aus 17.1.13. Da  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge, gibt es ein  $n^*$ , so daß  $e(A_n, A_{n^*}) < 1$  für  $n \geq n^*$ . Dann ist  $A_n \subseteq \overline{A_{n^*}}_1$  für  $n \geq n^*$ , wobei  $\overline{A_{n^*}}_1$  die abgeschlossene Umgebung  $\varrho$  von  $A_{n^*}$  bedeutet (§ 10, 2); nach 17.1.23 ist dann auch  $\lim_n A_n \subseteq \overline{A_{n^*}}_1$ . Für den Durchmesser (§ 9, 6) von  $\overline{A_{n^*}}_1$  gilt offenbar:  $d(\overline{A_{n^*}}_1) \leq d(A_{n^*}) + 2$ ; da  $A_{n^*}$  beschränkt, ist  $d(A_{n^*})$  endlich, also auch  $d(\overline{A_{n^*}}_1)$  endlich, d. h.  $\overline{A_{n^*}}_1$  ist beschränkt; wegen  $\lim_n A_n \subseteq \overline{A_{n^*}}_1$  ist also auch  $\lim_n A_n$  beschränkt.

**18.10.22.** Ist  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge nicht leerer Mengen eines vollständigen Raumes  $E$ , so ist auch  $\lim_n A_n \supset \Lambda$ , und für jedes  $\varrho > 0$  gilt, wenn  $\lim_n A_n = A$  gesetzt wird:  $A_n \subseteq \overline{A}_\varrho$  für fast alle  $n$ .

Da  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge, gibt es ein  $n^*$ , so daß  $e(A_{n'}, A_{n''}) < \frac{\varrho}{2^3}$  für  $n' \geq n^*$ ,  $n'' \geq n^*$ . Sei  $n_1$  ein beliebiger Index  $\geq n^*$  und  $a_1$  ein beliebiger Punkt von  $A_{n_1}$ . Sodann gibt es zu jedem  $\nu > 1$  ein  $n_\nu$ , so daß  $e(A_{n'}, A_{n''}) < \frac{\varrho}{2^{\nu+1}}$  für  $n' \geq n_\nu$ ,  $n'' \geq n_\nu$ , wobei noch ohne weiteres  $n_{\nu+1} \geq n_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) angenommen werden kann. Wegen  $e(A_{n_1}, A_{n_1}) < \frac{\varrho}{2^3}$  gibt es dann ein  $a_2 \in A_{n_1}$ , so daß  $a_1 a_2 < \frac{\varrho}{2^3}$ ; wegen  $e(A_{n_1}, A_{n_1}) < \frac{\varrho}{2^3}$  gibt es ein  $a_3 \in A_{n_1}$ , so daß  $a_2 a_3 < \frac{\varrho}{2^3}$  usw. Man erhält so eine Folge von Punkten  $a_\nu \in A_{n_\nu}$ , so daß für  $\nu' > \nu$ :

$$\begin{aligned} a_\nu a_{\nu'} &\leq a_\nu a_{\nu+1} + a_{\nu+1} a_{\nu+2} + \dots + a_{\nu'-1} a_{\nu'} \\ &< \varrho \left( \frac{1}{2^{\nu+1}} + \frac{1}{2^{\nu+2}} + \dots + \frac{1}{2^\nu} \right) < \frac{\varrho}{2^\nu}; \end{aligned}$$

also ist  $((a_n))$  eine Cauchysche Punktfolge und  $a_1 a_v < \frac{\varrho}{2}$  für alle  $v$ . Da  $E$  vollständig, gibt es ein  $a$ , so daß  $a_v \rightarrow a$ . Da  $a_v \in A_n$ , ist nach 17.3.52  $a \in \lim_n A_n$ , und da nach 18.10.2  $\lim_n A_n$  existiert, ist auch  $a \in \lim_n A_n$ , also  $\lim_n A_n \supset A$ . Wegen  $a_1 a_v < \frac{\varrho}{2}$  ist nach 17.3.31  $a_1 a \leq \frac{\varrho}{2} < \varrho$ ; da  $a_1$  ein beliebiger Punkt  $\varepsilon A_{n_1}$  war, ist somit, wenn  $A = \lim_n A_n$  gesetzt wird:  $A_{n_1} \subseteq U_{A, \varrho}$ ; und da  $n_1$  ein beliebiger Index  $\geq n^*$  war, gilt  $A_n \subseteq U_{A, \varrho}$  für fast alle  $n$ .

**18.10.3<sup>1</sup>**. Ist  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge nicht leerer Mengen eines vollständigen Raumes  $E$ , und ist  $A = \lim_n A_n$ , so ist  $e(A_n, A) \rightarrow 0$ .

Da aus  $A_n \subseteq U_{A, \varrho}$ ,  $A \subseteq U_{A_n, \varrho}$  folgt:  $e(A_n, A) \leq \varrho$ , ist nach 18.10.22 nur mehr zu zeigen:  $A \subseteq U_{A_n, \varrho}$  für fast alle  $n$ . Da  $((A_n))$  eine Cauchysche Folge, gibt es ein  $n^*$ , so daß  $e(A_n, A_{n'}) < \frac{\varrho}{2}$  für  $n \geq n^*$ ,  $n' \geq n^*$ ; dann ist  $A_n \subseteq U_{A_{n'}, \frac{\varrho}{2}}$  für  $n \geq n' \geq n^*$ . Nach 17.1.23 ist dann auch  $\lim_n A_n \subseteq (U_{A_{n'}, \frac{\varrho}{2}})^0 \subseteq U_{A_{n'}, \varrho}$ ; und da dies für alle  $n' \geq n^*$  gilt, ist die Behauptung bewiesen.

## § 19. Youngsche Mengen.

**1. Absolute  $G_\delta$ .** Anknüpfend an § 18, 5 zeigen wir nun, daß es metrische Mengen  $A$  gibt, die absolute  $G_\delta$  (d. h.  $G_\delta$  in jedem metrischen Raume  $E \supseteq A$ ) sind.

**19.1.1.** Gibt es einen vollständigen Raum  $E \supseteq A$ , in dem  $A$  ein  $G$  ist, so ist  $A$  ein absolutes  $G_\delta$ .

Sei  $E'$  ein beliebiger metrischer Raum  $\supseteq A$ ; nach 18.4.6 gibt es einen vollständigen Raum  $\bar{E} \supseteq E'$ , und nach 10.9.21 genügt es zu zeigen, daß  $A$  ein  $G_\delta$  in  $\bar{E}$  ist. Sei  $A^0$  die abgeschlossene Hülle von  $A$  in  $E$  und  $A^\times$  die abgeschlossene Hülle von  $A$  in  $\bar{E}$ ; nach 18.4.71 sind  $A^0$  und  $A^\times$  isometrisch. Nach Annahme ist  $A$  ein  $G_\delta$  in  $E$ , also nach 10.9.21 auch ein  $G_\delta$  in  $A^0$ , also — weil  $A^0$  und  $A^\times$  isometrisch — auch ein  $G_\delta$  in  $A^\times$ ; nach 10.7.41 ist  $A^\times$  ein  $G_\delta$  in  $\bar{E}$ , also ist nach 10.9.2 auch  $A$  ein  $G_\delta$  in  $\bar{E}$ , w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun die metrischen Mengen, die absolute  $G_\delta$  (d. h. nach 19.1.1  $G_\delta$  in vollständigen Räumen) sind, als Youngsche Mengen. Jede

<sup>1</sup>) Man vergleiche hierzu Satz 17.1.71.

vollständige Menge ist also auch eine Youngsche Menge. Ferner folgt aus 10-9-2:

**19-1-2.** *Jedes  $G_\delta$  in einer Youngschen Menge ist eine Youngsche Menge. Insbesondere also nach 10-7-41:*

**19-1-21.** *Jede in einer Youngschen Menge abgeschlossene Menge ist eine Youngsche Menge.*

**19-1-3.** *Die Summe zweier Youngscher Mengen  $A, B$  ist eine Youngsche Menge.*

Nach 18-4-6 gibt es einen vollständigen Raum  $E \supseteq A + B$ ; nach Annahme ist sowohl  $A$  als  $B$  ein  $G_\delta$  in  $E$ , also nach 10-7-2 auch  $A + B$ .

Ebenso folgt aus 10-7-2:

**19-1-31.** *Der Durchschnitt abzählbar vieler Youngscher Mengen ist eine Youngsche Menge.*

Aus 19-1-3 und 19-1-31 folgt:

**19-1-32.** *Das System aller Youngschen Mengen eines metrischen Raumes ist ein  $\delta$ -Ring.*

**19-1-4.** *Der Durchschnitt abzählbar vieler im metrischen Raume  $E$  dichter Youngscher Mengen  $A_n$  ist dicht in  $E$ .*

Sei  $A = \bigcap_n A_n$ ; nach 18-4-6 gibt es einen vollständigen Raum  $\bar{E} \supseteq E$ , so daß  $E$  dicht in  $\bar{E}$ ; nach 11-3-3 ist dann auch  $A_n$  dicht in  $\bar{E}$ . Als Youngsche Menge ist  $A_n$  ein  $G_\delta$  in  $\bar{E}$ :  $A_n = \bigcap_{\nu} G_{n,\nu}$ , wo  $G_{n,\nu}$  offen in  $\bar{E}$ ; dann ist  $A = \bigcap_{n,\nu} G_{n,\nu}$ . Da  $A_n$  dicht in  $\bar{E}$ , ist nach 11-3-2 auch  $G_{n,\nu}$  dicht in  $\bar{E}$ , also nach 18-6-2 auch  $A$ , und nach 11-3-2 ist  $A$  auch dicht in  $E$ .

**2. Mächtigkeitssätze.** Um Aufschluß über die Mächtigkeit Youngscher Mengen zu gewinnen, zeigen wir zunächst:

**19-2-1.** *Ist  $A$  eine Youngsche Menge, deren insichdichter Kern  $A_k \supset A$  ist, so gibt es ein in  $A$  nirgendsdichtes dyadisches Diskontinuum.*

Als Youngsche Menge ist  $A$  ein  $G_\delta$  in einem vollständigen Raume  $E$ , also:  $A = \bigcap_n G_n$ , wo  $G_n$  offen. Da  $A_k \supset A$  und insichdicht, gibt es unendlich viele  $a \in A_k$ ; irgend drei davon bezeichnen wir mit  $a_0, a_1, a_2$ , und wählen  $\varrho_1 > 0$  und  $\leq 1$  so klein, daß die abgeschlossenen Kugeln  $\bar{K}_{a_0, \varrho_1}, \bar{K}_{a_1, \varrho_1}$  fremd und  $\subseteq G_1$  sind, und  $a_2$  nicht enthalten. Als abgeschlossene Mengen des vollständigen Raumes  $E$  sind  $\bar{K}_{a_0, \varrho_1}, \bar{K}_{a_1, \varrho_1}$  nach 18-5-11 vollständig; wir wählen sie als Mengen erster Stufe eines dyadischen Schemas. Sei  $i = 0$  oder  $1$ ; da  $a_i \in A_k$  und  $A_k$  insichdicht, gibt es in  $K_{a_i, \varrho_1}$  unendlich viele  $a \in A_k$ ; irgend drei davon

bezeichnen wir mit  $a_{i0}$ ,  $a_{i1}$ ,  $a_{i2}$ , und wählen  $\varrho_2 > 0$  und  $\leq \frac{1}{2}$  so klein, daß die abgeschlossenen Kugeln  $\bar{K}_{a_{i0}e_1}$ ,  $\bar{K}_{a_{i1}e_1}$  fremd und  $\subseteq K_{a_{i2}e_1}$ , sowie  $\subseteq G_2$  sind, und den Punkt  $a_{i2}$  nicht enthalten. Die vier Mengen  $\bar{K}_{a_{ij}e_1}$  ( $i, j = 0, 1$ ) wählen wir als Mengen zweiter Stufe unseres dyadischen Schemas. Sei  $i, j = 0$  oder  $1$ ; in  $K_{a_{ij}e_1}$  gibt es drei Punkte  $a_{ij0}$ ,  $a_{ij1}$ ,  $a_{ij2}$  von  $A_k$ ; wir wählen  $\varrho_3 > 0$  und  $\leq \frac{1}{3}$  so klein, daß die abgeschlossenen Kugeln  $\bar{K}_{a_{ij0}e_1}$ ,  $\bar{K}_{a_{ij1}e_1}$  fremd,  $\subseteq K_{a_{ij}e_1}$ , sowie  $\subseteq G_3$  sind, und den Punkt  $a_{ij2}$  nicht enthalten. Die acht Mengen  $\bar{K}_{a_{ijl}e_1}$  ( $i, j, l = 0, 1$ ) wählen wir als Mengen dritter Stufe unseres dyadischen Schemas usw. Durch das so konstruierte dyadische Schema wird ein dyadisches Diskontinuum  $B$  dargestellt. Da die Mengen  $n$ -ter Stufe des Schemas  $\subseteq G_n$  sind, ist  $B \subseteq \bigcap_n G_n$ , d. h.  $B \subseteq A$ . Wir haben noch zu zeigen, daß  $B$  nirgends dicht in  $A$ . Da  $B$  nach 18-9-3 abgeschlossen in  $A$ , genügt es nach 11-2-111 zu zeigen:  $B$  ist Randmenge in  $A$ . Sei also  $b \in B$ ; für jedes  $n$  liegt  $b$  in genau einer Menge  $n$ -ter Stufe unseres dyadischen Schemas, etwa in  $\bar{K}_{a_{i1}e_1}$ ,  $\bar{K}_{a_{i2}e_1}$ ,  $\bar{K}_{a_{ijl}e_1}, \dots$ ; nun war  $a_{i2} \in K_{a_{i1}e_1}$ ,  $a_{ij2} \in K_{a_{i2}e_1}$ ,  $a_{ijl2} \in K_{a_{ijl}e_1}, \dots$ ; die Folge der (zu  $A$  gehörigen) Punkte  $a_{i2}$ ,  $a_{j2}$ ,  $a_{ij2}$ ,  $\dots$  konvergiert also gegen  $b$ , und da nach Konstruktion unseres dyadischen Schemas keiner dieser Punkte zu  $B$  gehört, ist  $b$  Randpunkt in  $A$  von  $B$ , und da  $b$  ein beliebiger Punkt von  $B$  war, ist  $B$  Randmenge in  $A$ , w. z. b. w.

Wegen 18-9-1 folgt aus 19-2-1:

**19-2-2.** Eine Youngsche Menge, deren insichdichter Kern  $\supset A$  ist, hat mindestens die Mächtigkeit  $\aleph$ .

**19-2-21.** Eine separable Youngsche Menge  $A$  ist abzählbar oder von der Mächtigkeit  $\aleph$ , je nachdem ihr insichdichter Kern  $A_k = A$  oder  $\supset A$  ist.

Ist  $A_k = A$ , d. h.  $A$  separiert, so ist  $A$  abzählbar nach 18-5-81. Ist  $A_k \supset A$ , so hat  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$  nach 18-2-1 und 19-2-2.

Aus 19-2-21 folgt z. B., daß im  $R_n$  die Menge der rationalen Punkte kein  $G_\delta$ , also die Menge der irrationalen Punkte kein  $F_\sigma$  ist.

**19-2-3.** Für eine separable Youngsche Menge  $A$  gilt  $A_k = A_\sigma$ .

Da  $A$  nach 18-5-61 insichdicht, ist  $A_\sigma \subseteq A_k$ . Bleibt zu zeigen:  $A_k \subseteq A_\sigma$ . Sei  $a \in A_k$  und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ . Nach 12-7-5 ist  $A_k$  abgeschlossen in  $A$ , also nach 10-7-41 ein  $G_\delta$  in  $A$ ; somit ist auch  $A_k \cap U_a$  ein  $G_\delta$  in  $A$ , also nach 19-1-2 eine Youngsche Menge. Da  $A_k$  insichdicht, ist nach 12-4-21

auch  $A_k U_a$  insichdicht, hat mithin nach 19.2.21 die Mächtigkeit  $\aleph$ ; daher ist  $a \in A_v$ . Aus  $a \in A_k$  folgt also  $a \in A_v$ , d. h. es ist  $A_k \subseteq A_v$ , w. z. b. w.

**19.2.4.** Eine separable Youngsche Menge  $A$  kann auf eine und nur eine Weise zerlegt werden in zwei fremde Summanden, von denen einer abzählbar, der andere perfekt in  $A$  ist; diese Zerlegung ist:  $A = A_u + A_v$ .

Nach 13.5.4 und 13.5.61 ist  $A = A_u + A_v$  eine solche Zerlegung. Sei andererseits  $A = A_1 + A_2$ ,  $A_1 A_2 = \Lambda$ ,  $A_1$  abzählbar,  $A_2$  perfekt in  $A$ ; wir haben zu zeigen  $A_2 = A_v$  (dann ist von selbst auch  $A_1 = A_u$ ). Da  $A_2$  insichdicht, ist  $A_2 \subseteq A_k$ , also nach 19.2.3 auch  $A_2 \subseteq A_v$ . Bleibt zu zeigen:  $A_v \subseteq A_2$ . Sei also  $a \in A_v$ ; in jeder Umgebung  $U_a$  liegen dann unabzählbar viele Punkte von  $A$ , und weil  $A_1$  abzählbar, ist  $U_a A_2 \supset \Lambda$ ; also ist  $a \in A_2^0$ , und weil  $A_2$  abgeschlossen in  $A$ , auch  $a \in A_2$ . Aus  $a \in A_v$  folgt also  $a \in A_2$ , d. h. es ist  $A_v \subseteq A_2$ , w. z. b. w.

Literatur: Der Mächtigkeitssatz 19.2.21 stammt von W. H. Young, Leipz. Ber. 55 (1903) S. 287.

**3. Perfekte Mengen in Youngschen Räumen.** Nach 19.1.21 ist jede in einer Youngschen Menge perfekte Menge selbst eine Youngsche Menge. Also folgt aus 19.2.2 und 13.2.1:

**19.3.1.** In einem Youngschen Raume hat jede perfekte Menge  $\supset \Lambda$  mindestens die Mächtigkeit  $\aleph$ , jede separable perfekte Menge  $\supset \Lambda$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .

In 19.2.21 ist enthalten:

**19.3.11.** In einem Youngschen Raume ist eine separable abgeschlossene Menge abzählbar oder von der Mächtigkeit  $\aleph$ , je nachdem ihr perfekter Kern  $= \Lambda$  oder  $\supset \Lambda$  ist.

Bezeichnen wir, wie in § 13, 4, mit  $A^*$  die Menge aller Verdichtungs-punkte von  $A$ , so gilt:

**19.3.2.** Für eine separable, in einem Youngschen Raume perfekte Menge  $A$  gilt:  $A = A_v = A^*$ .

Da  $A$  insichdicht, ist  $A = A_k$ , also nach 19.2.3:  $A = A_v$ , und weil  $A$  abgeschlossen, ist (§ 13, 5)  $A_v = A^*$ .

In 19.2.4 ist enthalten:

**19.3.3.** Eine separable, in einem Youngschen Raume abgeschlossene Menge kann auf eine und nur eine Weise zerlegt werden in zwei fremde Summanden, von denen einer abzählbar, der andere perfekt ist; diese Zerlegung ist:  $A = A_u + A^*$ .

Literatur: Die Sätze über die Mächtigkeit der perfekten und abgeschlossenen Mengen gehen zurück auf G. Cantor, Acta math. 2 (1883) S. 409. Neuere Unter-

suchungen von W. Hurewicz, Fund. math. 12 (1928) S. 78. Satz 19.3-8 wird auch als Cantor-Bendixsonsches Theorem bezeichnet: G. Cantor, Math. Ann. 21 (1883) S. 575; J. Bendixson, Acta math. 2 (1883) S. 415.

**4. Mengen erster und zweiter Kategorie.** Während die Summe endlich vieler nirgends dichter Mengen nach 11.2.4 wieder nirgends dicht ist, gilt dies für Summen aus abzählbar unendlich vielen nirgends dichten Mengen nicht; ist z. B.  $a$  ein Punkt des  $R_1$ , so ist die Menge  $\{a\}$  nirgends dicht im  $R_1$ , die Menge aller rationalen Punkte des  $R_1$  ist also Summe abzählbar vieler im  $R_1$  nirgends dichter Mengen, selbst aber dicht im  $R_1$ .

Die Menge  $A \subseteq B$  heißt von erster Kategorie in  $B$ , wenn  $A$  Summe abzählbar vieler in  $B$  nirgends dichter Mengen ist. Anderenfalls heißt  $A$  von zweiter Kategorie in  $B$ . Die Begriffe „von erster (zweiter) Kategorie“ sind, ebenso wie der Begriff „nirgends dicht“, relativer Natur; nur wo kein Zweifel besteht, welche Menge  $B$  als Raum zugrunde gelegt ist, kann der Zusatz „in  $B$ “ wegleiben. Jede nirgends dichte Menge ist auch von erster Kategorie. Die leere Menge ist von erster Kategorie in jedem Raume: eine Menge zweiter Kategorie ist also stets  $\supset A$ . Aus 11.2.3 folgt unmittelbar:

**19.4.1.** Ist  $A$  von erster Kategorie, und  $A' \subseteq A$ , so ist auch  $A'$  von erster Kategorie.

Damit ist gleichbedeutend:

**19.4.11.** Ist  $A$  von zweiter Kategorie und  $A' \supseteq A$ , so ist auch  $A'$  von zweiter Kategorie.

**19.4.2.** Die Summe abzählbar vieler Mengen erster Kategorie ist von erster Kategorie.

Aus 19.4.1 und 19.4.2 folgt:

**19.4.21.** Das System aller Mengen erster Kategorie eines topologischen Raumes ist ein  $\sigma$ -Körper und ein  $\delta$ -Körper.

Aus 11.3.21 folgt:

**19.4.3.** Ist  $A' \subseteq A \subseteq B \subseteq B'$ , und ist  $A$  von erster Kategorie in  $B$ , so ist auch  $A'$  von erster Kategorie in  $B'$ .

Damit ist gleichbedeutend:

**19.4.31.** Ist  $A \subseteq A' \subseteq B' \subseteq B$ , und ist  $A$  von zweiter Kategorie in  $B$ , so ist auch  $A'$  von zweiter Kategorie in  $B'$ .

**19.4.32.** Ist  $B$  dicht in  $C$  und  $A$  von erster Kategorie in  $C$ , so ist  $A \cap B$  von erster Kategorie in  $B$ .

Dies folgt aus 11.3.9.

**19.4.4.** *Damit  $A$  von erster Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$   $G$  von erster Kategorie in  $G$  sei für jede offene Menge  $G$ .*

Notwendig: Dies folgt aus 11.3.61. Hinreichend: Man wähle für  $G$  den zugrunde gelegten Raum  $E$ .

Damit ist gleichbedeutend:

**19.4.41.** *Damit  $A$  von zweiter Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine offene Menge  $G$  gebe, für die  $A \cap G$  von zweiter Kategorie in  $G$  ist.*

**19.4.5.** *Jeder abzählbare Teil von  $B_h$  ist von erster Kategorie in  $B$ .*

Dies folgt unmittelbar aus 12.2.6.

**19.4.51.** *Ist  $A \subseteq B$  und  $A \cap B_j \supset A$ , so ist  $A$  von zweiter Kategorie in  $B$ .*

Dies folgt unmittelbar aus 12.2.51.

**19.4.6.** *Ist  $A$  ein  $F_\sigma$  und —  $A$  dicht, so ist  $A$  von erster Kategorie.*

Sei  $A = \bigcup_n F_n$ , wo  $F_n$  abgeschlossen; ist —  $A$  dicht, so nach 11.1.4 auch —  $F_n$ , also ist nach 11.2.51  $F_n$  nirgends dicht, also  $A$  von erster Kategorie.

**19.4.7.** *Ist  $A$  von erster Kategorie, so gibt es ein  $F_\sigma$  von erster Kategorie  $\supseteq A$ .*

Denn  $A = \bigcup_n A_n$ , wo  $A_n$  nirgends dicht; nach 11.2.12 ist auch  $A_n^0$  nirgends dicht, also  $\bigcup_n A_n^0$  ein  $F_\sigma$  von erster Kategorie  $\supseteq A$ .

Literatur: Die Mengen erster und zweiter Kategorie wurden eingeführt von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 67. Ausführliche Darstellung: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 142ff.

**5. Von erster und zweiter Kategorie in einem Punkte.** Die Menge  $A$  heißt im Punkte  $a \in E$  von erster Kategorie (in dem zugrunde gelegten Raume  $E$ ), wenn es eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $U_a \cap A$  von erster Kategorie ist. Für jede Umgebung  $U_a^* \subseteq U_a$  ist dann nach 19.4.1 auch  $U_a^* \cap A$  von erster Kategorie. Die Menge  $A$  heißt im Punkte  $a$  von zweiter Kategorie, wenn sie nicht von erster Kategorie im Punkte  $a$  ist, d. h. wenn  $U_a \cap A$  für jede Umgebung  $U_a$  von zweiter Kategorie ist.

Die Menge aller Punkte, in denen  $A$  von erster (von zweiter) Kategorie ist, bezeichnen wir mit  $A_I$  (mit  $A_{II}$ ). Es ist dann:

$$(5) \quad E = A_I + A_{II}, \quad A_I \cap A_{II} = \Lambda.$$

**19.5.1.** *Ist  $B \subseteq A$ , so ist  $A_I \subseteq B_I$ ,  $B_{II} \subseteq A_{II}$ .*

Dies folgt aus 19.4.1.

**19.5.11.** *Es ist  $A_{II} \subseteq A^0$ .*

Denn ist  $a \in A^0$ , so gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $A \cap U_a = \Lambda$ ; dann aber ist  $A \cap U_a$  von erster Kategorie, also ist  $a \in A_I$ , mithin  $a \sim \varepsilon A_I$ .

**19.5.12.** *Ist  $A$  abgeschlossen, so ist  $A_{II} \subseteq A$ .*

Dies folgt wegen  $A = A^0$  aus 19.5.11.

**19.5.2.** Ist  $G$  offen, so ist, damit  $G A$  von erster Kategorie sei, notwendig und hinreichend, daß  $G \subseteq A_I$  sei.

Notwendig: Sei  $G A$  von erster Kategorie; dann ist  $G$  selbst für jedes  $a \in G$  eine Umgebung  $U_a$ , für die  $U_a A$  von erster Kategorie ist. Hinreichend: Ist  $G \subseteq A_I$ , so gibt es zu jedem  $a \in G$  eine Umgebung  $U_a \subseteq G$ , so daß  $U_a A$  von erster Kategorie. Dann ist  $G = \bigcup_{a \in G} U_a$ ; nach 8.1.21 können wir das System dieser  $U_a$  wohlgeordnet annehmen und die  $U_a$  mit  $U^\xi$  ( $\xi < \alpha$ ) bezeichnen, so daß nun:  $G = \bigcup_{\xi < \alpha} U^\xi$ ,  $G A = \bigcup_{\xi < \alpha} U^\xi A$ , oder, indem wir  $U^\xi A = \bigcup_{\eta < \xi} U^\eta = A^\xi$  setzen:  $G A = \bigcup_{\xi < \alpha} A^\xi$ . Nach Annahme ist  $U^\xi A$ , nach 19.4.1 also auch  $A^\xi$  von erster Kategorie; d. h.  $A^\xi = S A_n^\xi$ , wo  $A_n^\xi$  nirgends dicht; daher ist  $G A = \bigcup_{\xi < \alpha} S A_n^\xi = S \bigcup_{n \xi < \alpha} A_n^\xi$ . Um zu zeigen, daß  $G A$  von erster Kategorie, genügt es also zu zeigen:  $A_n = \bigcup_{\xi < \alpha} A_n^\xi$  ist nirgends dicht; oder nach 11.2.2: zu jeder offenen Menge  $H \supset A$  gibt es eine offene Menge  $H' \supset A$ ,  $H' \subseteq H$ , so daß  $A_n H' = A$ . Das bedarf eines Beweises nur, wenn  $H G \supset A$ ; dann gibt es unter den  $U^\xi$  eines von kleinstem Index  $\xi$ , so daß  $U^\xi H \supset A$ , etwa  $U^\gamma$ ; dann ist  $U^\xi H = A$  für  $\xi < \gamma$ , wegen  $A^\xi \subseteq U^\xi$  also auch  $H A_n^\xi = A$  für  $\xi < \gamma$ ; und da  $U^\gamma A^\xi = A$  für  $\xi > \gamma$ , ist  $U^\gamma H A_n = H A_n^\gamma$ ; da  $A_n^\gamma$  nirgends dicht, gibt es nach 11.2.2 eine offene Menge  $H' \supset A$ ,  $H' \subseteq U^\gamma H$ , so daß  $H' A_n^\gamma = A$ ; wegen  $U^\gamma H A_n = H A_n^\gamma$  besagt dies aber:  $H' A_n = A$ , w. z. b. w.

Setzt man in 19.5.2  $G = E$ , so erhält man wegen (5):

**19.5.21.** Damit  $A$  von erster Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_I = E$ ,  $A_{II} = A$  sei.

**19.5.3.** Die Menge  $A_I$  ist offen,  $A_{II}$  abgeschlossen.

Denn ist  $a \in A_I$  und  $U_a$  eine Umgebung von  $a$ , für die  $U_a A$  von erster Kategorie, so ist auch  $U_a \subseteq A_I$ , d. h.  $A_I$  ist offen; da nach (5)  $A_{II} = -A_I$ , ist also  $A_{II}$  abgeschlossen.

Aus 19.5.2 und 19.5.3 folgt, daß  $A_I$  die größte offene Menge  $G$  ist, für die  $A G$  von erster Kategorie ist.

**19.5.31.** Die Menge  $A_{II}$  ist ein Stück, d. h.<sup>1)</sup> es ist:  $A_{II} = (A_{II})^0$ .

Nach 19.5.3 ist  $A_{II}$  abgeschlossen; aus  $A_{II} \subseteq A_{II}$  folgt also:  $(A_{II})^0 \subseteq A_{II}^0 = A_{II}$ . Es ist also nur mehr zu zeigen:  $A_{II} \subseteq (A_{II})^0$ , oder — indem wir zu den Komplementen übergehen und  $-(A_{II})^0 = B$  setzen:  $B \subseteq A_I$ ; und da  $B$  offen, genügt es nach 19.5.2 zu zeigen:  $B A$  ist von

<sup>1)</sup> Nach 10.5.9.



erster Kategorie. Nun ist nach (5):  $BA = BA_I + BA_{II}$ ; hierin ist, da nach 19.5.3  $BA_I$  offen ist, zufolge 19.5.2  $BA_I$  von erster Kategorie; ferner ist  $BA_{II} \subseteq BA_{II} = A_{II} - (A_{II})^0 \subseteq A_{II} - A_{II} = A_{II}$ ; da  $A_{II}$  abgeschlossen, ist nach 11.2.7  $A_{II}$ , nirgends dicht, also nach 11.2.3 auch  $BA_{II}$  nirgends dicht, und mithin von erster Kategorie. Als Summe zweier Mengen erster Kategorie ist also nach 19.4.2 auch  $BA$  von erster Kategorie, w. z. b. w.

Schreiben wir kurz  $(A_I)^0 = A_I^0$ , so gilt:

$$19.5.32. \quad A_I = (A_I^0)_i.$$

Denn nach (5), 19.5.31 und 10.5.11 ist  $A_I = -A_{II} = -(A_{II})^0 = (-A_{II})_i = (A_I^0)_i$ .

19.5.33.  $A - A_{II}$  ist von erster Kategorie.

Da nach 10.5.11:  $-A_{II} = A_I^0$ , ist nach § 10 (6.3)  $A - A_{II} = AA_I^0 = AA_I + AA_{II}$ ; nach 19.5.3 und 19.5.2 ist  $AA_I$  von erster Kategorie; nach 19.5.3 und 11.2.71 ist  $AA_{II}$  nirgends dicht, also nach 11.2.3 auch  $AA_{II}$  nirgends dicht, mithin von erster Kategorie; also ist  $A - A_{II}$  von erster Kategorie nach 19.4.2.

19.5.34. Ist  $A = \bigcup_n A_n$ , so ist  $\bigcup_n A_{nII}$  dicht in  $A_{II}$ .

Nach 19.5.1 ist  $A_{nII} \subseteq A_{II}$ , also auch  $\bigcup_n A_{nII} \subseteq A_{II}$ , mithin  $\bigcup_n A_{nII} \subseteq A_{II}$ ; nach 11.3.1 ist also nur mehr zu zeigen:  $A_{II} \subseteq (\bigcup_n A_{nII})^0$ , oder, indem wir  $-(\bigcup_n A_{nII})^0 = B$  setzen:  $B \subseteq A_I$ . Da  $B \subseteq -(A_{nII})^0$ , und da nach 19.5.31  $(A_{nII})^0 = A_{nII}$ , ist  $B \subseteq -A_{nII}$ , d. h. nach (5):  $B \subseteq A_{nI}$ , mithin ist nach 19.5.2  $BA_n$  von erster Kategorie, also ist nach 19.4.2 auch  $BA = \bigcup_n BA_n$  von erster Kategorie, also nach 19.5.2:  $B \subseteq A_I$ , w. z. b. w.

Ist  $G$  offen, und ist  $A G'$  für jede nicht leere offene Menge  $G' \subseteq G$  von zweiter Kategorie, so sagen wir:  $A$  ist in  $G$  überall von zweiter Kategorie. Ist  $A G'$  für jede offene Menge  $G' \supset A$  von zweiter Kategorie, so sagen wir:  $A$  ist überall von zweiter Kategorie.

19.5.4. Ist  $G$  offen, so ist, damit  $A$  in  $G$  überall von zweiter Kategorie sei, notwendig und hinreichend, daß  $G \subseteq A_{II}$  sei.

Notwendig: Ist nicht  $G \subseteq A_{II}$ , so ist nach (5):  $GA_I \supset A$ , und da nach 19.5.3  $GA_I$  offen, ist nach 19.5.2  $GA_I$  von erster Kategorie. Hinreichend: Sei  $G'$  offen und  $A \subset G' \subseteq G$ ; ist  $G \subseteq A_{II}$ , so auch  $G' \subseteq A_{II}$ , also ist nach 19.5.2  $G'A$  nicht von erster, also von zweiter Kategorie.

Setzt man in 19.5.4  $G = E$ , so erhält man wegen (5):

19.5.41. Damit  $A$  überall von zweiter Kategorie sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_I = A$ ,  $A_{II} = E$  sei.

Aus 19.5.4 folgt, daß  $A_{II_i}$  die größte offene Menge ist, in der  $A$  überall von zweiter Kategorie ist.

**19.5.42.** Ist  $A$  von zweiter Kategorie, so gibt es eine offene Menge  $G \supset A$ , so daß  $A$  in  $G$  überall von zweiter Kategorie ist.

Nach 19.5.21 ist  $A_{II} \supset A$ , nach 19.5.31 ist  $A_{II} = (A_{II_i})^0$ , also ist auch  $A_{II_i} \supset A$ , und nach 19.5.4 ist  $A$  in  $A_{II_i}$  überall von zweiter Kategorie.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 185. St. Banach, Fund. math. 16 (1930) S. 395.

6. In sich von erster (zweiter) Kategorie. Die Begriffe: von erster, von zweiter Kategorie haben relativen Charakter. Ist die Menge  $A$  von erster (zweiter) Kategorie in  $A$ , so sagen wir:  $A$  ist in sich von erster (zweiter) Kategorie. Diese Begriffe haben absoluten Charakter.

**19.6.1.** Jede abzählbare insichdichte Menge ist in sich von erster Kategorie. Dies folgt unmittelbar aus 19.4.5.

**19.6.2.** Ist  $A_i \supset A$ , so ist  $A$  in sich von zweiter Kategorie.

Dies folgt unmittelbar aus 19.4.51.

**19.6.3.** Ist  $A$  ein  $F_\sigma$  und  $A^0 - A$  dicht in  $A^0$ , so ist  $A$  in sich von erster Kategorie.

Nach 19.4.6 ist  $A$  von erster Kategorie in  $A^0$ , also nach 11.3.32 auch in  $A$ .

7. Residualmengen. Ist  $A \subseteq B$ , so heißt  $A$  eine Residualmenge in  $B$ , wenn  $B - A$  von erster Kategorie in  $B$  ist. Der Begriff „Residualmenge“ hat relativen Charakter; nur wo kein Zweifel besteht, welche Menge  $B$  als Raum zugrunde gelegt ist, kann der Zusatz „in  $B$ “ weggelassen. Aus 19.4.1 folgt:

**19.7.1.** Ist  $A$  eine Residualmenge und  $A' \supseteq A$ , so ist auch  $A'$  eine Residualmenge.

**19.7.11.** Ist  $A \subseteq B \subseteq C$ , ist  $B$  dicht in  $C$  und  $A$  eine Residualmenge in  $C$ , so ist  $A$  auch eine Residualmenge in  $B$ .

Denn  $C - A$  ist von erster Kategorie in  $C$ , also ist nach 19.4.32  $B - A$  von erster Kategorie in  $B$ .

**19.7.111.** Ist  $A$  eine Residualmenge,  $B$  von zweiter Kategorie, so ist  $AB \supset A$ .

Denn wäre  $AB = A$ , so wäre  $B \subseteq -A$ , und da  $-A$  von erster Kategorie, wäre nach 19.4.1 auch  $B$  von erster Kategorie.

**19.7.2.** Der Durchschnitt abzählbar vieler Residualmengen ist eine Residualmenge.

Dies folgt aus 19.4.2.

Aus 19.7.1 und 19.7.2 folgt:

**19.7.21.** *Das System aller Residualmengen eines topologischen Raumes ist ein  $\sigma$ -Ring und ein  $\delta$ -Ring.*

**19.7.3.** *Damit  $A$  eine Residualmenge sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A \cap G$  für jedes offene  $G$  eine Residualmenge in  $G$  sei.*

Notwendig: Ist  $A$  eine Residualmenge, so ist  $-A$  von erster Kategorie, also nach 19.4.4  $G - A = G - A \cap G$  von erster Kategorie in  $G$ . Hinreichend: Man wähle für  $G$  den zugrunde gelegten Raum  $E$ .

**19.7.4.** *Jedes dichte  $G_\delta$  ist eine Residualmenge.*

Dies folgt unmittelbar aus 19.4.6.

Von besonderer Bedeutung sind die Residualmengen in Youngschen Räumen.

**19.7.5.** *Damit  $A$  eine Residualmenge im Youngschen Raume  $E$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß es eine dichte Youngsche Menge  $B \subseteq A$  gebe.*

Notwendig: Ist  $A$  eine Residualmenge, so ist  $-A = \bigcap_n C_n$ , wo  $C_n$  nirgends dicht; dann ist nach 11.2.12 auch  $C_n^0$  nirgends dicht; also ist nach 11.2.51  $-C_n^0$  eine dichte offene Menge, also nach 19.1.2 eine dichte Youngsche Menge; also ist nach 19.1.4 auch  $B = D(-C_n^0)$  eine dichte Youngsche Menge, und wegen  $-A \subseteq \bigcap_n C_n^0$  ist  $B \subseteq A$ . Hinreichend: Als Youngsche Menge ist  $B$  ein absolutes  $G_\delta$ , also auch ein  $G_\delta$  in  $E$ ; nach 19.7.4 ist also  $B$  eine Residualmenge, nach 19.7.1 also auch  $A$ .

In 19.7.5 ist enthalten:

**19.7.51.** *In einem Youngschen Raume ist jede Residualmenge dicht.*

Insbesondere also:

**19.7.511.** *Ist  $B$  eine Youngsche Menge  $\supset A$  und  $A$  eine Residualmenge in  $B$ , so ist auch  $A \supset A$ .*

Aus 19.7.2 und 19.7.51 folgt:

**19.7.52.** *In einem Youngschen Raum ist der Durchschnitt abzählbar vieler Residualmengen dicht.*

**19.7.53.** *Ist  $A$  eine Residualmenge in einem insichdichten Youngschen Raume  $E \supset A$ , so gibt es ein in  $A$  nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum.*

Nach 19.7.5 gibt es eine dichte Youngsche Menge  $B \subseteq A$ ; nach 12.4.8 ist  $B$  insichdicht, also  $B \supset A$ ; also gibt es nach 19.2.1 ein in  $B$  nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum  $C \subseteq B \subseteq A$ , und nach 11.3.21 ist  $C$  auch nirgends dicht in  $A$ .

**19.7.54.** *Ist  $A$  eine Residualmenge in einem separablen insichdichten Youngschen Raume, so ist  $A = A_\bullet$ .*

Nach 19.7.5 gibt es eine dichte Youngsche Menge  $B \subseteq A$ ; nach 12.4.3 ist  $B$  insichdicht:  $B = B_\sharp$ , also nach 19.2.3 auch  $B = B_\circ$ . Sei  $a \in A$ ; wir haben zu zeigen, daß dann auch  $a \in A_\circ$ . Da  $B$  dicht, gibt es in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $b \in B$ ; da dann auch  $b \in B_\circ$ , ist  $B \cap U_a$  unabzählbar, also auch  $A \cap U_a$  unabzählbar; also ist  $a \in A_\circ$ , w. z. b. w.

**19.7.6.** Jede Youngsche Menge  $A \supset \Lambda$  ist in sich von zweiter Kategorie.

Denn wäre  $A$  in sich von erster Kategorie, so wäre  $A - A = \Lambda$  eine Residualmenge in  $A$ , entgegen 19.7.511.

**19.7.61.** Ist  $A$  ein  $G_\delta$  in einem Youngschen Raume  $E$ , so ist, damit  $A$  von erster Kategorie sei, notwendig und hinreichend, daß  $A$  nirgends dicht sei.

Notwendig: Wäre  $A$  nicht nirgends dicht, so gäbe es nach 11.8.7 ein offenes  $G \supset \Lambda$ , so daß  $A \cap G$  dicht in  $G$ ; da  $-A$  eine Residualmenge, gibt es nach 19.7.5 eine dichte Youngsche Menge  $B \subseteq -A$ ; nach 19.1.2 ist  $B \cap G$  eine Youngsche Menge, und nach 11.8.6 ist  $B \cap G$  dicht in  $G$ ; da auch  $A \cap G$  als  $G_\delta$  im Youngschen Raume  $E$  nach 19.1.2 eine Youngsche Menge ist, wäre nach 19.1.4 (angewendet auf den Raum  $G$ )  $A \cap B \cap G$  in  $G$  dicht, was unmöglich, da  $B \subseteq -A$ , also  $A \cap B = \Lambda$ . Hinreichend: Dies ist trivial.

Aus 19.7.61 folgt wegen 11.2.21:

**19.7.62.** In einem Youngschen Raume ist jede offene Menge  $G \supset \Lambda$  von zweiter Kategorie.

**19.7.7.** In einem Youngschen Raume ist eine Residualmenge  $A$  überall von zweiter Kategorie.

Sei  $G \supset \Lambda$  offen; da  $-A$  von erster Kategorie, so nach 19.4.1 auch  $G - A$ ; wäre auch  $G \cap A$  von erster Kategorie, so nach 19.4.2 auch  $G = (G - A) \cup G \cap A$ , entgegen 19.7.62. Also ist  $G \cap A$  von zweiter Kategorie.

**19.7.71.** Ist  $A$  eine Residualmenge im Youngschen Raume  $E \supset \Lambda$ , so ist  $-A$  keine Residualmenge.

Dies folgt aus 19.7.7, weil  $-A$  von erster Kategorie ist.

Literatur: Die wichtigsten Sätze über Residualmengen stammen von R. Baire; die Bezeichnung „Residualmengen“ hat A. Denjoy eingeführt.

**8. Residual in einem Punkte.** Sei wieder ein beliebiger topologischer Raum  $E$  zugrunde gelegt. Die Menge  $A$  heißt residual im Punkte  $a$ , wenn es eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $U_a \cap A$  eine Residualmenge in  $U_a$  ist. Die Menge aller Punkte, in denen  $A$  residual ist, bezeichnen wir mit  $A_{III}$ .

**19.8.1.**  $A_{III} = (-A)_I$ .

Denn die Aussage: „ $U_a \cap A$  ist eine Residualmenge in  $U_a$ “ bedeutet:  $U_a - A$  ist von erster Kategorie in  $U_a$ , und dies ist nach 19.4.3 und 19.4.4 gleichbedeutend mit:  $U_a - A$  ist von erster Kategorie.

**19-8-2.** Ist  $G$  offen, so ist, damit  $G$  eine Residualmenge in  $G$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $G \subseteq A_{III}$  sei.

Denn nach 19-8-1 ist  $G \subseteq A_{III}$  gleichbedeutend mit:  $G \subseteq (-A)_I$ , also nach 19-5-2 mit:  $G - A$  ist von erster Kategorie, also nach 19-4-3 und 19-4-4 mit:  $G - A$  ist von erster Kategorie in  $G$ , d. h.  $G$  ist eine Residualmenge in  $G$ .

Darin ist für  $G = E$  enthalten:

**19-8-21.** Damit  $A$  eine Residualmenge sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_{III} = E$  sei.

Aus 19-8-1, 19-5-3 und 19-5-32 folgt (wenn wir kurz  $(A_{III})^0 = A_{III}''$  schreiben):

**19-8-3.** Die Menge  $A_{III}$  ist offen und es ist:  $A_{III} = (A_{III}'')_I$ .

**19-8-4.** In einem Youngschen Raume ist  $A_{III} \subseteq A_{II}$ .

Sei  $a \in A_{III}$ ; dann gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $U_a$  eine Residualmenge in  $U_a$ ; da  $U_a$  nach 19-1-2 eine Youngsche Menge, ist nach 19-7-7  $U_a$  überall von zweiter Kategorie in  $U_a$ , d. h. es ist  $A$  überall von zweiter Kategorie in  $U_a$ , also ist nach 19-5-4  $U_a \subseteq A_{II}$ , mithin  $a \in A_{II}$ . Aus  $a \in A_{III}$  folgt also  $a \in A_{II}$ , d. h.  $A_{III} \subseteq A_{II}$ .

**9. Offen bis auf eine Menge erster Kategorie.** Die Menge  $A$  heißt offen (bzw. abgeschlossen) bis auf eine Menge erster Kategorie, wenn es eine offene (bzw. abgeschlossene) Menge  $B$  gibt, so daß  $A - B$  und  $B - A$  von erster Kategorie sind. Jede Menge erster Kategorie, jede Residualmenge ist offen (abgeschlossen) bis auf eine Menge erster Kategorie.

**19-9-1.** Die Begriffe „offen bis auf eine Menge erster Kategorie“ und „abgeschlossen bis auf eine Menge erster Kategorie“ sind gleichbedeutend.

Sei  $G$  offen, und seien  $A - G$  und  $G - A$  von erster Kategorie: setzen wir  $F = G^0$ , so ist  $F$  abgeschlossen; da  $A - F \subseteq A - G$  ist nach 19-4-1  $A - F$  von erster Kategorie; da  $F - A \subseteq (F - G) + (G - A)$ , und da nach 11-2-71  $F - G = G_\rho$  nirgends dicht, also von erster Kategorie, so ist nach 19-4-1 und 19-4-2 auch  $F - A$  von erster Kategorie. — Sei  $F$  abgeschlossen, und seien  $A - F$  und  $F - A$  von erster Kategorie. Setzen wir  $G = F_i$ , so ist  $G$  offen; da  $G - A \subseteq F - A$ , ist  $G - A$  von erster Kategorie; da  $A - G \subseteq (A - F) + (F - G)$ , und nach 11-2-7  $F - G = F$ , von erster Kategorie, so auch  $A - G$ .

**19-9-2.** Ist  $A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie, so auch das Komplement  $-A$ .

Sei  $A' = -A$ . Es gibt eine offene Menge  $G$ , so daß  $A - G$  und  $G - A$  von erster Kategorie; setzen wir  $-G = F$ , so ist  $F$  abgeschlossen und  $A' - F = G - A$ ,  $F - A' = A - G$ . Also ist  $A'$  abgeschlossen bis auf

eine Menge erster Kategorie, somit nach 19.9.1 auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

**19.9.21.** *Das System aller bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Mengen eines topologischen Raumes  $E$  ist ein  $\sigma$ -Körper.*

Da  $E$  als Residualmenge offen bis auf eine Menge erster Kategorie ist, so ist nach 19.9.2 und 3.3.1 nur mehr zu zeigen: Sind die Mengen  $A_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) offen bis auf eine Menge erster Kategorie, so auch  $A = \bigcup A_\nu$ . Nach Voraussetzung gibt es eine offene Menge  $G_\nu$ , so daß  $A_\nu - G_\nu$  und  $G_\nu - A_\nu$  von erster Kategorie. Setzen wir  $G = \bigcup G_\nu$ , so ist auch  $G$  offen, und wegen  $A - G \subseteq \bigcup (A_\nu - G_\nu)$ ,  $G - A \subseteq \bigcup (G_\nu - A_\nu)$  sind nach 19.4.1 und 19.4.2 auch  $A - G$  und  $G - A$  von erster Kategorie.

**19.9.3.** *Jede  $G_\delta$ -Menge  $A$  ist offen bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Da jede offene Menge auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie ist, folgt die Behauptung wegen 3.6.1 aus 19.9.21.

**19.9.31.** *Damit  $A$  offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß  $A = A' + A''$ , wo  $A'$  ein  $G_\delta$  und  $A''$  von erster Kategorie.*

Notwendig: Sei  $G$  offen und seien  $A - G$  und  $G - A$  von erster Kategorie. Nach 19.4.7 gibt es eine  $F_\sigma$ -Menge  $B \supseteq G - A$ , die von erster Kategorie ist. Setzen wir  $G - B = A'$ ,  $A - A' = A''$ , so ist  $A' \subseteq A$ , also  $A = A' + A''$ ; ferner ist  $A'$  ein  $G_\delta$ , und wegen  $A'' \subseteq B + (A - G)$  ist  $A''$  von erster Kategorie. Hinreichend: Sei  $A'$  ein  $G_\delta$ . Nach 19.9.3 gibt es eine offene Menge  $G$ , so daß  $A' - G$  und  $G - A'$  von erster Kategorie. Ist  $A = A' + A''$ , wo  $A''$  von erster Kategorie, so ist  $A - G = (A' - G) + (A'' - G)$  von erster Kategorie, und wegen  $G - A \subseteq G - A'$  ist auch  $G - A$  von erster Kategorie.

**19.9.4.** *Damit  $A$  offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_I + A_{III}$  dicht sei.*

Notwendig: Sei  $G$  offen und seien  $A - G$  und  $G - A$  von erster Kategorie. Wir setzen  $-G^0 = G'$ ; dann ist auch  $G'$  offen, nach 10.5.11 ist  $G' = (-G)_i$  und nach § 10 (6.1) ist  $-(G + G') = G_g$ ; nach 11.2.71 ist also  $-(G + G')$  nirgends dicht; also ist  $G + G'$  nach 11.2.5 dicht. Da  $G - A$  von erster Kategorie, also nach 19.4.4 auch von erster Kategorie in  $G$ , ist  $G \setminus A$  eine Residualmenge in  $G$ , also ist nach 19.8.2  $G \subseteq A_{III}$ . Da  $A \setminus G' \subseteq A - G$  und  $A - G$  von erster Kategorie, ist  $A \setminus G'$  von erster Kategorie, also nach 19.5.2  $G' \subseteq A_I$ . Also ist  $G + G' \subseteq A_I + A_{III}$ , und da  $G + G'$  dicht, ist nach 11.1.4 auch  $A_I + A_{III}$  dicht. Hinreichend: Sei  $A_I + A_{III}$  dicht; da nach 19.5.3 und 19.8.3  $A_I + A_{III}$  offen, ist dann nach 11.2.51

—  $(A_I + A_{III})$  nirgends dicht. Wir setzen  $G = A_{III}$ ; nach 19-8-2 ist dann  $G - A$  von erster Kategorie in  $G$ , also auch von erster Kategorie im Raume  $E$ . Ferner ist  $A - G \subseteq A_I + (A - (A_I + A_{III}))$ ; hierin ist nach 19-5-2  $A_I$  von erster Kategorie, und da  $-(A_I + A_{III})$  nirgends dicht, ist auch  $A - (A_I + A_{III})$  von erster Kategorie; somit ist auch  $A - G$  von erster Kategorie.

**19-9-5.** *Damit  $A$  offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_{IIi} \subseteq A_{III}$  sei.*

Notwendig: Da nach 19-9-4  $A_I + A_{III}$  dicht, ist nach 11-1-1 und 10-5-3:  $E = (A_I + A_{III})^0 = A_I^0 + A_{III}^0$ . Da nach § 19 (5):  $A_{II} = -A_I$ , ist  $A_{IIi} = (-A_I)_i$ , also nach 10-5-11:  $A_{IIi} = -(A_I^0)_i$ ; wegen  $E = A_I^0 + A_{III}^0$  ist also  $A_{IIi} \subseteq A_{III}^0$ , also auch  $A_{IIi} \subseteq (A_{III}^0)_i$ , also nach 19-8-3  $A_{IIi} \subseteq A_{III}$ . Hinreichend: Nach § 19 (5) und 19-5-31 ist  $E = A_I + (A_{IIi})^0$ ; nach 11-1-1 ist also  $A_I + A_{IIi}$  dicht; ist  $A_{IIi} \subseteq A_{III}$ , so ist also nach 11-1-4 auch  $A_I + A_{III}$  dicht, also nach 19-9-4  $A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

**19-9-51.** *Damit die Menge  $A$  eines Youngschen Raumes offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß  $A_{IIi} = A_{III}$  sei.*

Dies folgt aus 19-9-5 und 19-8-4.

**19-9-6.** *Ist  $A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $E$ , und ist  $E$  ein  $G_\delta$  in  $E'$ , so ist  $A$  auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $E'$ .*

Nach 19-9-31 ist  $A = A' + A''$ , wo  $A'$  ein  $G_\delta$  in  $E$  und  $A''$  von erster Kategorie in  $E$ . Nach 10-9-2 ist  $A'$  auch ein  $G_\delta$  in  $E'$  und nach 19-4-3 ist  $A''$  von erster Kategorie in  $E'$ ; die Behauptung folgt also aus 19-9-31.

**19-9-7.** *In einem separierten Raume  $E$  ist jede Menge  $A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Wir zerlegen nach § 12 (2):  $E = E_j + E_h$ ;  $A = A E_j + A E_h$ . Nach 12-2-41 ist  $A E_j$  offen in  $E$ ; nach 12-7-2 ist  $E_j$  dicht in  $E$ , also ist nach 12-2-3 und 11-2-51  $E_h$  nirgends dicht in  $E$ ; nach 11-3-21 ist also auch  $A E_h$  nirgends dicht und mithin von erster Kategorie in  $E$ .

Wir wollen noch zeigen, daß es in geeigneten Räumen  $E$  Mengen gibt, die nicht offen sind bis auf eine Menge erster Kategorie. Wir schicken voraus:

**19-9-8.** *Ist der Raum  $E \supset A$ , und ist sowohl  $A$  als das Komplement  $-A$  überall von zweiter Kategorie, so ist  $A$  nicht offen bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Nach 19-5-41 ist  $A_{II} = E$ ,  $(-A)_I = A$ , also nach 19-8-1  $A_{III} = A$ ; die Behauptung folgt also aus 19-8-5.

Nennen wir nun eine Punktmenge  $A$  total imperfekt, wenn sie keinen perfekten Teil  $\supset A$  enthält, so gilt:

**19-9-81.** *Ist  $E$  ein insichdichter Youngscher Raum, ist  $A \subseteq E$ , und ist sowohl  $A$  als  $-A$  total imperfekt, so sind  $A$  und  $-A$  überall von zweiter Kategorie.*

Angenommen, es sei z. B.  $A$  nicht überall von zweiter Kategorie; dann gibt es eine offene Menge  $G \supset A$ , so daß  $A \cap G$  von erster Kategorie in  $G$ ; dann aber ist  $G - A$  eine Residualmenge in  $G$ ; da nach 12-4-21  $G$  eine insichdichte Youngsche Menge ist, so gibt es nach 19-7-58 ein dyadisches Diskontinuum  $C \subseteq G - A$ ; wegen 18-9-8 widerspricht dies aber der Annahme,  $-A$  sei total imperfekt.

**19-9-9.** *In einem separablen Youngschen Raume  $E$ , dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, gibt es eine unabzählbare, total imperfekte Menge  $B$ , deren Komplement  $-B$  gleichfalls unabzählbar und total imperfekt ist.*

Nach 19-2-21 hat  $E$  die Mächtigkeit  $\aleph$ ; da  $E$  als metrischer Raum nach 14-2-41 und 14-2-1 regulär ist, hat nach 14-2-61 auch das System aller in  $E$  perfekten Mengen die Mächtigkeit  $\aleph$ . Bezeichnet  $\gamma$  die kleinste Ordinalzahl der Mächtigkeit  $\aleph$ , so können also nach 8-3-2 sowohl die Punkte  $a \in E$  als auch die nicht leeren in  $E$  perfekten Mengen  $P$  eineindeutig den Ordinalzahlen  $\xi < \gamma$  zugeordnet werden; seien  $a_\xi$  ( $\xi < \gamma$ ) die sämtlichen Punkte  $a \in E$  und  $P_\xi$  ( $\xi < \gamma$ ) die sämtlichen nicht leeren in  $E$  perfekten Mengen. Wir bezeichnen nun mit  $b_0$  den ersten zu  $P_0$  gehörigen Punkt  $a_\xi$ , mit  $c_0$  den ersten auf  $b_0$  folgenden zu  $P_0$  gehörigen Punkt  $a_\xi$ ; nehmen wir nun an, für alle  $\eta' < \eta$  ( $\eta < \gamma$ ) seien die Punkte  $b_{\eta'}$  und  $c_{\eta'}$  definiert, so bezeichnen wir mit  $b_\eta$ ,  $c_\eta$  die beiden ersten von allen  $b_{\eta'}$  und  $c_{\eta'}$  ( $\eta' < \eta$ ) verschiedenen Punkten  $a_\xi$ , die zu  $P_\eta$  gehören (solche Punkte gibt es, weil die Menge der Punkte  $b_{\eta'}$ ,  $c_{\eta'}$  ( $\eta' < \eta$ ) eine Mächtigkeit  $< \aleph$ , die Menge  $P_\eta$  aber nach 19-3-1 die Mächtigkeit  $\aleph$  hat). Die Menge aller Punkte  $b_\eta$  ( $\eta < \gamma$ ), die wir so erhalten, heiße  $B$ , die Menge der Punkte  $c_\eta$  ( $\eta < \gamma$ ) heiße  $C$ . Dann sind  $B$  und  $C$  zwei fremde Mengen der Mächtigkeit  $\aleph$ ; wegen  $C \subseteq -B$  sind also  $B$  und  $-B$  unabzählbar, und da sowohl  $B$  als  $C$  von jeder in  $E$  perfekten Menge  $P \supset A$  mindestens einen Punkt enthalten, kann weder  $P \subseteq B$ , noch  $P \subseteq -B$  sein, d. h.  $B$  und  $-B$  sind total imperfekt.

**19-9-91.** *In einem separablen, insichdichten Youngschen Raume  $E \supset A$  gibt es Mengen, die nicht offen sind bis auf eine Menge erster Kategorie.*

Nach 19-9-9 und 19-9-81 gibt es eine Menge  $A$  derart, daß sowohl  $A$  als  $-A$  überall von zweiter Kategorie. Nach 19-9-8 ist  $A$  nicht offen bis auf eine Menge erster Kategorie.



Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 186; Bull. soc. math. 35 (1902) S. 202. W. Sierpiński, Fund. math. 4 (1923) S. 319. G. Steinbach, Beiträge zur Mengenlehre, Diss. Bonn 1930. E. Szpilrajn, Congr. math. Varsovie 1929, S. 295. C. Kuratowski, Fund. math. 16 (1930) S. 390. F. Bernstein, Leipz. Ber. 60 (1908) S. 329. P. Mahlo, Leipz. Ber. 63 (1911) S. 346.

## § 20. Produkträume.

**1. Produktraum.** Seien  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n)}$  metrische Räume. Wir haben in § 2, 2 als das Mengenprodukt  $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(n)}$  definiert die Menge aller  $n$ -tupel  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , in denen  $a_i \in E^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Wir machen diese Produktmenge zu einem metrischen Raum  $E$  durch die Festsetzung: Ist  $a \in E$ ,  $b \in E$ , und zwar:  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ , so sei:

$$(1) \quad a b = \sqrt{(a_1 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2 + \dots + (a_n b_n)^2}.$$

In der Tat genügt diese Entfernungsdefinition den metrischen Axiomen  $1_m), 2_m)$  (§ 9, 2); für  $1_m)$ , ist dies evident, für  $2_m)$  wird es ebenso bewiesen, wie § 9 (3·11). Der metrische Raum  $E = E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(n)}$  heißt der Produktraum aus  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n)}$ . Offenbar entsteht der  $R_n$  durch  $n$ -malige Multiplikation des  $R_1$  mit sich selbst.

Betrachten wir die drei offenbar isometrischen Räume<sup>1)</sup>  $E^{(1)} \times E^{(2)} \times E^{(3)}$ ,  $(E^{(1)} \times E^{(2)}) \times E^{(3)}$ ,  $E^{(1)} \times (E^{(2)} \times E^{(3)})$  als identisch, so ist diese Multiplikation assoziativ. Wir können uns also weiterhin auf Produkte aus zwei Faktoren beschränken.

Sei also  $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$ . Sind  $a = (a_1, a_2)$ ,  $b = (b_1, b_2)$  Punkte von  $E$ , so ist:

$$(1.1) \quad a_i b_i \leq a b \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (i = 1, 2).$$

Sei nun  $((a_r))$  eine Punktfolge aus  $E$  und  $a_r = (a_{1r}, a_{2r})$ . Aus (1.1) entnehmen wir:

**20.1.1.** Damit  $\lim a_r = a$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\lim a_{1r} = a_1$ ,  $\lim a_{2r} = a_2$ .

**20.1.2.** Ist  $a$  Häufungspunkt von  $((a_r))$ , so ist  $a_1$  Häufungspunkt von  $((a_{1r}))$  und  $a_2$  Häufungspunkt von  $((a_{2r}))$ .

**20.1.3.** Damit  $((a_r))$  eine Cauchysche Folge (§ 18, 1) sei, ist notwendig und hinreichend, daß sowohl  $((a_{1r}))$  als  $((a_{2r}))$  eine Cauchysche Folge sei.

**2. Produktmengen.** Wir betrachten nun in  $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$  speziell die Punktfolgen von der Gestalt  $A \times B$ , wo  $A \subseteq E^{(1)}$ ,  $B \subseteq E^{(2)}$ .

<sup>1)</sup> Diese drei Räume bestehen aus den Punkten  $(a_1, a_2, a_3)$ ,  $((a_1, a_2), a_3)$ ,  $(a_1, (a_2, a_3))$ , wo  $a_1 \in E^{(1)}$ ,  $a_2 \in E^{(2)}$ ,  $a_3 \in E^{(3)}$ .

Ist  $A = \{a\}$  die nur aus dem Punkte  $a \in E^{(1)}$  bestehende Menge, so schreiben wir  $a \times B$  statt  $\{a\} \times B$ ; es ist also  $a \times B$  die Menge der Paare  $(a, b)$ , wo  $b \in B$ . Analog ist die Bedeutung von  $A \times b$ .

Aus 17.3.6, 17.3.61, 17.3.62 folgt wegen 20.1.1:

$$(2) \quad (A \times B)^0 = A^0 \times B^0, \quad (A \times B)^1 = (A^1 \times B^0) + (A^0 \times B^1), \\ (A \times B)_i = A_i \times B_i.$$

Aus der ersten Formel (2) und 10.5.6 folgt (bei Beachtung von 2.2.11):

**20.2.1.** *Damit  $A \times B$  abgeschlossen sei (in  $E$ ), ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  abgeschlossen (in  $E^{(1)}$  bzw. in  $E^{(2)}$ ) seien.*

Ebenso folgt aus der dritten Formel (2) und 10.3.6:

**20.2.11.** *Damit  $A \times B$  offen sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  offen seien.*

Da nach § 10 (6):  $(A \times B)_r = (A \times B) - (A \times B)_i$ , folgt aus (2) und § 2 (2):

$$(2.1) \quad (A \times B)_r = (A_r \times B) + (A \times B_r).$$

Aus der dritten Formel (2) folgt:

**20.2.12.** *Damit  $A \times B$  Randmenge sei, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens eine der Mengen  $A, B$  Randmenge sei.*

**20.2.13.** *Ist sowohl  $A$  als  $B$  ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ ), so ist auch  $A \times B$  ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ )<sup>1)</sup>.*

Nach 10.7.3 können wir schreiben:  $A = \bigcup_n A_n$ ,  $B = \bigcup_n B_n$ , wo  $A_n, B_n$  abgeschlossen und  $A_n \subseteq A_{n+1}$ ,  $B_n \subseteq B_{n+1}$ . Dann ist  $A \times B = \bigcup_n (A_n \times B_n)$ . Nach 20.2.1 ist  $A_n \times B_n$  abgeschlossen, also ist  $A \times B$  ein  $F_\sigma$ .

**20.2.2.** *Damit  $A \times B$  dicht sei, ist hinreichend, und wenn  $E \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  dicht seien.*

Nach 11.1.1 ist  $A \times B$  dicht dann und nur dann, wenn  $(A \times B)^0 = E$ , d. h. nach (2), wenn  $A^0 \times B^0 = E$ ; das ist aber, wenn  $E \supset A$ , dann und nur dann der Fall, wenn  $A^0 = E^{(1)}$ ,  $B^0 = E^{(2)}$ , d. h. nach 11.1.1 wenn  $A$  und  $B$  dicht.

**20.2.21.** *Damit  $A \times B$  nirgends dicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens eine der Mengen  $A, B$  nirgends dicht sei.*

Dies folgt wegen 11.2.1 aus (2) und 20.2.12.

Aus 20.2.21 und dem ersten Distributivgesetz § 2 (2.1) folgt:

**20.2.22.** *Ist wenigstens eine der beiden Mengen  $A, B$  von erster Kategorie, so ist auch  $A \times B$  von erster Kategorie.*

<sup>1)</sup> Die Umkehrung hiervon wird in 20.4.3 bewiesen.

**20-2-23.** Sind  $A$  und  $B$  Residualmengen, so ist auch  $A \times B$  eine Residualmenge.

Denn nach § 2 (2) ist  $-(A \times B) = ((-A) \times E^{(2)}) + (E^{(1)} \times (-B))$ ; hierin ist, wenn  $-A, -B$  von erster Kategorie sind, nach 20-2-22 jeder der beiden Summanden rechts von erster Kategorie, also nach 19-4-2 auch  $-(A \times B)$ .

Aus der zweiten Formel (2) folgert man leicht für die Menge der isolierten Punkte von  $A \times B$  (§ 12, 2):

$$(2-2) \quad (A \times B)_i = A_i \times B_i.$$

Hieraus, zusammen mit § 12 (2), folgt nach § 2 (2):

$$(2-3) \quad (A \times B)_h = (A \times B_h) + (A_h \times B).$$

Aus (2-2) folgen die Sätze:

**20-2-3.** Damit  $A \times B$  isoliert sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  isoliert seien.

**20-2-31.** Damit  $A \times B$  insichdicht sei, ist notwendig und hinreichend, daß wenigstens eine der Mengen  $A, B$  insichdicht sei.

**20-2-4.** Damit  $A \times B$  separabel sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  separabel seien.

Hinreichend: Nach 13-1-3 gibt es eine in  $A$  dichte abzählbare Menge  $A'$  und eine in  $B$  dichte abzählbare Menge  $B'$ ; nach 20-2-2 ist dann  $A' \times B'$  eine in  $A \times B$  dichte abzählbare Menge, d. h. nach 13-1-31:  $A \times B$  ist separabel. Notwendig: Ist  $A \times B$  separabel, so gibt es nach 13-1-3 eine in  $A \times B$  dichte abzählbare Menge von Punkten  $(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); nach 11-1-4 ist dann auch die Menge  $C$  der Punkte  $(a_n, b_v)$  ( $n, v = 1, 2, \dots$ ) dicht in  $A \times B$ ; ist  $A'$  die Menge der Punkte  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) und  $B'$  die Menge der Punkte  $b_v$  ( $v = 1, 2, \dots$ ), so ist  $C = A' \times B'$ , und nach 20-2-2 ist  $A'$  dicht in  $A$ ,  $B'$  dicht in  $B$ ; nach 13-1-31 sind also  $A$  und  $B$  separabel.

**20-2-5.** Damit  $A \times B$  kompakt sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  kompakt seien.

Hinreichend: Sei  $(a_n, b_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) eine Punktfolge aus  $A \times B$ . Da  $A$  kompakt, hat nach 17-2-8 die Folge  $((a_n))$  einen Häufungspunkt  $a$ , und nach 17-3-53 gibt es in ihr eine Teilfolge  $((a_{n_i}))$ , so daß  $\lim_i a_{n_i} = a$ . Da  $B$  kompakt, hat auch die Folge  $((b_{n_i}))$  einen Häufungspunkt  $b$ , und enthält somit eine Teilfolge  $((b_{n_{i_j}}))$ , so daß  $\lim_j b_{n_{i_j}} = b$ . Nach 20-1-1 ist dann  $\lim_i (a_{n_i}, b_{n_{i_j}}) = (a, b)$ ; die Folge der  $(a_n, b_n)$  hat somit den Häufungspunkt  $(a, b)$ , und nach 17-2-8 ist  $A \times B$  kompakt. Notwendig: Sei  $A$  nicht

kompakt und  $b \in B$ ; dann ist die mit  $A$  isometrische Menge  $A \times b$  ein nicht kompakter Teil von  $A \times B$ , und nach 15-1-2 ist auch  $A \times B$  nicht kompakt.

**20-2-51.** *Damit  $A \times B$  in sich kompakt sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  in sich kompakt seien.*

Dies folgt wegen 15-2-22 aus 20-2-5 und 20-2-1.

**20-2-52.** *Damit  $A \times B$  halbkompakt sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  halbkompakt seien.*

Hinreichend: Sei  $A = \bigcup_n A_n$ ,  $B = \bigcup_v B_v$ , wo  $A_n$ ,  $B_v$  in sich kompakt. Nach § 2 (2-1) ist:  $A \times B = \bigcup_{n,v} (A_n \times B_v)$ , und die Behauptung folgt aus

**20-2-51.** Notwendig: Sei  $(A \times B) = \bigcup_n C_n$ , wo  $C_n \supset A$  und in sich kompakt. Sei  $A_n$  die Menge aller  $a \in A$ , zu denen es ein  $b$  gibt, so daß  $(a, b) \in C_n$ . Da offenbar  $A = \bigcup_n A_n$ , genügt es zu zeigen, daß  $A_n$  in sich kompakt ist. Sei  $((a_v))$  eine Punktfolge aus  $A_n$ ; es gibt dazu eine Punktfolge  $(a_v, b_v)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) in  $C_n$ ; da  $C_n$  in sich kompakt, besitzt nach 17-2-31 die Folge der  $(a_v, b_v)$  einen Häufungspunkt  $(a, b) \in C_n$ ; dann ist  $a \in A_n$ , und nach 20-1-2 ist  $a$  Häufungspunkt von  $((a_v))$ , somit ist  $A_n$  nach 17-2-31 in sich kompakt, w. z. b. w.

**20-2-6.** *Damit  $A \times B$  zusammenhängend sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  zusammenhängend seien.*

Hinreichend: Sei  $(a_1, b_1) \in A \times B$ ,  $(a_2, b_2) \in A \times B$ . Sind  $A$  und  $B$  zusammenhängend, so auch die mit  $A$  bzw.  $B$  isometrischen Mengen  $A \times b_1$ ,  $a_2 \times B$ ; da diese Mengen den Punkt  $(a_2, b_1)$  gemein haben, ist nach 16-1-4 auch ihre Summe  $C$  zusammenhängend, und da  $(a_1, b_1) \in C$ ,  $(a_2, b_2) \in C$ , ist nach 16-1-21 auch  $A \times B$  zusammenhängend. Notwendig: Sei  $A$  unzusammenhängend; nach 16-1-12 gibt es eine Zerlegung  $A = A' + A''$  von  $A$  in zwei abgesonderte Summanden  $\supset A$ . Dann ist auch  $A \times B = (A' \times B) + (A'' \times B)$ . Wegen (2) ist hierbei  $(A' \times B)^0 (A'' \times B) = (A'^0 \times B^0) (A'' \times B)$ ; und da  $A'$ ,  $A''$  abgesondert, also  $A'^0 A'' = \Lambda$ , ist auch  $(A' \times B)^0 (A'' \times B) = \Lambda$ ; ebenso ist  $(A' \times B) (A'' \times B)^0 = \Lambda$ ; also sind die beiden Summanden  $A' \times B$  und  $A'' \times B$  von  $A \times B$  abgesondert, und da sie wegen  $A' \supset A$ ,  $A'' \supset A$ ,  $B \supset A$  beide  $\supset A$  sind, ist  $A \times B$  unzusammenhängend.

Aus 20-1-1, 20-1-3 folgt ohne weiteres:

**20-2-7.** *Damit  $A \times B$  vollständig sei, ist hinreichend, und wenn  $A \times B \supset A$  ist, auch notwendig, daß  $A$  und  $B$  vollständig seien.*

**20-2-71.** *Sind  $A$  und  $B$  Youngsche Mengen, so ist auch  $A \times B$  eine Youngsche Menge.*

Dies folgt aus 20.2.7 und 20.2.13.

Aus 18.2.2 und 20.2.7 folgt durch vollständige Induktion:

**20.2.8.** *Der  $R_n$  ist vollständig.*

**20.2.81.** *Damit die Menge  $A \subseteq R_n$  kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie beschränkt sei.*

Notwendig: Dies folgt aus 15.1.5. Hinreichend: Dies folgt, da in einer beschränkten Menge des  $R_n$  offenbar jedes  $\varrho$ -Netz endlich ist, aus 20.2.8 und 18.3.3.

**20.2.811.** *Damit die Menge  $A \subseteq R_n$  in sich kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie beschränkt und abgeschlossen sei.*

Notwendig: Dies folgt aus 15.1.5 und 15.2.22. Hinreichend: Dies folgt aus 20.2.81 und 15.2.2.

**20.2.82.** *Der  $R_n$  ist halbkompakt.*

Ist  $a \in R_n$  und  $\bar{K}_a$  die abgeschlossene Kugel vom Mittelpunkt  $a$  und Radius  $r$ , so ist  $R_n = \bigcup \bar{K}_a$ . Da nach 20.2.811  $\bar{K}_a$  in sich kompakt, ist der  $R_n$  halbkompakt.

Im Gegensatz zu 20.2.81 ist, wie wir in § 15, 1 sahen, keineswegs jede beschränkte Punktmenge des  $R_\omega$  kompakt. Wohl aber gilt, wenn wir mit  $Q_\omega$  die Menge aller  $((a_r)) \in R_\omega$  bezeichnen, deren Koordinaten den Ungleichungen  $0 \leq a_r \leq \frac{1}{r}$  genügen:

**20.2.83.** *Die Menge  $Q_\omega \subset R_\omega$  ist in sich kompakt.*

Sei  $((b_r)) \in R_\omega - Q_\omega$ ; dann gibt es ein  $r^*$ , so daß  $b_{r^*} \sim \varepsilon \left[ 0, \frac{1}{r^*} \right]$ ; mithin gibt es auch ein  $\sigma > 0$ , so daß aus  $|x_{r^*} - b_{r^*}| < \sigma$  folgt:  $x_{r^*} \sim \varepsilon \left[ 0, \frac{1}{r^*} \right]$ ; mithin gilt für die Kugel  $K$  des  $R_\omega$  vom Mittelpunkt  $((b_r))$  und vom Radius  $\sigma$ :  $K \subseteq R_\omega - Q_\omega$ ; nach 10.3.1 und 10.3.6 ist also  $R_\omega - Q_\omega$  offen, also  $Q_\omega$  abgeschlossen. Nach 15.2.2 ist nun nur mehr zu zeigen:  $Q_\omega$  ist kompakt. Sei  $\varrho > 0$ ; wir wählen  $n$  so, daß  $\sum_{r>n} \frac{1}{r^2} < \frac{\varrho^2}{4}$ ,

und ordnen jedem Punkte  $((a_r)) \in R_\omega$  den Punkt  $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R_n$  zu; der Menge  $Q_\omega \subset R_\omega$  entspricht so eine beschränkte Punktmenge  $Q_n$  des  $R_n$ ; seien  $x = ((a_r))$ ,  $x' = ((a'_r))$  zwei Punkte von  $Q_\omega$  und  $y = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ ,  $y' = (a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$  ihre zugeordneten Punkte des  $R_n$ ; wegen

$$\sqrt{\sum_r (a_r - a'_r)^2} \leq \sqrt{\sum_{r=1}^n (a_r - a'_r)^2} + \sqrt{\sum_{r>n} (a_r - a'_r)^2} < \sqrt{\sum_{r=1}^n (a_r - a'_r)^2} + \frac{\varrho}{2}$$

gilt dann für die Abstände:  $y y' > x x' - \frac{\varrho}{2}$ ; jedem  $\varrho$ -Netz in  $Q_w$  entspricht also in  $Q_n$  eine Menge  $M$  von Punkten, die zu je zweien einen Abstand  $> \frac{\varrho}{2}$  haben; da  $Q_n$  eine beschränkte Punktmenge des  $R_n$ , muß  $M$  endlich sein; also ist jedes  $\varrho$ -Netz in  $Q_w$  endlich; nach 18.3.3 und 18.2.21 ist somit  $Q_w$  kompakt, w. z. b. w.

3. Intervalle im  $R_n$ . Seien  $(a_i, b_i)$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )  $n$  offene Intervalle des  $R_1$ . Wir setzen:

$$(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n);$$

diese Menge ist nach 20.2.11 offen im  $R_n$ ; sie heißt ein offenes Intervall des  $R_n$ . Ebenso ist nach 20.2.1 die Menge:

$$[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$$

abgeschlossen im  $R_n$ ; sie heißt ein abgeschlossenes Intervall des  $R_n$ . Die Mengen:

$$[a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) = [a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$$

$$(a_1, b_1] \times (a_2, b_2) \times \dots \times (a_n, b_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$$

heißen halboffene Intervalle des  $R_n$ . Offenbar ist  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$  der offene Kern sowohl von  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$ , als von  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ , als von  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$ ; und  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$  ist die abgeschlossene Hülle von  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ , von  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$  und von  $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$ .

Aus 20.2.31 und 20.2.6 folgt:

**20.3.1.** *Jedes (abgeschlossene, offene, halboffene) Intervall des  $R_n$  ist insideicht und zusammenhängend.*

**20.3.2.** *Das System  $\mathfrak{S}$  aller Mengen des  $R_n$ , die Summe endlich vieler halboffener Intervalle  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$  sind, ist ein Körper, und jede Menge aus  $\mathfrak{S}$  ist auch Summe endlich vieler disjunkter halboffener Intervalle  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ .*

Da die Differenz zweier halboffener Intervalle  $[a, b)$  des  $R_1$  Summe von höchstens zwei fremden solchen halboffenen Intervallen ist, gilt die Behauptung nach 3.3.2 und 3.3.21 für den  $R_1$ . Gilt sie für den  $R_n$ , so gilt sie wegen  $R_{n+1} = R_n \times R_1$  nach 3.3.22, wo unter  $\mathfrak{A}$  das System der halboffenen Intervalle  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$  des  $R_n$ , unter  $\mathfrak{B}$  das System der halboffenen Intervalle  $[a, b)$  des  $R_1$  zu verstehen ist, auch für den  $R_{n+1}$ .

**20.3.3.** *Jede offene Menge  $G$  des  $R_n$  ist Summe abzählbar vieler offener Intervalle des  $R_n$ .*

Sei  $a \in G$ ; dann gibt es ein  $\varrho_a > 0$ , so daß auch  $K_{a\varrho_a} \subseteq G$ ; ist  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ , und setzen wir  $I_a = (a_1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \dots, a_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a; a_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \dots, a_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a)$ , so ist  $I_a \subseteq K_{a\varrho_a}$ , also  $G = \bigcup_{a \in G} I_a$ . Nach 20.3.1 gibt es also unter den  $I_a$  abzählbar viele  $I_{a_1}, I_{a_2}, \dots, I_{a_v}, \dots$ , so daß  $G = \bigcup_v I_{a_v}$ .

**20.3.31.** Jede offene Menge  $G$  des  $R_n$  ist Summe abzählbar vieler disjunkter halboffener Intervalle  $[a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Wählen wir beim Beweise von 20.3.3  $\varrho_a > 0$  so, daß auch die abgeschlossene Kugel  $\bar{K}_{a\varrho_a} \subseteq G$ , so haben wir wie dort:  $G = \bigcup_v I_{a_v}$ ; setzen wir nun  $\bar{I}_a = [a_1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \dots, a_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a; a_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a, \dots, a_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \varrho_a)$ , so ist  $I_a \subseteq \bar{I}_a \subseteq \bar{K}_{a\varrho_a} \subseteq G$  und  $G = \bigcup_v \bar{I}_{a_v}$ . Setzen wir noch  $\bar{I}_{a_1} = M_1, \bar{I}_{a_v} - (\bar{I}_{a_1} + \dots + \bar{I}_{a_{v-1}}) = M_v$  ( $v > 1$ ), so ist  $G = \bigcup_v M_v$ , und die  $M_v$  sind disjunkt. Da nach 20.3.2  $M_v$  Summe endlich vieler disjunkter Intervalle  $[a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n)$  ist, ist die Behauptung bewiesen.

**4. Schichten.** Sei  $M$  eine Punktmenge des Produktraumes  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ . Ist  $b \in E^{(2)}$ , so bezeichnen wir als die Schicht  $M_b^{(1)}$  von  $M$  die Menge aller  $x \in E^{(1)}$ , für die  $(x, b) \in M$ ; ebenso verstehen wir unter der Schicht  $M_a^{(2)}$  ( $a \in E^{(1)}$ ) die Menge aller  $y \in E^{(2)}$ , für die  $(a, y) \in M$ . Man erkennt sofort:

**20.4.1.** Ist  $M$  offen (abgeschlossen) in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist für jedes  $b \in E^{(2)}$  die Schicht  $M_b^{(1)}$  von  $M$  offen (abgeschlossen) in  $E^{(1)}$ .

Ist  $M = \bigcup_v M_v$  (bzw.  $M = \bigcap_v M_v$ ), so gilt offenbar für die Schichten:  $M_b^{(1)} = \bigcup_v M_{v,b}^{(1)}$  (bzw.  $M_b^{(1)} = \bigcap_v M_{v,b}^{(1)}$ ). Also folgt aus 20.4.1:

**20.4.2.** Ist  $M$  ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ ) in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist für jedes  $b \in E^{(2)}$  die Schicht  $M_b^{(1)}$  von  $M$  ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ ) in  $E^{(1)}$ .

Nun können wir die Umkehrung von 20.2.13 beweisen.

**20.4.3.** Ist  $A \times B \supset A$  und ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ ) in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist  $A$  ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ ) in  $E^{(1)}$  und  $B$  ein  $F_\sigma$  (ein  $G_\delta$ ) in  $E^{(2)}$ .

Setzen wir  $M = A \times B$ , so ist für jedes  $b \in B$ :  $M_b^{(1)} = A$ ; die Behauptung folgt also aus 20.4.2.

### Drittes Kapitel.

## Der Begriff der Stetigkeit.

### § 21. Halbstetige Abbildungen.

1. Unterhalb stetige Abbildungen. Seien  $A$  und  $B$  metrische Räume; durch eine Relation  $P$ , deren Bereich die Menge  $A$ , deren Gegenbereich die Menge  $B$  ist, ist (§ 1, 4) eine Abbildung von  $A$  auf  $B$  gegeben.

Die Abbildung  $P$  heißt unterhalb stetig im Punkte  $a \in A$ , wenn es zu jeder in  $B$  offenen Menge  $G$ , für die  $P(a) \in G$  ist, eine Umgebung  $U_a$  von  $a$  gibt, so daß für jedes  $x \in U_a$  auch  $P(x) \in G$  ist. Die Abbildung  $P$  von  $A$  heißt unterhalb stetig, wenn sie in jedem Punkte  $a \in A$  unterhalb stetig ist. In einem isolierten Punkte von  $A$  ist jede Abbildung  $P$  von  $A$  unterhalb stetig. Beispiel einer unterhalb stetigen Abbildung des Intervalles  $[0, 1]$ :  $P(0) = [0, 1]$ ,  $P(x) = [0, 2]$  für  $x \neq 0$ .

**21.1.1.** Damit die Abbildung  $P$  unterhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  und für jede in  $B$  offene Menge  $G$  mit  $P(a) \in G$  gelte:  $P(a_n) \in G$  für fast alle  $n$ .

Notwendig: Es gibt ein  $U_a$ , so daß  $P(x) \in G$  für alle  $x \in U_a$ ; für fast alle  $n$  aber gilt:  $a_n \in U_a$ . Hinreichend: Ist  $P$  nicht unterhalb stetig in  $a$ , so gibt es ein  $G$  von folgender Art: es ist  $P(a) \in G$  und in jeder Umgebung  $U_a$  gibt es ein  $x$ , für das  $P(x) \notin G$ . Dies gilt insbesondere für  $U_a = K_{a, \frac{1}{n}}$ , d. h. es gibt ein  $a_n$ , so daß  $a_n \in K_{a, \frac{1}{n}}$  und  $P(a_n) \notin G$ . Dann ist  $a_n \rightarrow a$  und für kein  $n$  ist  $P(a_n) \in G$ .

**21.1.2.** Damit die Abbildung  $P$  unterhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $\varliminf_n P(a_n) \supseteq (P(a))^0$ .

Sei  $b \in P(a)$  und  $U_b$  eine Umgebung von  $b$ ; da  $P(a) \in U_b$ , gilt nach 21.1.1:  $P(a_n) \in U_b$  für fast alle  $n$ , d. h.  $b \in \varliminf_n P(a_n)$ , also ist  $\varliminf_n P(a_n) \supseteq P(a)$ ; und da nach 17.1.13  $\varliminf_n P(a_n)$  abgeschlossen, gilt nach 10.5.1 auch  $\varliminf_n P(a_n) \supseteq (P(a))^0$ .



**21.1.21.** Damit die Abbildung  $P$  unterhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $\lim_n P(a_n) \supseteq P(a)$ .

Sei  $P(a)G \supset A$  und  $b \in P(a)G$ . Da  $G$  ein  $U_b$  und da wegen  $\lim_n P(a_n) \supseteq P(a)$  auch  $b \in \lim_n P(a_n)$ , ist  $P(a_n)G \supset A$  für fast alle  $n$ . Nach 21.1.1 ist also  $P$  unterhalb stetig in  $a$ .

**21.1.3.** Ist die Abbildung  $P$  unterhalb stetig im Punkte  $a \in A$ , ist  $((a_n))$  eine Folge aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$ , und ist  $b \in P(a)$ , so gibt es ein  $b_n \in P(a_n)$ , so daß  $\lim_n b_n = b$ .

Da nach 21.1.2  $b \in \lim_n P(a_n)$ , folgt dies aus 17.3.51.

**21.1.4.** Ist die Abbildung  $P$  von  $A$  unterhalb stetig, und ist  $A'$  dicht in  $A$ , so ist  $P(A')$  dicht in  $P(A)$ .

Sei  $b \in P(A)$ ; dann gibt es ein  $a \in A$ , so daß  $b \in P(a)$ . Da  $A'$  dicht in  $A$ , gibt es nach 17.3.63 eine Punktfolge  $((a_n))$  aus  $A'$ , so daß  $a_n \rightarrow a$ . Nach 21.1.3 gibt es ein  $b_n \in P(a_n)$ , so daß  $b_n \rightarrow b$ ; da  $P(a_n) \subseteq P(A')$ , also  $b_n \in P(A')$ , ist  $P(A')$  dicht in  $P(A)$  nach 17.3.63.

**2. Oberhalb stetige Abbildungen.** Die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  heißt oberhalb stetig im Punkte  $a \in A$ , wenn es zu jeder in  $B$  offenen Menge  $G$ , für die  $P(a) \subseteq G$ , eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $P(U_a) \subseteq G$ . Die Abbildung  $P$  von  $A$  heißt oberhalb stetig, wenn sie in jedem Punkte  $a \in A$  oberhalb stetig ist. In einem isolierten Punkte von  $A$  ist jede Abbildung  $P$  oberhalb stetig. Beispiel einer oberhalb stetigen Abbildung des Intervalles  $[0, 1]$ :  $P(0) = [0, 2]$ ,  $P(x) = [0, 1]$  für  $x \neq 0$ .

**21.2.1.** Damit die Abbildung  $P$  oberhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  und für jede in  $B$  offene Menge  $G$  mit  $P(a) \subseteq G$  gelte:  $P(a_n) \subseteq G$  für fast alle  $n$ .

Notwendig: Es gibt ein  $U_a$ , so daß  $P(U_a) \subseteq G$ ; für fast alle  $n$  ist  $a_n \in U_a$ , also ist  $P(a_n) \subseteq G$  für fast alle  $n$ . Hinreichend: Ist  $P$  nicht oberhalb stetig in  $a$ , so gibt es ein  $G \supseteq P(a)$ , so daß in jedem  $U_a$  ein  $x$  liegt, für das nicht  $P(x) \subseteq G$ . Dies gilt insbesondere für  $U_a = K_a \frac{1}{n}$ , d. h. es gibt ein  $a_n$ , so daß  $a_n a < \frac{1}{n}$  und nicht  $P(a_n) \subseteq G$ . Dann ist  $a_n \rightarrow a$ , und für kein  $n$  ist  $P(a_n) \subseteq G$ .

**21.2.2.** Damit die Abbildung  $P$  oberhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $\lim_n P(a_n) \subseteq (P(a))^0$ .

Dies folgt aus 21.2.1 wegen 17.1.5.

**21.2.21.** Ist  $B$  in sich kompakt, so ist, damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  oberhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte  $\overline{\lim_n P(a_n)} \subseteq P(a)$ .

Dies folgt aus 21.2.1 wegen 17.1.51.

Literatur: W. Hurewicz, Amst. Proc. 29 (1926) S. 1014.

**3. In sich kompakte Abbildungen.** Wir nennen eine Abbildung  $P$  von  $A$  in sich kompakt, wenn für jedes  $x \in A$  die Bildmenge  $P(x)$  in sich kompakt ist.

**21.3.1.** Damit die Abbildung  $P$  unterhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist hinreichend, und wenn  $P$  in sich kompakt ist, auch notwendig, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\varrho > 0$  gebe, so daß für jedes  $x \in K_{a\varrho}$  gilt:  $P(x) \subseteq U_{P(a)\delta}$ .

Hinreichend: Ist  $((a_n))$  eine Punktfolge aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$ , so ist  $a_n \in K_{a\varrho}$  für fast alle  $n$ , also nach Annahme  $P(a) \subseteq U_{P(a_n)\delta}$  für fast alle  $n$ , also ist nach 17.1.6:  $\lim_n P(a_n) \subseteq (P(a))^0 \subseteq P(a)$ ; nach 21.1.21 ist also  $P$  unterhalb

stetig in  $a$ . Notwendig: Ist die Bedingung nicht erfüllt, so gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß in jeder Kugel  $K_{a\varrho}$  ein  $x$  liegt, für das nicht  $P(x) \subseteq U_{P(a)\delta}$ .

Dann gibt es ein  $a_n \in A$  mit  $a_n < \frac{1}{n}$ , so daß nicht  $P(a) \subseteq U_{P(a_n)\delta}$ . Nach 17.1.61 ist dann nicht  $\lim_n P(a_n) \subseteq P(a)$ , und nach 21.1.2 ist  $P$  nicht unterhalb stetig in  $a$ .

**21.3.2.** Damit die Abbildung  $P$  oberhalb stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig, und wenn  $P$  in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\varrho > 0$  gebe, so daß  $P(K_{a\varrho}) \subseteq U_{P(a)\delta}$ .

Notwendig: Da nach 9.4.1  $U_{P(a)\delta}$  eine offene Menge  $\supseteq P(a)$  ist, gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $P(U_a) \subseteq U_{P(a)\delta}$ . Da  $U_a$  offen, gibt es ein  $\varrho > 0$ , so daß  $K_{a\varrho} \subseteq U_a$ ; dann ist  $P(K_{a\varrho}) \subseteq P(U_a) \subseteq U_{P(a)\delta}$ . Hinreichend: Sei  $G$  eine in  $B$  offene Menge  $\supseteq P(a)$ . Nach 15.2.54 gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß  $U_{P(a)\delta} \subseteq G$ ; nach Annahme gibt es ein  $\varrho > 0$ , so daß  $P(K_{a\varrho}) \subseteq U_{P(a)\delta} \subseteq G$ ; da  $K_{a\varrho}$  eine Umgebung  $U_a$  ist, ist  $P$  oberhalb stetig in  $a$ .

Als Gegenstück zu 21.1.8 beweisen wir nun:

**21.3.3.** Ist die in sich kompakte Abbildung  $P$  oberhalb stetig im Punkte  $a \in A$ , ist  $((a_n))$  eine Punktfolge aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$ , und ist  $b_n \in P(a_n)$ , so hat die Folge  $((b_n))$  einen Häufungspunkt  $b \in P(a)$ .

Da nach 9.4.1  $U_{P(a)} \frac{1}{\nu}$  eine offene Menge  $\supseteq P(a)$  ist, gilt nach 21.2.1:  $P(a_n) \subseteq U_{P(a)} \frac{1}{\nu}$  für fast alle  $n$ . Da  $b_n \in P(a_n)$ , gibt es also ein  $n_\nu$  und ein  $y_\nu \in P(a)$ , so daß  $b_{n_\nu}, y_\nu < \frac{1}{\nu}$ , wobei noch  $n_{\nu+1} > n_\nu$  angenommen werden kann. Da  $P(a)$  in sich kompakt, hat  $((y_\nu))$  nach 17.2.81 einen Häufungspunkt  $b \in P(a)$ ; wegen  $b_{n_\nu}, y_\nu < \frac{1}{\nu}$  ist  $b$  auch Häufungspunkt von  $((b_{n_\nu}))$ , also auch von  $((b_n))$ .

**21.3.4.** Ist  $P$  eine in sich kompakte, oberhalb stetige Abbildung des in sich kompakten Raumes  $A$  auf  $B$ , so ist auch  $B$  in sich kompakt.

Denn sei  $((b_n))$  eine Folge aus  $B$  und  $b_n \in P(a_n)$ . Da  $A$  in sich kompakt, hat  $((a_n))$  nach 17.2.81 einen Häufungspunkt  $a \in A$ . In  $((a_n))$  gibt es nach 17.3.58 eine Teilfolge  $((a_{n_i}))$  mit  $\lim_i a_{n_i} = a$ ; nach 21.3.3 hat daher  $((b_{n_i}))$ , und somit  $((b_n))$  einen Häufungspunkt  $b \in B$ . Nach 17.2.81 ist also  $B$  in sich kompakt.

Für unterhalb stetige Abbildungen gilt ein solcher Satz natürlich nicht.

**4. Zusammenhängende Abbildungen.** Wir nennen eine Abbildung  $P$  von  $A$  zusammenhängend, wenn für jedes  $x \in A$  die Bildmenge  $P(x)$  zusammenhängend ist.

**21.4.1.** Ist  $P$  eine zusammenhängende, unterhalb stetige Abbildung des zusammenhängenden Raumes  $A$  auf  $B$ , so ist auch  $B$  zusammenhängend.

Sei  $B = B' + B''$  eine Zerlegung von  $B$  in zwei abgesonderte Teile (§ 14, 1). Da  $P(x)$  zusammenhängend ist für jedes  $x \in A$ , ist nach 16.1.2 entweder  $P(x) \subseteq B'$  oder  $P(x) \subseteq B''$ . Seien  $A'$  und  $A''$  die Teile von  $A$ , für die  $P(x) \subseteq B'$ , bzw.  $P(x) \subseteq B''$ . Dann sind  $A', A''$  abgesondert; denn angenommen, es wäre etwa  $A' (A'')^0 \supset A$ ; dann gibt es ein  $a \in A'$  und eine Punktfolge  $((a_n))$  aus  $A''$  mit  $\lim_n a_n = a$ ; nach 14.1.1 ist  $B'$  eine (in  $B$ ) offene Menge  $\supseteq P(a)$ ; nach 21.1.1 wäre dann  $P(a_n) B' \supset A$  für fast alle  $n$ , das aber ist unmöglich, weil  $P(a_n) \subseteq B''$  und  $B' B'' = \emptyset$ . Also sind  $A', A''$  abgesondert, und da  $A$  zusammenhängend, ist nach 16.1.12 sei es  $A'$ , sei es  $A''$  leer. Es ist also auch sei es  $B'$ , sei es  $B''$  leer, d. h. nach 16.1.12:  $B$  ist zusammenhängend.

**21.4.2.** Ist  $P$  eine zusammenhängende, oberhalb stetige Abbildung des zusammenhängenden Raumes  $A$  auf  $B$ , so ist auch  $B$  zusammenhängend.

Der Beweis ist derselbe wie für 21.4.1, nur hat man sich, um zu zeigen, daß  $A'$  und  $A''$  abgesondert sind, auf 21.2.1 statt auf 21.1.1 zu berufen.

**5. Charakterisierung durch Urbildmengen.** Wir entwickeln nun eine charakteristische Bedingung dafür, daß eine Abbildung von  $A$  auf  $B$  unterhalb (oberhalb) stetig sei.

**21.5.1.** *Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  unterhalb stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Urbild  $P^{-1}(G)$  jeder in  $B$  offenen Menge  $G$  offen in  $A$  sei.*

Notwendig: Sei  $a \in P^{-1}(G)$  und  $b \in P(a)G$ ; weil  $P$  unterhalb stetig, gibt es ein  $U_a$ , so daß  $P(x)G \supset \Delta$  für  $x \in U_a$ ; dann ist aber auch  $x \in P^{-1}(G)$ , also  $U_a \subseteq P^{-1}(G)$ , d. h.  $P^{-1}(G)$  ist offen in  $A$ . Hinreichend: Sei  $G$  offen in  $B$  und  $P(a)G \supset \Delta$ . Dann ist  $a \in P^{-1}(G)$ , und da  $P^{-1}(G)$  offen in  $A$ , gibt es ein  $U_a \subseteq P^{-1}(G)$ ; für jedes  $x \in U_a$  gibt es also ein Bild  $y \in G$ , d. h. für  $x \in U_a$  ist  $P(x)G \supset \Delta$ , d. h.  $P$  ist unterhalb stetig.

**21.5.2.** *Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  oberhalb stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß das Urbild  $P^{-1}(F)$  jeder in  $B$  abgeschlossenen Menge  $F$  abgeschlossen in  $A$  sei.*

Notwendig: Sei  $a \in A - P^{-1}(F)$ ; dann gehört kein Bildpunkt von  $a$  zu  $F$ , d. h.  $P(a) \subseteq B - F$ . Da  $B - F$  offen und  $P$  oberhalb stetig, gibt es ein  $U_a$ , so daß  $P(U_a) \subseteq B - F$ ; für  $x \in U_a$  ist also  $P(x)F = \Delta$ , also  $x \sim \varepsilon P^{-1}(F)$ , d. h.  $x \in A - P^{-1}(F)$ ; also ist  $U_a \subseteq A - P^{-1}(F)$ , d. h.  $A - P^{-1}(F)$  ist offen, d. h.  $P^{-1}(F)$  ist abgeschlossen in  $A$ . Hinreichend: Sei  $a \in A$ , sei  $G$  offen in  $B$  und  $P(a) \subseteq G$ ; da  $F = B - G$  abgeschlossen in  $B$ , ist nach Annahme  $P^{-1}(F)$  abgeschlossen in  $A$ . Da  $P(a)F = \Delta$ , ist  $a \sim \varepsilon P^{-1}(F)$ , und da  $P^{-1}(F)$  abgeschlossen, gibt es ein  $U_a$ , so daß  $U_a P^{-1}(F) = \Delta$ . Für dieses  $U_a$  ist  $P(U_a)F = \Delta$ , also  $P(U_a) \subseteq G$ , d. h.  $P$  ist oberhalb stetig.

**6. Inverse Abbildung.** Sei  $P$  eine Abbildung von  $A$  auf  $B$  und  $P^{-1}$  die zu  $P$  inverse Abbildung (§ 1, 4) von  $B$  auf  $A$ .

**21.6.1.** *Ist  $a \in P^{-1}(b)$ , und ist  $P$  unterhalb stetig in  $a$ , so gibt es zu jeder Umgebung  $U_b$  eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $U_a \subseteq P^{-1}(U_b)$ .*

Wegen  $a \in P^{-1}(b)$  ist  $b \in P(a)$ , also ist  $P(a)U_b \supset \Delta$ . Weil  $P$  unterhalb stetig in  $a$ , gibt es also ein  $U_a$ , so daß  $P(x)U_b \supset \Delta$  für alle  $x \in U_a$ ; dann aber ist  $x \in P^{-1}(U_b)$  für alle  $x \in U_a$ , d. h.  $U_a \subseteq P^{-1}(U_b)$ .

**21.6.11.** *Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  unterhalb stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $b \in B$ , jeder Umgebung  $U_b$  und jedem  $a \in P^{-1}(b)$  eine Umgebung  $U_a$  gebe, so daß  $U_a \subseteq P^{-1}(U_b)$ .*

Notwendig: Dies folgt aus 21.6.1. Hinreichend: Sei  $a \in A$ , sei  $G$  eine in  $B$  offene Menge und  $P(a)G \supset \Delta$ . Ist dann  $b \in P(a)G$ , so ist  $G$  eine Umgebung  $U_b$ . Nach Annahme gibt es eine Umgebung  $U_a \subseteq P^{-1}(G)$ ; für alle  $x \in U_a$  ist dann  $P(x)G \supset \Delta$ ; also ist  $P$  unterhalb stetig in  $a$ .

**21.6.2.** Ist  $P$  oberhalb stetig in  $a$ , ist  $P(a)$  abgeschlossen in  $B$ , und ist  $U_a P^{-1}(U_b) \supset A$  für jede Umgebung  $U_a$  und jede Umgebung  $U_b$ , so ist  $a \in P^{-1}(b)$ .

Wäre  $a \sim_\varepsilon P^{-1}(b)$ , so wäre auch  $b \sim_\varepsilon P(a)$ , es gäbe also, da  $P(a)$  abgeschlossen, nach 14.2.41 und 14.2.1 eine in  $B$  offene Menge  $G$  und eine Umgebung  $U_b$ , so daß  $P(a) \subseteq G$  und  $G \cap U_b = \emptyset$ ; da  $P$  oberhalb stetig in  $a$ , gäbe es ein  $U_a$ , so daß  $P(U_a) \subseteq G$ , also  $P(U_a) \cap U_b = \emptyset$ ; dann aber wäre auch  $U_a P^{-1}(U_b) = \emptyset$ , entgegen der Annahme.

**21.6.21.** Ist die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  oberhalb stetig, und ist  $P(a)$  abgeschlossen in  $B$  für alle  $a \in A$ , so gilt für jedes  $b \in B$  und jede Punktfolge  $((b_n))$  aus  $B$  mit  $b_n \rightarrow b$ :  $\overline{\lim_n P^{-1}(b_n)} \subseteq P^{-1}(b)$ .

Sei  $a \in \overline{\lim_n P^{-1}(b_n)}$ ; für jedes  $U_a$  ist dann  $U_a P^{-1}(b_n) \supset A$  für unendlich viele  $n$ ; für jedes  $U_b$  gilt:  $b_n \in U_b$  für fast alle  $n$ , also ist  $P^{-1}(b_n) \subseteq P^{-1}(U_b)$  für fast alle  $n$ ; somit ist  $U_a P^{-1}(U_b) \supset A$ , also gilt nach 21.6.2:  $a \in P^{-1}(b)$ .

Die Umkehrung hiervon gilt in der Form:

**21.6.211.** Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf den in sich kompakten Raum  $B$  oberhalb stetig sei, ist hinreichend, daß für jedes  $b \in B$  und für jede Punktfolge  $((b_n))$  aus  $B$  mit  $b_n \rightarrow b$  gelte:  $\overline{\lim_n P^{-1}(b_n)} \subseteq P^{-1}(b)$ .

Sei  $a \in A$  und  $((a_n))$  eine Folge aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Ist  $b \in \overline{\lim_n P(a_n)}$ , so gibt es nach 17.3.521 eine Teilfolge  $((a_{n_k}))$  und ein  $b_{n_k} \in P(a_{n_k})$ , so daß  $b_{n_k} \rightarrow b$ . Da dann  $a_{n_k} \in P^{-1}(b_{n_k})$  und  $a_{n_k} \rightarrow a$ , ist nach 17.3.5:  $a \in \overline{\lim_n P^{-1}(b_n)}$ , also nach Annahme auch  $a \in P^{-1}(b)$ , also  $b \in P(a)$ . Aus  $b \in \overline{\lim_n P(a_n)}$  folgt also  $b \in P(a)$ , d. h. es ist  $\overline{\lim_n P(a_n)} \subseteq P(a)$ , also ist  $P$  oberhalb stetig nach 21.2.21.

**21.6.3.** Ist  $P$  eine oberhalb stetige Abbildung des in sich kompakten Raumes  $A$  auf den Raum  $B$ , und ist  $P(a)$  abgeschlossen in  $B$  für alle  $a \in A$ , so ist auch  $P^{-1}$  oberhalb stetig.

Nach 21.6.21 gilt für jedes  $b \in B$  und jede Punktfolge  $((b_n))$  aus  $B$  mit  $b_n \rightarrow b$ :  $\overline{\lim_n P^{-1}(b_n)} \subseteq P^{-1}(b)$ ; da  $A$  in sich kompakt, ist  $P^{-1}$  nach 21.2.21 oberhalb stetig.

Die Umkehrung hiervon gilt in der Form:

**21.6.31.** Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf den in sich kompakten Raum  $B$  oberhalb stetig sei, ist hinreichend, daß  $P^{-1}$  oberhalb stetig sei, und  $P^{-1}(b)$  abgeschlossen sei in  $A$  für alle  $b \in B$ .

Da  $P^{-1}$  oberhalb stetig, gilt für jede Folge  $((b_n))$  aus  $B$  mit  $b_n \rightarrow b$  zufolge 21.2.2:  $\overline{\lim_n P^{-1}(b_n)} \subseteq (P^{-1}(b))^0$ ; da  $P^{-1}(b)$  abgeschlossen, ist dies gleichbedeutend mit  $\overline{\lim_n P^{-1}(b_n)} \subseteq P^{-1}(b)$ ; nun folgt die Behauptung aus 21.6.211.

**7. Zusammensetzung.** Sei  $P$  eine Abbildung von  $A$  auf  $C$ , und  $Q$  eine Abbildung von  $C$  auf  $B$ ; dann ist  $S = P|Q$  (§ 1, 4) eine Abbildung von  $A$  auf  $B$ .

**21.7.1.** Sei  $S = P|Q$ ; ist  $P$  unterhalb stetig in  $a$ , und gibt es zu jedem  $b \in S(a)$  ein  $c \in P(a)$ , so daß  $b \in Q(c)$  und  $Q$  unterhalb stetig in  $c$ , so ist  $S$  unterhalb stetig in  $a$ .

Sei  $G$  eine in  $B$  offene Menge mit  $S(a) \subset G$ , und sei  $b \in S(a) \cap G$ ; dann gibt es ein  $c \in P(a)$ , so daß  $b \in Q(c)$  und  $Q$  unterhalb stetig in  $c$ ; dann gibt es eine Umgebung  $U_c$ , so daß  $Q(z) \subset G$  für alle  $z \in U_c$ . Weil  $U_c$  offen in  $C$  und  $U_c \cap P(a) \neq \emptyset$ , und weil  $P$  unterhalb stetig in  $a$ , gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $P(x) \cap U_c \neq \emptyset$  für alle  $x \in U_a$ . Sei  $x \in U_a$  und  $z \in P(x) \cap U_c$ ; dann ist, wie eben gezeigt:  $Q(z) \subset G$ ; es gibt also ein  $y \in Q(z) \cap G$ ; dann ist  $z \in P(x)$ ,  $y \in Q(z)$ , also  $y \in S(x)$ , also  $S(x) \cap G \neq \emptyset$ ; da dies für alle  $x \in U_a$  gilt, ist  $S$  unterhalb stetig in  $a$ .

**21.7.2.** Sei  $S = P|Q$ ; ist  $P$  oberhalb stetig in  $a$  und  $Q$  oberhalb stetig in jedem Punkte  $z \in P(a)$ , so ist  $S$  oberhalb stetig in  $a$ .

Sei  $G$  eine in  $B$  offene Menge  $\supseteq S(a)$ . Da  $Q(z) \subseteq S(a)$  für alle  $z \in P(a)$ , und da  $Q$  oberhalb stetig in  $z$ , gibt es zu jedem  $z \in P(a)$  eine Umgebung  $U_z$ , so daß  $Q(U_z) \subseteq G$ . Setzen wir  $G' = \bigcup_{z \in P(a)} U_z$ , so ist also auch  $Q(G') \subseteq G$ . Da  $G'$  eine in  $C$  offene Menge  $\supseteq P(a)$ , und da  $P$  oberhalb stetig in  $a$ , gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $P(U_a) \subseteq G'$ . Wegen  $Q(G') \subseteq G$  ist dann  $S(U_a) \subseteq G$ , d. h.  $S$  ist oberhalb stetig in  $a$ .

## § 22. Stetige Abbildungen.

**1. Stetige Abbildungen.** Ist die Abbildung  $P$  des Raumes  $A$  auf den Raum  $B$  im Punkte  $a \in A$  sowohl unterhalb als oberhalb stetig, so heißt  $P$  stetig in  $a$ . Ist  $P$  in jedem Punkte  $a \in A$  stetig, so heißt  $P$  stetig. In einem isolierten Punkte von  $A$  ist jede Abbildung von  $A$  stetig.

**22.1.1.** Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  stetig sei in  $a$ , ist notwendig, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $\lim_n P(a_n) = (P(a))^0$ .

Dies folgt, da  $\lim_n P(a_n) = (P(a))^0$  gleichbedeutend ist mit  $\overline{\lim_n P(a_n)} \subseteq (P(a))^0 \subseteq \varliminf_n P(a_n)$ , aus 21.1.2 und 21.2.2.

**21.1.11.** Ist  $B$  in sich kompakt, so ist, damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  stetig sei in  $a$ , hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $\lim_n P(a_n) = P(a)$ .

Dies folgt aus 21.1.21 und 22.2.21.

Machen wir Gebrauch von der in § 9, 6 definierten Abweichung  $e(M, N)$  zweier Mengen, so erhalten wir:

**22.1.2.** Damit die in sich kompakte Abbildung  $P$  stetig sei in  $a$ , ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$  gibt, so daß für alle  $x \in K_{a\sigma}$  die Ungleichung gilt<sup>1)</sup>:  $e(P(x), P(a)) < \delta$ .

Dies folgt aus 21.3.1, 21.3.2.

Aus 22.1.2 folgt in bekannter Weise:

**22.1.21.** Damit die in sich kompakte Abbildung  $P$  stetig sei in  $a$ , ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $\lim_n a_n = a$  gelte:  $\lim_n e(P(a_n), P(a)) = 0$ .

**22.1.3.** Damit die Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $P^{-1}(G)$  offen in  $A$  sei für jede in  $B$  offene Menge  $G$ , und  $P^{-1}(F)$  abgeschlossen in  $A$  sei für jede in  $B$  abgeschlossene Menge  $F$ .

Dies folgt aus 21.5.1, 21.5.2.

**22.1.4.** Ist  $P$  stetig in  $a$ ,  $Q$  stetig in jedem Punkte  $z \in P(a)$ , so ist  $P|Q$  stetig in  $a$ .

Dies folgt aus 21.7.1, 21.7.2.

**22.1.5.** Ist  $P$  oberhalb stetig in  $a$ , und besteht  $P(a)$  aus einem einzigen Punkte, so ist  $P$  stetig in  $a$ .

Sei  $P(a) = \{b\}$  und sei  $G$  eine in  $B$  offene Menge, so daß  $P(a) \cap G \neq \emptyset$ , d. h.  $b \in G$ , d. h.  $P(a) \subseteq G$ . Da  $P$  oberhalb stetig in  $a$ , gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $P(U_a) \subseteq G$ ; für jedes  $x \in U_a$  ist dann  $P(x) \subseteq G$ , also  $P(x) \cap G \neq \emptyset$ , also ist  $P$  auch unterhalb stetig in  $a$ , mithin stetig in  $a$ .

**2. Gleichmäßige Stetigkeit.** Als Verschärfung von 22.1.2 beweisen wir nun:

**22.2.1.** Ist  $A'$  ein in sich kompakter Teil von  $A$ , und ist  $P$  eine in sich kompakte Abbildung von  $A$ , die in jedem Punkte von  $A'$  stetig ist, so gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $a \in A$ ,  $a' \in A'$  mit  $a \sim a' < \sigma$  die Ungleichung gilt:  $e(P(a), P(a')) < \delta$ .

Anderenfalls gäbe es ein  $\delta > 0$  und für jedes  $n$  zwei Punkte  $a_n \in A$ ,  $a'_n \in A'$  mit  $a_n \sim a'_n < \frac{1}{n}$  und  $e(P(a_n), P(a'_n)) \geq \delta$ . Da  $A'$  in sich kompakt, hat

<sup>1)</sup> Ist die Abbildung  $P$  eindeutig, so reduzieren sich die Mengen  $P(x)$ ,  $P(a)$  auf je einen Punkt, und  $e(P(x), P(a))$  wird der Abstand dieser beiden Punkte.

$((a'_n))$  einen Häufungspunkt  $a \in A'$ , und durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen:  $a'_n \rightarrow a$ ; wegen  $a_n a'_n < \frac{1}{n}$  gilt dann auch  $a_n \rightarrow a$ . Da  $P$  in sich kompakt und stetig in  $a$ , gilt nach 22.1.21:  $e(P(a_n), P(a)) \rightarrow 0$ ,  $e(P(a'_n), P(a)) \rightarrow 0$ , somit nach § 9 (6.32):  $e(P(a_n), P(a'_n)) \rightarrow 0$ , im Widerspruch damit, daß  $e(P(a_n), P(a'_n)) \geq \delta$  war für alle  $n$ .

Wir sagen: die Abbildung  $P$  ist gleichmäßig stetig auf  $A$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$  gibt, so daß für je zwei Punkte  $a, a'$  von  $A$  mit  $a a' < \sigma$  die Ungleichung gilt:  $e(P(a), P(a')) < \delta$ . Dann ist in 22.2.1 enthalten:

**22.2.2.** Jede in sich kompakte stetige Abbildung einer in sich kompakten Menge  $A$  ist gleichmäßig stetig auf  $A$ .

**3. Teilabbildungen.** Sei  $P$  eine Abbildung von  $A$ . Ist dann  $C \subseteq A$ , und ordnen wir jedem  $x \in C$  als Bilder alle  $y \in P(x)$  zu, so ist dadurch eine Abbildung von  $C$  definiert, die wir als die auf  $C$  eingeschränkte Teilabbildung von  $P$  bezeichnen, in Zeichen  $C \restriction P$ .

Ist  $c \in C$  und  $P$  stetig (oberhalb, unterhalb stetig) in  $c$ , so ist auch  $C \restriction P$  stetig (oberhalb, unterhalb stetig) in  $c$ ; ist  $P$  stetig (oberhalb, unterhalb stetig) auf  $A$ , so ist  $C \restriction P$  stetig (oberhalb, unterhalb stetig) auf  $C$ .

**22.3.1.** Ist  $P$  eine stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $P(a)$  abgeschlossen in  $B$  für jedes  $a \in A$ , so ist, wenn  $C$  dicht in  $A$  ist, die Abbildung  $P$  durch die Teilabbildung  $C \restriction P$  völlig bestimmt.

In der Tat, nach Annahme ist  $P(a)$  abgeschlossen, d. h. es ist  $P(a) = (P(a))^o$ . Da  $C$  dicht in  $A$ , gibt es nach 17.3.63 zu jedem  $a \in A$  in  $C$  eine Folge  $((c_n))$  mit  $c_n \rightarrow a$ ; nach 22.1.1 ist dann  $P(a) = \lim_n P(c_n)$ .

**4. Erweiterung einer Abbildung.** Wir haben bisher, wenn  $P$  eine Abbildung von  $A$  auf  $B$  war,  $A$  und  $B$  selbst als die zugrunde gelegten metrischen Räume betrachtet: alle auftretenden Relativbegriffe (wie: offen, abgeschlossen, abgeschlossene Hülle, dicht) waren in bezug auf  $A$ , bzw.  $B$  zu verstehen. Nun denken wir uns  $A$  und  $B$  als Punktmengen je eines metrischen Raumes  $X \supseteq A$ ,  $Y \supseteq B$ ; alle auftretenden Relativbegriffe sind im folgenden, wo nichts anderes gesagt, in bezug auf  $X$ , bzw.  $Y$  zu verstehen.

Ist  $P$  eine Abbildung von  $A$  und  $A \subseteq A' \subseteq X$ , so heißt jede Abbildung  $Q$  von  $A'$  auf eine Punktmenge  $B' \subseteq Y$ , für die  $P = A \restriction Q$  ist, eine Erweiterung von  $P$  auf  $A'$ . Ist insbesondere  $Q$  stetig auf  $A'$  (was nur möglich ist, wenn  $P$  stetig auf  $A$ ), so heißt  $Q$  eine stetige Erweiterung von  $P$ . Sei  $A \subseteq A' \subseteq A^o$ ; da dann nach 11.3.12, 11.3.2  $A$  dicht in  $A'$  ist, kann es nach



**22.3.1** höchstens eine stetige Erweiterung  $Q$  von  $P$  auf  $A'$  geben, bei der  $Q(a)$  abgeschlossen ist für alle  $a \in A'$ .

Sei  $P$  eine Abbildung von  $A$ ; dann heiße der Punkt  $\bar{a} \in A^0$  ein Konvergenzpunkt von  $P$ , wenn es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U_{\bar{a}}$  gibt, so daß für je zwei Punkte  $a, a'$  von  $A \cap U_{\bar{a}}$  die Ungleichung gilt:

$$(4) \quad e(P(a), P(a')) < \varepsilon.$$

**22.4.1.** Die Menge  $\bar{A}$  aller Konvergenzpunkte von  $P$  ist ein  $G_\delta$  (in  $X$ ).

Für jedes  $\varepsilon > 0$  ist die Menge  $A_\varepsilon$  aller  $x \in A^0$ , zu denen es ein  $U_x$  gibt, so daß für je zwei Punkte  $a, a'$  von  $A \cap U_x$  Ungleichung (4) gilt, offen in  $A^0$ , denn mit  $x$  gehören auch alle Punkte von  $A^0 \cap U_x$  zu  $A_\varepsilon$ . Wegen  $\bar{A} = \bigcap_n A_{\frac{1}{n}}$  ist also  $\bar{A}$  ein  $G_\delta$  in  $A^0$ ; und da  $A^0$  nach 10.7.41 ein  $G_\delta$  in  $X$ , ist nach 10.9.2 auch  $\bar{A}$  ein  $G_\delta$  in  $X$ .

**22.4.2.** Ist  $P$  eine Abbildung von  $A$  auf eine Menge  $B$  des vollständigen Raumes  $Y$ , ist  $P(a)$  beschränkt für alle  $a \in A$ , und ist  $\bar{a}$  ein Konvergenzpunkt von  $P$ , so gibt es eine nicht leere, beschränkte, abgeschlossene Menge  $Q_{\bar{a}} \subseteq B^0$ , so daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow \bar{a}$  gilt:  $\lim_n P(a_n) = Q_{\bar{a}}$  und  $e(P(a_n), Q_{\bar{a}}) \rightarrow 0$ .

Sei  $a_n \in A$ ,  $a_n \rightarrow \bar{a}$ ; zu jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $U_{\bar{a}}$ , so daß für je zwei Punkte  $a, a'$  von  $A \cap U_{\bar{a}}$  Ungleichung (4) gilt; es gibt ein  $n_\varepsilon$ , so daß  $a_n \in A \cap U_{\bar{a}}$  für  $n \geq n_\varepsilon$ ; dann ist  $e(P(a_n), P(a_{n'})) < \varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $n' \geq n_\varepsilon$ , d. h. die Mengenfølge  $((P(a_n)))$  ist eine Cauchysche Folge (§ 18, 10). Nach 18.10.2 existiert also  $\lim_n P(a_n)$ , ist nach 18.10.21 beschränkt und abgeschlossen, und nach 18.10.22  $\supset A$ . Für alle Folgen  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow \bar{a}$  stimmt  $\lim_n P(a_n)$  überein; denn ist  $((a'_n))$  eine zweite solche Folge und ist  $a''_{2n-1} = a_n$ ,  $a''_{2n} = a'_n$ , so ist auch  $a''_n \rightarrow \bar{a}$ , also existiert  $\lim_n P(a''_n)$ , und somit ist  $\lim_n P(a_n) = \lim_n P(a''_{2n-1}) = \lim_n P(a''_n) = \lim_n P(a''_{2n}) = \lim_n P(a'_n)$ , wie behauptet. — Setzen wir noch  $\lim_n P(a_n) = Q_{\bar{a}}$ , so gilt nach 18.10.3  $e(P(a_n), Q_{\bar{a}}) \rightarrow 0$ . Wegen  $a_n \in A$  ist  $P(a_n) \subseteq B$ , also wegen  $Q_{\bar{a}} = \lim_n P(a_n)$  nach 17.1.23:  $Q_{\bar{a}} \subseteq B^0$ .

**22.4.21.** Ist in 22.4.2 die Abbildung  $P$  in sich kompakt, so ist auch die Menge  $Q_{\bar{a}}$  in sich kompakt.

Da  $Q_{\bar{a}}$  nach 22.4.2 abgeschlossen, genügt es nach 15.2.2, zu zeigen, daß  $Q_{\bar{a}}$  kompakt. Wäre  $Q_{\bar{a}}$  nicht kompakt, so gäbe es nach 18.3.3 ein  $\varrho > 0$  und eine Punktfolge  $((b_v))$  in  $Q_{\bar{a}}$ , so daß  $b_v, b_{v'} \geq \varrho$  für  $v \neq v'$  ( $v, v' = 1, 2, \dots$ ).

Sei  $a_n \in A$ ,  $a_n \rightarrow \bar{a}$ ; nach 22.4.2 ist  $e(P(a_n), Q_{\bar{a}}) < \frac{\varrho}{3}$  für fast alle  $n$ ; sei  $n$  so gewählt; dann gibt es ein  $b^*_v \in P(a_n)$ , so daß  $b_v, b^*_v < \frac{\varrho}{3}$ ; wegen  $b_v, b_{v'} \geq \varrho$

ist aber dann  $b_\nu^*, b_{\nu'}^* \geq \frac{\rho}{3}$  für  $\nu \neq \nu'$ ; die  $b_\nu^*$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) würden also eine unendliche Menge  $M \subseteq P(a_n)$  mit  $M^1 = A$  bilden, entgegen der Annahme, die Abbildung  $P$  sei in sich kompakt.

**22.4.3.** Ist die in sich kompakte Abbildung  $P$  von  $A$  auf die Menge  $B$  des vollständigen Raumes  $Y$  stetig, so gibt es eine und nur eine stetige Erweiterung  $Q$  von  $P$  auf die Menge  $\bar{A}$  der Konvergenzpunkte von  $P$ , und zwar ist  $Q$  in sich kompakt, und es ist  $Q(\bar{A}) \subseteq B^0$ .

Aus 22.1.2 folgt, daß jeder Punkt von  $A$  Konvergenzpunkt von  $P$  ist; also:  $A \subseteq \bar{A}$ . Nach 15.1.5 und 15.2.22 ist  $P(a)$  beschränkt und abgeschlossen für alle  $a \in A$ . Für alle  $\bar{a} \in \bar{A}$  existiert also die Menge  $Q_{\bar{a}}$  von 22.4.2. Ist  $\bar{a} \in A$ , so folgt aus 22.1.1:  $Q_{\bar{a}} = (P(\bar{a}))^0 = P(\bar{a})$ . Bezeichnen wir mit  $Q$  die Abbildung, die jedem  $\bar{a} \in \bar{A}$  alle Punkte von  $Q_{\bar{a}}$  zuordnet, so ist demnach  $Q$  eine Erweiterung von  $P$  auf  $\bar{A}$ ; und da nach 22.4.2  $Q(\bar{a}) = Q_{\bar{a}} \subseteq B^0$ , so ist auch  $Q(\bar{A}) \subseteq B^0$ . Nach 22.4.21 ist die Abbildung  $Q$  in sich kompakt. Wir zeigen nun, daß  $Q$  eine stetige Abbildung von  $\bar{A}$  ist. Sei  $\bar{a} \in \bar{A}$ ,  $\bar{a}_n \in \bar{A}$ ,  $\bar{a}_n \rightarrow \bar{a}$ . Nach 22.4.2 gibt es ein  $a_n \in A$ , so daß  $\bar{a}_n a_n < \frac{1}{n}$ ,  $e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{a_n}) < \frac{1}{n}$ ; dann ist auch  $a_n \rightarrow \bar{a}$ , also nach 22.4.2:  $e(Q_{\bar{a}}, Q_{a_n}) \rightarrow 0$ ; da nach § 9 (6.32):  $e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{\bar{a}}) \leq e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{a_n}) + e(Q_{\bar{a}}, Q_{a_n}) < e(Q_{\bar{a}}, Q_{a_n}) + \frac{1}{n}$ , gilt also auch  $e(Q_{\bar{a}_n}, Q_{\bar{a}}) \rightarrow 0$ ; nach 22.1.21 ist also die Abbildung  $Q$  von  $\bar{A}$  stetig. Daß es keine andere stetige Erweiterung von  $P$  auf  $\bar{A}$  gibt, folgt, da  $Q_{\bar{a}}$  nach 22.4.2 abgeschlossen ist, aus 22.3.1, denn wegen  $A \subseteq \bar{A} \subseteq A^0$  ist  $A$  nach 11.3.12 und 11.3.2 dicht in  $\bar{A}$ .

Nun zeigen wir noch, daß — bei in sich kompakten Abbildungen —  $\bar{A}$  der größte Teil von  $A^0$  ist, auf den  $P$  stetig erweitert werden kann:

**22.4.31.** Gibt es eine stetige, in sich kompakte Erweiterung  $Q$  von  $P$  auf die Menge  $A^* \subseteq A^0$ , so ist  $A^* \subseteq \bar{A}$ .

Sei  $a^* \in A^*$  und  $\delta > 0$ ; nach 22.1.2 gibt es eine Umgebung  $U_{a^*}$ , so daß  $e(Q(x), Q(a^*)) < \frac{\delta}{2}$  für alle  $x \in A^* U_{a^*}$ , also  $e(Q(x), Q(x')) < \delta$  für alle  $x$  und  $x'$  aus  $A^* U_{a^*}$ ; da  $Q(a) = P(a)$  für alle  $a \in A$ , ist also  $e(P(a), P(a')) < \delta$  für alle  $a$  und  $a'$  von  $A U_{a^*}$ ; d. h.  $a^*$  ist ein Konvergenzpunkt von  $P$ , d. h.  $a^* \in \bar{A}$ .

**22.4.4.** Sei  $P$  eine in sich kompakte Abbildung von  $A$  auf eine Punktmenge eines vollständigen Raumes; damit es eine stetige, in sich kompakte Erweiterung

$Q$  von  $P$  auf die Menge  $A^0$  gebe, ist notwendig und hinreichend, daß für jeden kompakten Teil  $A'$  von  $A$  die Teilabbildung  $A' \rightarrow P$  gleichmäßig stetig sei.

Notwendig: Nach 15·2·4 ist  $A^0$  eine in sich kompakte Menge  $\subseteq A^0$ . Ist  $Q$  stetig auf  $A^0$ , so ist  $A^0 \rightarrow Q$  stetig auf  $A^0$ , also nach 22·2·2 auch gleichmäßig stetig; also ist auch  $A' \rightarrow Q = A' \rightarrow P$  gleichmäßig stetig. Hinreichend: Ist  $A' \rightarrow P$  gleichmäßig stetig für jeden kompakten Teil  $A'$  von  $A$ , so ist  $P$  stetig auf  $A$ ; denn sei  $a \in A$ ,  $a_n \in A$ ,  $a_n \rightarrow a$ ; dann ist die aus den Punkten  $a, a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bestehende Menge  $A'$  kompakt, also ist  $A' \rightarrow P$  stetig, also gilt nach 22·1·21  $e(P(a_n), P(a)) \rightarrow 0$ , und da dies für jedes  $a \in A$  und jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  gilt, ist auch  $P$  stetig nach 22·1·21. Nach 22·4·3 genügt es also zu zeigen:  $\bar{A} = A^0$ . Sei  $\bar{a} \in A^0$  und  $a_n \in A$ ,  $a_n \rightarrow \bar{a}$ ; dann ist die aus den Punkten  $a_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) bestehende Menge  $A'$  ein kompakter Teil von  $A$ ; also ist nach Annahme  $A' \rightarrow P$  gleichmäßig stetig; somit gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $n_\delta$ , so daß  $e(P(a_n), P(a'_n)) < \delta$  für  $n \geq n_\delta$ ,  $n' \geq n_\delta$ ; da dies für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow \bar{a}$  gilt, so folgt in bekannter Weise: es gibt eine Umgebung  $U_{\bar{a}}$ , so daß  $e(P(a), P(a')) < \delta$  für alle  $a, a'$  aus  $A \cap U_{\bar{a}}$ ; d. h.  $\bar{a} \in \bar{A}$ . Aus  $\bar{a} \in A^0$  folgt also  $\bar{a} \in \bar{A}$ , d. h. es ist  $A^0 \subseteq \bar{A}$ , und da gewiß  $\bar{A} \subseteq A^0$ , ist  $\bar{A} = A^0$ , w. z. b. w.

In 22·4·4 ist enthalten:

**22·4·41.** Ist  $P$  eine in sich kompakte Abbildung der kompakten Menge  $A$  auf eine Punktmenge eines vollständigen Raumes, so ist, damit es eine stetige, in sich kompakte Erweiterung von  $P$  auf  $A^0$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $P$  gleichmäßig stetig sei.

## § 23. Eindeutige stetige Abbildungen.

1. Eindeutige stetige Abbildungen. Wir betrachten nun insbesondere eindeutige Abbildungen  $P$  einer metrischen Menge  $A$  auf eine metrische Menge  $B$ ; wo nichts anderes gesagt, fassen wir  $A$  und  $B$  selbst als die zugrunde gelegten metrischen Räume auf, auf die sich die vorkommenden Relativbegriffe beziehen.

Jede eindeutige Abbildung ist in sich kompakt (§ 21, 3) und zusammenhängend (§ 21, 4).

Ist die Abbildung  $P$  eindeutig, so besteht für jedes  $x \in A$  die Menge  $P(x)$  aus einem einzigen Punkt, dem Bildpunkt von  $x$ ; da dies zu keinem Mißverständnis führen kann, bezeichnen wir auch diesen Bildpunkt selbst mit  $P(x)$ .

Gibt es eine eindeutige, stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so heißt  $B$  kurz ein stetiges Bild von  $A$ .

Aus den Definitionen folgt unmittelbar:

**23-1-1.** Für eindeutige Abbildungen fallen die Begriffe „unterhalb stetig“, „oberhalb stetig“, „stetig“ zusammen.

Aus 22-1-2 folgt:

**23-1-2.** Damit die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$  gibt, so daß der Abstand  $P(x) P(a) < \delta$  ist für alle  $x \in K_{a\sigma}$ .

Aus 22-1-21 folgt:

**23-1-21.** Damit die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  gelte:  $P(a_n) \rightarrow P(a)$ .

Aus 21-1-4 folgt:

**23-1-3.** Ist  $P$  eine stetige Abbildung von  $A$  und ist  $A'$  dicht in  $A$ , so ist  $P(A')$  dicht in  $P(A)$ .

Hierin ist enthalten:

**23-1-31.** Jedes stetige Bild einer separablen Menge ist separabel.

Aus 22-1-4 folgt:

**23-1-4.** Ist  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und  $Q$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $B$  auf  $C$ , so ist  $P|Q$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $A$  auf  $C$ .

2. Urbildmengen. Wegen 23-1-1 folgt aus 21-5-1:

**23-2-1.** Damit die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $P^{-1}(G)$  offen in  $A$  sei für jede in  $B$  offene Menge  $G$ .

Ebenso erhält man aus 23-1-1 und 21-5-2:

**23-2-11.** Damit die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $P^{-1}(F)$  abgeschlossen in  $A$  sei für jede in  $B$  abgeschlossene Menge  $F$ .

**23-2-12.** Ist  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $B'$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $B$ , so ist  $P^{-1}(B')$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $A$ .

Ist  $B'$  ein  $G_\delta$  in  $B$ , so folgt die Behauptung aus 23-2-1 und der ersten Formel in 2-1-8; ist  $B'$  ein  $F_\sigma$  in  $B$ , so folgt sie aus 23-2-11 und der ersten Formel § 2 (1-9), angewendet auf  $P^{-1}$ .

3. Eindeutige stetige Abbildungen in sich kompakter Mengen. In 21-8-4 ist enthalten:

**23-3-1.** Jedes stetige Bild einer in sich kompakten Menge ist in sich kompakt.

**23.3.2.** Jede in sich kompakte Menge  $B \supset A$  ist stetiges Bild jedes dyadischen Diskontinuums  $A$ .

Nach 18.8.2 ist  $B$  darstellbar durch ein dyadisches Schema  $B_{k_1 k_2} \dots k_v$ , und das dyadische Diskontinuum  $A$  ist darstellbar durch ein disjunktes dyadisches Schema  $A_{k_1 k_2} \dots k_v$ ; jeder dyadischen Folge  $((k_v))$  entspricht (§ 18, 7) ein Punkt  $b_{((k_v))} \in B$ , und zwar der einzige dem Durchschnitte  $B_{k_1} B_{k_2} \dots B_{k_v} \dots$  angehörende Punkt; ebenso entspricht der dyadischen Folge  $((k_v))$  ein Punkt  $a_{((k_v))} \in A$ , wobei verschiedenen Folgen  $((k_v))$  verschiedene Punkte  $a_{((k_v))}$  entsprechen (§ 18, 9); die Zuordnung der dyadischen Folgen  $((k_v))$  und der Punkte von  $A$  ist also eineindeutig. Ordnen wir dem Punkte  $a_{((k_v))} \in A$  den Punkt  $b_{((k_v))} \in B$  zu, so ist dies eine eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$ ; es ist also nur mehr zu zeigen, daß diese Abbildung  $P$  stetig ist. Seien  $a = a_{((k_v))}$ ,  $a_n = a_{((k_{nv}))}$  Punkte von  $A$ , und sei  $a_n \rightarrow a$ ; für jedes  $v$  gilt dann nach 18.9.2  $k_{nv} = k_v$  für fast alle  $n$ ; da  $P(a) = b_{((k_v))}$ ,  $P(a_n) = b_{((k_{nv}))}$ , gilt also nach 18.7.3 auch  $b_n \rightarrow b$ ; somit ist  $P$  stetig nach 23.1.21.

Insbesondere erhält man eine stetige Abbildung des dyadischen Diskontinuums  $A$  auf das Intervall  $[0, 1]$ , indem man dem Punkte  $a_{((k_v))} \in A$  den Punkt  $\sum_v \frac{k_v}{2^v}$  zuordnet. Da ein Punkt von  $[0, 1]$  auf höchstens zwei Arten als Dualbruch  $\sum_v \frac{k_v}{2^v}$  geschrieben werden kann, hat bei dieser Abbildung jeder Punkt von  $[0, 1]$  in  $A$  höchstens zwei Urbilder. — Eine stetige Abbildung des dyadischen Diskontinuums auf das Quadrat  $[0, 0; 1, 1]$  erhält man, indem man dem Punkte  $a_{((k_v))} \in A$  den Punkt  $x_1 = \sum_v \frac{k_{2v-1}}{2^v}$ ,  $x_2 = \sum_v \frac{k_{2v}}{2^v}$  zuordnet. Da jede Zahl  $x_1$ , bzw.  $x_2$  aus  $[0, 1]$  auf höchstens zwei Arten als Dualbruch geschrieben werden kann, hat bei dieser Abbildung jeder Punkt des Quadrates  $[0, 0; 1, 1]$  in  $A$  höchstens vier Urbilder.

**23.3.3.** Ist  $P$  eine eindeutige, stetige Abbildung der in sich kompakten Menge  $A$ , so ist die Abbildung  $P^{-1}$  oberhalb stetig.

Dies ist enthalten in 21.6.3.

**23.3.31.** Damit die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf die in sich kompakte Menge  $B$  stetig sei, ist hinreichend, daß  $P^{-1}$  oberhalb stetig sei, und  $P^{-1}(b)$  abgeschlossen sei in  $A$  für alle  $b \in B$ .

Dies folgt aus 21.6.31 und 23.1.1.

Wir nennen ein disjunktes System  $\mathfrak{C}$  von Teilen der Menge  $A$ , dessen Summe  $A$  ist, ein oberhalb stetiges Zerlegungssystem von  $A$ , wenn

es zu jeder Menge  $\bar{C} \in \mathfrak{C}$  und zu jeder in  $A$  offenen Menge  $G \supseteq \bar{C}$  eine in  $A$  offene Menge  $G' \supseteq \bar{C}$  gibt, so daß für jede Menge  $C \in \mathfrak{C}$  mit  $C \cap G' \supset A$  gilt:  $C \subseteq G$ .

**23.3.4.** Ist  $P$  eine eindeutige, stetige Abbildung der in sich kompakten Menge  $A$  auf  $B$ , so ist das System der Mengen  $P^{-1}(b)$  ( $b \in B$ ) ein oberhalb stetiges Zerlegungssystem von  $A$ .

Sei  $\bar{b} \in B$  und  $G$  eine in  $A$  offene Menge  $\supseteq P^{-1}(\bar{b})$ . Da nach 23.3.3  $P^{-1}$  oberhalb stetig ist, gibt es eine Umgebung  $U_{\bar{b}}$ , so daß  $P^{-1}(U_{\bar{b}}) \subseteq G$ ; nach 23.2.1 ist also  $P^{-1}(U_{\bar{b}})$  eine in  $A$  offene Menge  $G' \subseteq G$ , und es ist auch  $G' \supseteq P^{-1}(\bar{b})$ . Aus  $P^{-1}(b) \cap G' \supset A$  folgt  $b \in U_{\bar{b}}$ , mithin  $P^{-1}(b) \subseteq G' \subseteq G$ .

Um die Umkehrung dieses Satzes zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß, wenn  $A$  irgendeine metrische Menge bedeutet, jedes aus in  $A$  abgeschlossenen Mengen bestehende, oberhalb stetige Zerlegungssystem  $\mathfrak{C}$  von  $A$  selbst als metrischer Raum aufgefaßt werden kann. Zu dem Zwecke zeigen wir zuerst, daß  $\mathfrak{C}$  als topologischer Raum aufgefaßt werden kann, indem wir ein den topologischen Axiomen  $1_1), 2_1), 3_1), 4_1), 5_1)$  von § 9, 1 genügendes System in  $\mathfrak{C}$  offener Mengen definieren:

Die Menge  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}$  heiße offen (in  $\mathfrak{C}$ ), wenn  $\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$  offen in  $A$  ist.

Die Axiome  $1_1), 3_1), 4_1)$  sind dann offenbar erfüllt; wir zeigen, daß auch  $5_1)$  (und somit  $2_1)$ ) erfüllt ist. Zu dem Zwecke beweisen wir zunächst den Hilfsatz:

**23.3.5.** Ist  $G$  eine in  $A$  offene Menge, so ist das System  $\mathfrak{G}$  aller  $C \in \mathfrak{C}$ , die  $\subseteq G$  sind, eine in  $\mathfrak{C}$  offene Menge.

Es ist zu zeigen: Ist  $G^* = \bigcup_{C \in \mathfrak{G}} C$ , so ist  $G^*$  offen in  $A$ . Sei  $a^* \in G^*$ ; dann gibt es ein  $C^* \in \mathfrak{G}$ , so daß  $a^* \in C^*$ ; wegen  $C^* \subseteq G$  gibt es nach Definition des oberhalb stetigen Zerlegungssystems eine in  $A$  offene Menge  $G' \supseteq C^*$ , so daß für jedes  $C \in \mathfrak{C}$  mit  $C \cap G' \supset A$  gilt:  $C \subseteq G$ , und mithin  $C \in \mathfrak{G}$ . Zu jedem  $a \in G'$  gibt es ein  $C_a \in \mathfrak{C}$ , so daß  $a \in C_a$ ; dann ist  $C_a \cap G' \supset A$ , also  $C_a \in \mathfrak{G}$ , also  $a \in G^*$ ; also ist  $G' \subseteq G^*$ ; wegen  $a^* \in G'$  ist also  $a^*$  innerer Punkt von  $G^*$ , nach 10.3.6 ist somit  $G^*$  offen in  $A$ , w. z. b. w.

Nun erkennen wir leicht, daß Axiom  $5_1)$  erfüllt ist: sei  $C_1 \in \mathfrak{C}$ ,  $C_2 \in \mathfrak{C}$ ,  $C_1 \neq C_2$ ; dann sind  $C_1, C_2$  fremde, abgeschlossene Mengen des metrischen Raumes  $A$ ; nach 14.2.41 gibt es also zwei fremde, in  $A$  offene Mengen  $G_1 \supseteq C_1, G_2 \supseteq C_2$ ; nach 23.3.5 sind die Systeme  $\mathfrak{G}_1$  bzw.  $\mathfrak{G}_2$  aller  $C \in \mathfrak{C}$ , die  $\subseteq G_1$ , bzw.  $\subseteq G_2$  sind, fremde, in  $\mathfrak{C}$  offene Mengen, und es ist  $C_1 \in \mathfrak{G}_1, C_2 \in \mathfrak{G}_2$ .

Durch obige Definition der in  $\mathfrak{C}$  offenen Mengen ist nun  $\mathfrak{C}$  zu einem topologischen Raum gemacht. Da die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen Mengen sind, so gilt:

**23·3·51.** *Damit die Menge  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}$  abgeschlossen (in  $\mathfrak{C}$ ) sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$  abgeschlossen in  $A$  sei.*

**23·3·52.** *Der topologische Raum  $\mathfrak{C}$  ist regulär.*

Nach § 14, 2 bedeutet das: Ist  $C_0 \in \mathfrak{C}$ , ist  $\mathfrak{C}$  eine in  $\mathfrak{C}$  abgeschlossene Menge und  $C_0 \sim \varepsilon \mathfrak{C}$ , so gibt es zwei fremde, in  $\mathfrak{C}$  offene Mengen  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ , so daß  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G}, C_0 \in \mathfrak{G}'$ . Nach 23·3·51 ist  $F = \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$  abgeschlossen in  $A$ , und nach Annahme ist  $C_0$  abgeschlossen in  $A$ ; wegen  $C_0 \sim \varepsilon \mathfrak{C}$  ist  $C_0 F = A$ ; da  $A$  als metrischer Raum nach 14·2·41 normal ist, gibt es zwei fremde in  $A$  offene Mengen  $G, G'$ , so daß  $F \subseteq G, C_0 \subseteq G'$ . Ist  $\mathfrak{G}$ , bzw.  $\mathfrak{G}'$  das System aller  $C \in \mathfrak{C}$ , die  $\subseteq G$ , bzw.  $\subseteq G'$  sind, so sind  $\mathfrak{G}$  und  $\mathfrak{G}'$  nach 23·3·5 offen in  $\mathfrak{C}$ , es ist  $\mathfrak{G} \mathfrak{G}' = A$  und  $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{G}, C_0 \in \mathfrak{G}'$ , w. z. b. w.

**23·3·53.** *Ist  $A$  in sich kompakt, so ist der topologische Raum  $\mathfrak{C}$  separabel.*

Nach 15·1·41 ist  $A$  separabel. Sei  $H_1, H_2, \dots, H_\nu, \dots$  ein ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen (§ 13, 1), und seien  $G_1, G_2, \dots, G_n, \dots$  die abzählbar vielen in  $A$  offenen Mengen, die Summe endlich vieler  $H_n$  sind; das System aller  $C \in \mathfrak{C}$ , die  $\subseteq G_n$  sind, heiße  $\mathfrak{G}_n$ ; nach 23·3·5 ist  $\mathfrak{G}_n$  offen in  $\mathfrak{C}$ . Es genügt zu zeigen: die nicht leeren unter den Mengen  $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \dots, \mathfrak{G}_n, \dots$  bilden ein ausgezeichnetes System in  $\mathfrak{C}$  offener Mengen. Sei  $\mathfrak{G}$  eine in  $\mathfrak{C}$  offene Menge, und sei  $C_0 \in \mathfrak{G}$ ; wir setzen  $G = \bigcup_{C \in \mathfrak{G}} C$ ; dann ist  $G$  offen in  $A$  und  $C_0 \subseteq G$ ; also gibt es zu jedem  $c \in C_0$  ein  $H_\nu$ , so daß  $c \in H_\nu, H_\nu \subseteq G$ ; da  $C_0$  als abgeschlossener Teil der in sich kompakten Menge  $A$  nach 15·2·3 in sich kompakt ist, gibt es nach 15·5·1 unter diesen  $H_\nu$  endlich viele, in deren Summe  $G_n$  die Menge  $C_0$  enthalten ist; dann ist  $C_0 \subseteq G_n \subseteq G$ , somit  $C_0 \in \mathfrak{G}_n, \mathfrak{G}_n \subseteq \mathfrak{G}$ , w. z. b. w.

**23·3·54.** *Ist  $A$  in sich kompakt, so ist der topologische Raum  $\mathfrak{C}$  metrisierbar. Dies folgt wegen 23·3·52, 23·3·53, aus 14·3·31.*

Nun beweisen wir folgende Umkehrung von 23·3·4:

**23·3·6.** *Ist  $A$  in sich kompakt und ist  $\mathfrak{C}$  ein aus in  $A$  abgeschlossenen Mengen bestehendes oberhalb stetiges Zerlegungssystem von  $A$ , so gibt es eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf einen metrischen Raum  $B$ , so daß  $\mathfrak{C}$  das System aller Mengen  $P^{-1}(b)$  ( $b \in B$ ) ist.*

Nach 23·3·54 kann  $\mathfrak{C}$  als metrischer Raum aufgefaßt werden; wir definieren eine eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf die Elemente  $C$  von  $\mathfrak{C}$  durch:  $P(a) = C$ , wenn  $a \in C$ . Es ist noch zu zeigen, daß diese Abbildung stetig ist. Sei  $\mathfrak{G}$  offen in  $\mathfrak{C}$  und  $G = \bigcup_{C \in \mathfrak{G}} C$ ; nach Definition der in  $\mathfrak{C}$  offenen Mengen ist dann  $G$  offen in  $A$ , und nach Definition der Abbildung  $P$  ist  $G = P^{-1}(\mathfrak{G})$ ; nach 23·2·1 ist also  $P$  stetig.

Literatur: Satz 23·8·2 stammt von P. Alexandroff, Amst. Proc. 28 (1925) S. 997. Die Theorie der oberhalb stetigen Zerlegungssysteme geht zurück auf R. L. Moore, Am. Trans. 27 (1925) S. 416. Zu den hier erörterten Anwendungen dieser Theorie vgl. P. Alexandroff, Math. Ann. 96 (1927) S. 555; C. Kuratowski, Fund. math. 11 (1928) S. 196.

**4. Erweiterung.** Da sich bei eindeutigen Abbildungen  $P$  die Abweichung  $e(P(a), P(a'))$  auf den Abstand  $P(a) P(a')$  der Punkte  $P(a), P(a')$  reduziert, lautet die Definition der gleichmäßigen Stetigkeit (§ 22, 2) nunmehr: Die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  heißt gleichmäßig stetig, wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$  gibt, so daß für je zwei Punkte  $a, a'$  von  $A$  mit  $a a' < \sigma$  die Ungleichung gilt:  $P(a) P(a') < \delta$ .

Was die Erweiterung (§ 22, 4) einer eindeutigen Abbildung anlangt, so gilt:

**23·4·1.** Ist die Abbildung  $P$  von  $A$  eindeutig, und ist  $Q$  eine stetige Erweiterung von  $A$  auf eine Menge  $A^* \subseteq A^0$ , so ist auch  $Q$  eindeutig.

Sei  $a \in A^*$ ; da dann auch  $a \in A^0$ , gibt es in  $A$  eine Folge  $(a_n)$  mit  $a_n \rightarrow a$ ; angenommen es gebe in  $Q$  ( $a$ ) zwei Punkte  $b \neq b'$ ; dann gäbe es zwei fremde Umgebungen  $U_b, U_{b'}$ . Da  $Q$  als stetige Abbildung auch unterhalb stetig ist, müßte nach 21·1·1  $Q(a_n) U_b \supset A$  und  $Q(a_n) U_{b'} \supset A$  sein für fast alle  $n$ ; da aber  $Q(a_n) = P(a_n)$  ist, und da, weil  $P$  eindeutig,  $P(a_n)$  nur aus einem Punkte besteht, ist das unmöglich.

Aus 22·4·1 entnehmen wir somit:

**23·4·2.** Ist  $P$  eine eindeutige Abbildung der kompakten Menge  $A$  auf eine Punktmenge eines vollständigen Raumes, so ist, damit es eine eindeutige stetige Erweiterung von  $P$  auf  $A^0$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $P$  gleichmäßig stetig sei.

Literatur: F. Hausdorff, Grundz. d. Mengenlehre S. 368. W. Sierpiński und A. Zygmund, Fund. math. 4 (1923) S. 317. A. Lindenbaum, Fund. math. 18 (1926) S. 215.

**5. Eindeutige stetige Abbildungen lokal-zusammenhängender Mengen.** Aus 21·4·1 oder 21·4·2 entnehmen wir:

**23·5·1.** Jedes stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist zusammenhängend.

Für lokal-zusammenhängende Mengen (§ 16, 5) gilt nur:

**23·5·2.** Jedes stetige Bild  $B$  einer in sich kompakten, lokal-zusammenhängenden Menge  $A$  ist lokal-zusammenhängend.

Sei  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ . Nach 16·5·2 genügt es, zu zeigen, daß die Komponenten jeder in  $B$  offenen Menge offen in  $B$  sind; sei also  $H$  offen in  $B$ , sei  $K$  eine Komponente von  $H$  und  $b \in K$ ; wir



haben zu zeigen: es gibt eine Umgebung  $U_b \subseteq K$ . Nach 23.2.1 ist  $P^{-1}(H)$  offen in  $A$ ; weil  $A$  lokal-zusammenhängend, sind nach 16.5.2 auch die Komponenten von  $P^{-1}(H)$  offen; ist also  $G$  die Summe derjenigen Komponenten  $C$  von  $P^{-1}(H)$ , für die  $P^{-1}(b)C \supset A$ , so ist  $G$  eine offene Menge  $\supseteq P^{-1}(b)$ . Da nach 23.3.3  $P^{-1}$  oberhalb stetig ist, so gibt es eine Umgebung  $U_b$ , so daß  $P^{-1}(U_b) \subseteq G$ . Nach 23.5.1 ist das Bild  $P(C)$  einer Komponente  $C$  von  $P^{-1}(H)$  zusammenhängend; also ist  $P(G)$  Summe zusammenhängender Mengen, die den Punkt  $b$  gemein haben, also ist nach 16.1.41  $P(G)$  zusammenhängend, und wegen  $b \in P(G)$  ist  $P(G) \subseteq K$ . Wegen  $P^{-1}(U_b) \subseteq G$  ist aber  $U_b \subseteq P(G)$ , also  $U_b \subseteq K$ , w. z. b. w.

Wir werden nun umgekehrt zeigen, daß je zwei in sich kompakte, zusammenhängende und lokal-zusammenhängende Mengen, die mehr als einen Punkt enthalten, stetige Bilder voneinander sind. Dazu benötigen wir den Hilfssatz:

**23.5.3.** *Ist die in sich kompakte Menge  $B$  lokal-zusammenhängend, so gibt es zu jedem  $\varrho > 0$  ein  $\sigma > 0$ , so daß jeder Punkt  $b \in B$  einem Gebiete  $G_b$  (in  $B$ ) angehört, für das  $K_{b\sigma} \subseteq G_b \subseteq K_{b\varrho}$ .*

Anderenfalls gäbe es ein  $\varrho > 0$  und eine Folge  $(b_n)$  in  $B$ , so daß es kein der Beziehung  $K_{b_n \frac{1}{n}} \subseteq G \subseteq K_{b_n \varrho}$  genügendes Gebiet  $G$  gibt. Da  $B$  in sich kompakt, hat  $(b_n)$  einen Häufungspunkt  $b \in B$ . Da  $B$  lokal-zusammenhängend, ist nach 16.5.2 die zu  $b$  gehörige Komponente von  $K_{b \frac{\varrho}{2}}$  ein Gebiet  $G$ ; dann ist aber  $K_{b_n \frac{1}{n}} \subseteq G \subseteq K_{b_n \varrho}$  für unendlich viele  $n$ , entgegen der Wahl der  $b_n$ .

**23.5.4.** *Ist  $B$  in sich kompakt, zusammenhängend und lokal-zusammenhängend, und ist  $b' \in B$ ,  $b'' \in B$ , so gibt es eine eindeutige, stetige Abbildung  $Q$  von  $[0, 1]$  auf  $B$ , so daß  $Q(0) = b'$ ,  $Q(1) = b''$ .*

Nach 23.5.3 gibt es ein  $\sigma_n > 0$ , so daß jeder Punkt  $b \in B$  einem Gebiete  $G_b$  angehört, für das  $K_{b\sigma_n} \subseteq G_b \subseteq K_{b \frac{1}{2^n}}$ ; da hierin offenbar  $\sigma_n \leq \frac{1}{2^n}$  ist, so haben wir:  $\sigma_n \rightarrow 0$ . Nach 9.7.1 und 15.1.4 gibt es in  $B$  ein endliches  $\sigma_n$ -Netz  $C_n$ . Seien  $c_1, c_2, \dots, c_k$  die endlich vielen Punkte von  $C_1$ . Nach 16.2.2 gibt es in  $B$  eine endliche  $\sigma_1$ -Kette, die  $b'$  mit  $c_1$  verbindet, eine endliche  $\sigma_1$ -Kette, die  $c_1$  mit  $c_2$  verbindet,  $\dots$ , eine endliche  $\sigma_1$ -Kette, die  $c_{k-1}$  mit  $c_k$  verbindet, eine endliche  $\sigma_1$ -Kette, die  $c_k$  mit  $b''$  verbindet. Diese  $\sigma_1$ -Ketten fügen sich zusammen zu einer endlichen  $\sigma_1$ -Kette, die  $b'$  mit  $b''$  verbindet; indem wir nötigenfalls einen Punkt mehrmal anschreiben, können wir annehmen, sie bestehe aus  $2^r + 1$  Punkten:  $b' = b_0^{(1)}, b_1^{(1)}, \dots, b_{2^r}^{(1)} = b''$ ; jeder Punkt von  $C_1$  kommt unter den Punkten  $b_i^{(1)}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2^r - 1$ ) vor. Da  $C_1$  ein  $\sigma_1$ -Netz in  $B$ , gibt es

zu jedem  $c \in C_2$  unter den Punkten  $b_i^{(1)}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2^{v_1} - 1$ ) mindestens einen mit  $b_i^{(1)} c < \sigma_1$ ; bedeutet  $C_i^{(2)}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2^{v_1} - 1$ ) die Menge aller

$c \in C_2$  mit  $b_i^{(1)} c < \sigma_1$ , so ist demnach  $C_2 = \bigcup_{i=0}^{2^{v_1}-1} C_i^{(2)}$ . Zuzufolge der Wahl von  $\sigma_1$  gibt es ein Gebiet  $G_1$ , so daß  $K_{b_i^{(1)} \sigma_1} \subseteq G_i \subseteq K_{b_i^{(1)} \frac{1}{2}}$  ( $i = 0, 1, \dots,$

$2^{v_1} - 1$ ); sind  $c'_1, c'_2, \dots, c'_l$  die endlich vielen Punkte von  $C_i^{(2)}$ , so ist also  $c'_\lambda \in G_i$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, l$ ) und  $b_{i+1}^{(1)} \in G_i$ . Da  $G_i$  zusammenhängend, gibt es nach 16.2.2 in  $G_i$  eine  $b_i^{(1)}$  mit  $c'_\lambda$  verbindende  $\sigma_2$ -Kette  $A_\lambda$  und eine  $b_i^{(1)}$  mit  $b_{i+1}^{(1)}$  verbindende  $\sigma_2$ -Kette  $A'$ ; durchlaufen wir  $A_1$  zuerst in der Richtung von  $b_i^{(1)}$  nach  $c'_1$ , dann in der umgekehrten Richtung, sodann  $A_2$  zuerst in der Richtung von  $b_i^{(1)}$  nach  $c'_2$ , dann in der umgekehrten Richtung, ..., sodann  $A_l$  zuerst in der Richtung von  $b_i^{(1)}$  nach  $c'_l$ , dann in der umgekehrten Richtung, und schließlich noch  $A'$ , so erhalten wir eine  $b_i^{(1)}$  mit  $b_{i+1}^{(1)}$  verbindende  $\sigma_2$ -Kette in  $G_i$ ; dabei können wir annehmen, daß alle diese  $\sigma_2$ -Ketten (für  $i = 0, 1, \dots, 2^{v_1} - 1$ ) aus gleich vielen, und zwar aus  $2^{v_2} + 1$  Punkten:  $b_i^{(1)} = b_{i 2^{v_2}}^{(2)}, b_{i 2^{v_2}+1}^{(2)}, \dots, b_{(i+1) 2^{v_2}}^{(2)} = b_{i+1}^{(1)}$  bestehen; jeder Punkt von  $C_i^{(2)}$  kommt unter den Punkten  $b_j^{(2)}$  ( $j = i 2^{v_2}, i 2^{v_2} + 1, \dots, (i+1) 2^{v_2}$ ) vor; also kommt jeder Punkt von  $C_1 + C_2$  unter den Punkten  $b_j^{(2)}$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^{v_1+v_2}$ ) vor; wegen  $b_j^{(2)} \in G_i$  ( $i 2^{v_2} \leq j \leq (i+1) 2^{v_2}$ ) und  $G_i \subseteq K_{b_i^{(1)} \frac{1}{2}}$  ist  $b_i^{(1)} b_j^{(2)} < \frac{1}{2}$  für  $i 2^{v_2} \leq j \leq (i+1) 2^{v_2}$ .

In derselben Weise kann nun zwischen je zwei Punkte  $b_j^{(2)}, b_{j+1}^{(2)}$  eine aus  $2^{v_3} + 1$  Punkten:  $b_j^{(2)} = b_{j 2^{v_3}}^{(3)}, b_{j 2^{v_3}+1}^{(3)}, \dots, b_{(j+1) 2^{v_3}}^{(3)} = b_{j+1}^{(2)}$  bestehende  $\sigma_3$ -Kette so eingeschaltet werden, daß sämtliche Punkte von  $C_1 + C_2 + C_3$  unter den Punkten  $b_k^{(3)}$  ( $k = 0, 1, \dots, 2^{v_1+v_2+v_3}$ ) vorkommen, und daß

$b_j^{(2)} b_k^{(3)} < \frac{1}{2^2}$  für  $j 2^{v_2} \leq k \leq (j+1) 2^{v_2}$ , mithin  $b_i^{(1)} b_k^{(3)} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}$  für  $i 2^{v_1+v_2}$

$\leq k \leq (i+1) 2^{v_1+v_2}$ . Wir erhalten so für jedes  $n$  eine endliche Anzahl von Punkten:  $b' = b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, \dots, b_{2^{v_1+v_2}+\dots+v_n}^{(n)} = b''$ , so daß sämtliche Punkte von  $C_1 + C_2 + \dots + C_n$  unter den  $b_j^{(n)}$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^{v_1+v_2}+\dots+v_n$ ) vorkommen, und so, daß für alle zwischen  $b_j^{(n)}$  und  $b_{j+1}^{(n)}$  eingeschalteten Punkte  $b_l^{(n+h)}$

( $j 2^{v_1+v_2}+\dots+v_n \leq l \leq (j+1) 2^{v_1+v_2}+\dots+v_n$ ) gilt:  $b_j^{(n)} b_l^{(n+h)} < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+h-1}}$ ; dabei ist  $b_j^{(n)} = b_{j 2^{v_1+v_2}+\dots+v_n}^{(n+1)}$ . Wir ordnen nun dem dyadisch rationalen Punkte  $x = \frac{j}{2^{v_1+v_2}+\dots+v_n}$  ( $j = 0, 1, \dots, 2^{v_1+v_2}+\dots+v_n$ ) den Punkt  $b_j^{(n)}$

zu. Dadurch ist eine Abbildung  $S$  der dyadisch rationalen Punkte von  $[0, 1]$  auf einen Teil  $B' \subseteq S C_n$  von  $B$  gegeben, bei der  $S(0) = b', S(1) = b''$ ;

und da für die Bilder  $y$  der dyadisch rationalen Punkte von  $\left[ \frac{j}{2^{v_1+v_2+\dots+v_n}}, \frac{j+1}{2^{v_1+v_2+\dots+v_n}} \right]$  gilt  $b_j^{(n)} y < \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots$ , ist diese Abbildung gleichmäßig stetig. Da  $B$  als in sich kompakte Menge nach 18-3-1 vollständig ist, gibt es zufolge 23-4-2 eine stetige Erweiterung der Abbildung  $S$  zu einer eindeutigen Abbildung  $Q$  von  $[0, 1]$  auf eine Menge  $M \subseteq B$ , bei der  $Q(0) = b'$ ,  $Q(1) = b''$ . Nach 23-3-1 ist  $M$  in sich kompakt, also abgeschlossen; wegen  $M \supseteq B' \supseteq \bigcup_n S C_n$  ist demnach  $B \supseteq M \supseteq \bigcup_n (S C_n)^0$ ; da aber  $C_n$  ein  $\sigma_n$ -Netz in  $B$  und  $\sigma_n \rightarrow 0$  war, ist  $B = \bigcup_n (S C_n)^0$ ; also ist  $M = B$ , d. h.  $Q$  ist eine eindeutige stetige Abbildung von  $[0, 1]$  auf  $B$ .

**23-5-41.** Ist sowohl  $A$  als  $B$  eine in sich kompakte, zusammenhängende und lokal-zusammenhängende Menge, und enthält  $A$  mehr als einen Punkt, so ist  $B$  stetiges Bild von  $A$ .

Zunächst erhalten wir eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $[0, 1]$  in folgender Weise. Da  $A$  kompakt, ist  $A$  nach 15-1-5 beschränkt. Sei  $a' \in A$ ; nach 9-6-2 ist  $\sup_{x \in A} x a' = d$  eine endliche Zahl  $> 0$ , und zwar gibt es ein  $a'' \in A$ , so daß  $a' a'' = d$ ; denn jedenfalls gibt es ein  $a_n \in A$ , so daß  $a' a_n > d - \frac{1}{n}$ ; da  $A$  in sich kompakt, hat  $(a_n)$  einen Häufungspunkt  $a'' \in A$ , und offenbar ist  $a' a'' = d$ . Ist nun  $0 < x < d$ , so gibt es mindestens ein  $a \in A$ , für das  $a a' = x$ ; denn sei  $A'$  die Menge aller  $a \in A$  mit  $a a' < x$  und  $A''$  die Menge aller  $a \in A$  mit  $a a' > x$ ; gibt es in  $A$  keinen Punkt mit  $a a' = x$ , so ist  $A = A' + A''$  eine Zerlegung von  $A$  in zwei abgesonderte Teile  $\supset A$ , was unmöglich, weil  $A$  zusammenhängend. Ordnet man nun jedem  $a \in A$  die Zahl  $\frac{1}{d} a a'$  zu, so erhält man eine eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $[0, 1]$ , die offenkundig stetig ist. Nach 23-5-4 gibt es aber eine eindeutige stetige Abbildung  $Q$  von  $[0, 1]$  auf  $B$ . Dann ist  $PQ$  eine eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , die nach 23-1-4 auch stetig ist.

Da z. B. jedes abgeschlossene Intervall des  $R_n$  in sich kompakt, zusammenhängend und lokal-zusammenhängend ist, gibt es nach 23-5-4 eine eindeutige stetige Abbildung von  $[0, 1]$  auf ein abgeschlossenes Intervall des  $R_n$ .

Literatur: Satz 23-5-4 stammt von H. Hahn, Wien. Ber. 123 (1914) S. 2433 und St. Mazurkiewicz, C. R. Soc. Sc. Varsovie 6 (1913) S. 306; Fund. math. 1 (1920) S. 166; zu dem hier gegebenen Beweise vgl. G. T. Whyburn, Am. Journ. 53 (1931) S. 670. Die erste stetige Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat gab G. Peano, Math. Ann. 36 (1890) S. 157. Eine andere stetige Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat wurde von H. Lebesgue angegeben: Leçons sur l'intégration S. 44 (vgl. hierzu auch H. Hahn, Ann. di mat (3) 21 (1913) S. 51).

**6. Projektion.** Sei  $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  ein Punkt des Produktraumes  $E = E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(n)}$  (§ 20, 1). Ist dann  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , so heißt der Raum  $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$  ein Faktorenraum von  $E$ , und der Punkt  $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}) \in E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$ , den wir kurz mit  $a_{i_1 i_2 \dots i_k}$  bezeichnen, heißt die Projektion von  $a$  in diesen Faktorenraum; insbesondere heißt  $a_i$  die Projektion von  $a$  in den Raum  $E^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Nach § 20 (1) ist:

(6)  $a_{i_1 i_2 \dots i_k} b_{i_1 i_2 \dots i_k} = \sqrt{(a_{i_1} b_{i_1})^2 + (a_{i_2} b_{i_2})^2 + \dots + (a_{i_k} b_{i_k})^2} \leq a b$ .  
Die Abbildung  $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$  von  $E$  auf  $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$ , die dem Punkte  $a \in E$  den Punkt  $a_{i_1 i_2 \dots i_k} \in E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$  zuordnet, heißt die Projektion von  $E$  in den Raum  $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$ ; das Bild  $P_{i_1 i_2 \dots i_k}(A)$  der Menge  $A \subseteq E$  heißt die Projektion von  $A$  in den Raum  $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$ . Nach § 2 (1.9) gilt:

$$(6.1) \quad P_{i_1 i_2 \dots i_k} \left( \bigcup_m A_m \right) = \bigcup_m P_{i_1 i_2 \dots i_k}(A_m);$$

$$P_{i_1 i_2 \dots i_k} \left( \bigcap_m A_m \right) \subseteq \bigcap_m P_{i_1 i_2 \dots i_k}(A_m).$$

Aus (6) folgt unmittelbar:

**23.6.1.** Die Projektion  $P_{i_1 i_2 \dots i_k}$  von  $E$  in den Faktorenraum  $E^{(i_1)} \times E^{(i_2)} \times \dots \times E^{(i_k)}$  ist eine eindeutige, gleichmäßig stetige Abbildung.

Wir können uns offenbar ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Räume  $E = E^{(1)} \times E^{(2)}$  beschränken; dabei bedeutet  $P_1$  bzw.  $P_2$  die Projektion von  $E$  in  $E^{(1)}$  bzw. in  $E^{(2)}$ .

**23.6.2.** Ist  $A$  offen in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist  $P_1(A)$  offen in  $E^{(1)}$ .

Sei  $a \in P_1(A)$ ; dann gibt es ein  $b \in E^{(2)}$ , so daß  $(a, b) \in A$ . Sei  $K_{(a, b) \varrho}$  die Kugel in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  vom Mittelpunkt  $(a, b)$  und Radius  $\varrho$ ; da  $A$  offen und  $(a, b) \in A$ , gibt es ein  $\varrho > 0$ , so daß  $K_{(a, b) \varrho} \subseteq A$ ; für alle  $x \in E^{(1)}$  mit  $xa < \varrho$  gilt dann:  $(x, b) \in K_{(a, b) \varrho}$ , also auch  $(x, b) \in A$ , mithin  $x \in P_1(A)$ ; d. h. für die Kugel  $K_{a \varrho} \subseteq E^{(1)}$  gilt  $K_{a \varrho} \subseteq P_1(A)$ . Also ist  $a$  innerer Punkt von  $P_1(A)$ , also ist  $P_1(A)$  offen in  $E^{(1)}$ .

Die Projektion  $P_1(A)$  einer in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  abgeschlossenen Menge  $A$  braucht nicht abgeschlossen zu sein; Beispiel im  $R_2$ : die Menge  $A$  aller der Gleichung  $x_1 x_2 = 1$  genügenden Punkte  $(x_1, x_2)$  des  $R_2$  ist abgeschlossen; ihre Projektion  $P_1(A)$  besteht aus allen  $x_1 \neq 0$ , ist also nicht abgeschlossen im  $R_1$ . Wohl aber gilt:

**23.6.3.** Ist  $A$  abgeschlossen in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  und ist  $E^{(2)}$  in sich kompakt, so ist  $P_1(A)$  abgeschlossen in  $E^{(1)}$ .

Sei  $a$  Häufungspunkt von  $P_1(A)$ ; wir haben zu zeigen:  $a \in P_1(A)$ . Es gibt eine Folge  $((a_n))$  aus  $P_1(A)$  mit  $a_n \rightarrow a$ ; wegen  $a_n \in P_1(A)$  gibt es ein

$b_n \in E^{(2)}$ , so daß  $(a_n, b_n) \in A$ ; weil  $E^{(2)}$  in sich kompakt, hat  $((b_n))$  einen Häufungspunkt  $b \in E^{(2)}$ ; in  $((b_n))$  gibt es eine Teilfolge  $((b_{n_p}))$  mit  $b_{n_p} \rightarrow b$ ; da auch  $a_{n_p} \rightarrow a$ , gilt nach 20-1-1:  $(a_{n_p}, b_{n_p}) \rightarrow (a, b)$ ; da  $(a_{n_p}, b_{n_p}) \in A$  und da  $A$  abgeschlossen, gilt auch  $(a, b) \in A$ ; also ist  $a \in P_1(A)$ , w. z. b. w.

**23-6-31.** Ist  $A$  abgeschlossen in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  und ist  $E^{(2)}$  halbkompakt, so ist  $P_1(A)$  ein  $F_\sigma$  in  $E^{(1)}$ .

Dies folgt aus 23-6-3 vermöge der ersten Formel (6-1).

**23-6-32.** Ist  $A$  ein  $F_\sigma$  in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  und ist  $E^{(2)}$  halbkompakt, so ist  $P_1(A)$  ein  $F_\sigma$  in  $E^{(1)}$ .

Dies folgt durch nochmalige Anwendung der ersten Formel (6-1) aus 23-6-31, da nach 10-7-2 die Summe abzählbar vieler  $F_\sigma$  wieder ein  $F_\sigma$  ist.

Ohne die Voraussetzung,  $E^{(2)}$  sei halbkompakt, gilt dieser Satz nicht. Auch braucht, wenn  $A$  ein  $G_\delta$  in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  ist, die Projektion  $P_1(A)$  keineswegs ein  $G_\delta$  in  $E^{(1)}$  zu sein; vgl. hierzu § 40, 6.

Wegen 23-6-1 entnehmen wir aus 23-1-31, 23-3-1, 23-5-1, daß die Projektion  $P_1(A)$  einer separablen, einer in sich kompakten, einer zusammenhängenden Menge  $A \subseteq E^{(1)} \times E^{(2)}$  separabel, bzw. in sich kompakt, bzw. zusammenhängend ist.

## § 24. Homöomorphe Abbildungen.

**1. Homöomorphe Abbildungen.** Die eindeutige stetige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  heißt homöomorph (oder eine Homöomorphie), wenn auch die inverse Abbildung  $P^{-1}$  von  $B$  auf  $A$  eindeutig und stetig ist. Ist  $P$  eine Homöomorphie, so auch  $P^{-1}$ , und umgekehrt. Aus 23-1-4 folgt: ist  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$  und  $Q$  eine homöomorphe Abbildung von  $B$  auf  $C$ , so ist  $P|Q$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $C$ . Gibt es eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so heißen  $A$  und  $B$  homöomorph<sup>1)</sup>; in Zeichen:  $A \approx B$ . Diese Relation zwischen zwei Punktmengen ist eine Gleichheitsrelation (§ 4, 1).

Aus dem Umstande, daß  $B$  ein-eindeutiges stetiges Bild von  $A$  (§ 23, 1) und  $A$  ein-eindeutiges stetiges Bild von  $B$  ist, folgt nicht, daß  $A$  und  $B$  homöomorph sind. Beispiel:  $A$  bestehe aus den Intervallen  $[-1, 1]$  und  $(2n, 2n+1]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ),  $B$  bestehe aus dem Intervalle  $[-1, 0]$ , den Intervallen  $(2n, 2n+1]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) und den Intervallen  $(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); dann ist  $B$  ein-eindeutiges stetiges Bild von  $A$  (man hat

<sup>1)</sup> Wir haben schon in § 9, 1 von homöomorphen topologischen Räumen gesprochen; daß die damalige Definition sich mit der jetzigen deckt, lehrt Satz 24-1-21.

nur  $[-1, 1]$  auf  $[-1, 0]$  abzubilden,  $(4n, 4n+1]$  auf  $(2n, 2n+1]$ , und  $(4n-2, 4n-1]$  auf  $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$ ; und  $A$  ist ein-eindeutiges stetiges Bild von  $B$  (man bilde  $[-1, 0]$  auf  $[-1, 0]$  ab,  $(2n, 2n+1]$  auf  $(2n, 2n+1]$ , und  $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$  auf  $\left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ ); hingegen sind  $A$  und  $B$  nicht homöomorph; denn eine Homöomorphie führt, wie wir gleich in 24-1-3 zeigen werden, die Komponenten von  $A$  und die Komponenten von  $B$  in einander über; nun gehören die Punkte  $\frac{1}{2n}$  zu verschiedenen Komponenten von  $B$  und es gilt  $\frac{1}{2n} \rightarrow 0$ ; es müßten ihnen also Punkte  $a_n$  entsprechen, die zu verschiedenen Komponenten von  $A$  gehören und gegen einen Punkt von  $A$  konvergieren; eine solche Folge  $((a_n))$  aber gibt es in  $A$  nicht.

**24-1-1.** Jede ein-eindeutige stetige Abbildung  $P$  einer in sich kompakten<sup>1)</sup> Menge  $A$  ist homöomorph.

Denn nach 23-3-3 ist  $P^{-1}$  oberhalb stetig, also, weil eindeutig, auch stetig nach 23-1-1.

**24-1-2.** Ist  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $A'$  offen (abgeschlossen) in  $A$ , so ist  $P(A')$  offen (abgeschlossen) in  $B$ .

Da  $P^{-1}$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $B$  auf  $A$  ist, folgt dies wegen  $(P^{-1})^{-1} = P$  aus 23-2-1 (bzw. 23-2-11).

**24-1-21.** Ist  $P$  eine ein-eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , die die in  $A$  offenen (abgeschlossenen) Mengen überführt in die in  $B$  offenen (abgeschlossenen) Mengen, so ist  $P$  homöomorph.

Dies folgt aus 23-2-1 (bzw. 23-2-11), angewendet auf  $P$  und auf  $P^{-1}$ .

**24-1-22.** Ist  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $A'$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $A$ , so ist  $P(A')$  ein  $G_\delta$  (ein  $F_\sigma$ ) in  $B$ .

Dies folgt aus 24-1-2 wegen § 2 (1-9) und 2-1-1.

Für homöomorphe Abbildungen verschärft sich 23-5-1 zu:

**24-1-3.** Ist  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $A'$  eine Komponente von  $A$ , so ist  $P(A')$  eine Komponente von  $B$ .

Sei  $a \in A$ ,  $b = P(a)$  und  $A_a$  die zu  $a$  gehörige Komponente (§ 16, 3) von  $A$ ,  $B_b$  die zu  $b$  gehörige Komponente von  $B$ . Da  $P(A_a)$  nach 23-5-1 zusammenhängend, ist  $P(A_a) \subseteq B_b$ . Ebenso aber ist  $P^{-1}(B_b) \subseteq A_a$ , also  $B_b = P(P^{-1}(B_b)) \subseteq P(A_a)$ , somit  $B_b = P(A_a)$ .

<sup>1)</sup> Dieser Zusatz kann, wie wir eben sahen, nicht entbehrt werden; z. B. ist jede ein-eindeutige Abbildung der Gitterpunkte des  $R_1$  auf die rationalen Punkte des  $R_1$  stetig; ihre Umkehrung aber ist in jedem Punkte unstetig.

**24-1-4.** Ist  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $A$  lokal-zusammenhängend im Punkte  $a \in A$ , so ist  $B$  lokal-zusammenhängend im Punkte  $b = P(a)$ .

Sei  $H$  offen in  $B$  und  $b \in H$ ; dann ist nach 23-2-1  $P^{-1}(H)$  offen in  $A$  und  $a \in P^{-1}(H)$ ; sei ferner  $L$  die zu  $b$  gehörige Komponente von  $H$  und  $K$  die zu  $a$  gehörige Komponente von  $P^{-1}(H)$ ; dann ist nach 24-1-3  $P(K) = L$ . Da  $A$  lokal-zusammenhängend in  $a$ , gibt es eine  $a$  enthaltende in  $A$  offene Menge  $G \subseteq K$ ; dann ist  $P(G) \subseteq P(K) = L$ ; da nach 24-1-2  $P(G)$  offen und  $b \in P(G)$ , ist  $B$  lokal-zusammenhängend in  $b$ .

**24-1-5.** Ist  $A \approx B$  und ist  $A$  in sich kompakt, so ist auch  $B$  in sich kompakt. Dies ist enthalten in 23-3-1.

Literatur: C. Kuratowski, Fund. math. 2 (1921) S. 158.

**2. Beispiele.** Offenbar ist jede offene Halbgerade  $x > a$  oder  $x < a$  des  $R_1$  homöomorph dem  $R_1$ , ebenso jedes offene Intervall  $(a, b)$ .

Sei  $A \subseteq R_1$ ; wir nennen den Punkt  $a \in R_1$  einen linksseitigen (rechtsseitigen) Häufungspunkt von  $A$ , wenn jedes Intervall  $(a - h, a)$  (bzw. jedes Intervall  $(a, a + h)$ ) einen Punkt (und mithin unendlich viele Punkte) von  $A$  enthält. Ist  $a$  sowohl rechtsseitiger als linksseitiger Häufungspunkt von  $A$ , so heißt  $a$  beiderseitiger Häufungspunkt von  $A$ . Ein Häufungspunkt von  $A$ , der nicht beiderseitiger Häufungspunkt ist, heißt einseitiger Häufungspunkt.

**24-2-1.** Ist  $A \subseteq R_1$ , so ist die Menge der einseitigen Häufungspunkte von  $A$  abzählbar.

Denn ist  $a$  einseitiger Häufungspunkt von  $A$ , so gibt es ein Intervall  $(a - h, a)$  oder ein Intervall  $(a, a + h)$ , das keinen Punkt von  $A$  enthält; und zwar können diese Intervalle ohne weiteres so gewählt werden, daß sie zu je zweien fremd sind. Da es nach 5-1-42 nur abzählbar viele fremde Intervalle gibt, folgt die Behauptung.

**24-2-11.** Jede Randmenge  $A \subset R_1$ , deren jeder Punkt beiderseitiger Häufungspunkt ist, und deren Komplement  $R_1 - A$  nur abzählbar viele Komponenten hat, ist homöomorph mit der Menge  $C$  aller irrationalen Punkte des  $R_1$ .

Nach 16-1-8 sind die Komponenten von  $R_1 - A$  abgeschlossene Halbgerade, abgeschlossene Intervalle oder einzelne Punkte; sei  $\mathfrak{R}$  die Menge aller Komponenten von  $R_1 - A$ , die nicht Halbgerade sind; wir denken sie uns geordnet gemäß ihrer Aufeinanderfolge im  $R_1$ ; da  $A$  Randmenge ist, gibt es in  $\mathfrak{R}$  kein erstes und kein letztes Element, und keine zwei Elemente von  $\mathfrak{R}$  folgen unmittelbar aufeinander, d. h.  $\mathfrak{R}$  ist dicht geordnet. Sei nun  $\mathfrak{M}$  die Menge, deren Elemente die Punkte von  $A$  und

die zu  $\mathfrak{R}$  gehörigen Komponenten von  $R_1 - A$  sind, geordnet gemäß ihrer Aufeinanderfolge im  $R_1$ . Dann hat  $\mathfrak{M}$  kein erstes und kein letztes Element, und da  $A$  eine Randmenge, also jeder Punkt von  $A$  Häufungspunkt von  $R_1 - A$  ist, ist  $\mathfrak{R}$  dicht geordnet in  $\mathfrak{M}$ ; da jedem Schnitt in  $\mathfrak{M}$  ein Schnitt im  $R_1$  entspricht, ist offenbar  $\mathfrak{M}$  stetig geordnet; nach 6-5.1 gibt es also eine ähnliche Abbildung von  $\mathfrak{M}$  auf den  $R_1$ , die  $\mathfrak{R}$  auf die Menge der rationalen Punkte, also  $A$  auf die Menge  $C$  der irrationalen Punkte des  $R_1$  abbildet. Sei  $P$  diese Abbildung von  $A$  auf  $C$ ; es ist nur mehr zu zeigen, daß  $P$  homöomorph ist, d. h. daß  $P$  und  $P^{-1}$  stetig sind; wir zeigen dies etwa für  $P^{-1}$  (der Beweis für  $P$  ist völlig analog). Sei also  $c \in C$ ,  $c_n \in C$ ,  $c_n \rightarrow c$ , und sei  $a = P^{-1}(c)$ ,  $a_n = P^{-1}(c_n)$ ; da  $a$  beiderseitiger Häufungspunkt von  $A$ , gibt es zu jedem  $\varrho > 0$  ein  $a' \in A$  und ein  $a'' \in A$ , so daß  $a - \varrho < a' < a < a'' < a + \varrho$ ; dann ist wegen der Ähnlichkeit der Abbildung  $P$ , und weil  $P(a) = c$  ist:  $P(a') < c < P(a'')$ , also  $P(a') < c_n < P(a'')$  für fast alle  $n$ ; daraus folgt, da auch  $P^{-1}$  ähnlich ist:  $a' < a_n < a''$ , also auch  $a - \varrho < a_n < a + \varrho$  für fast alle  $n$ ; aus  $c_n \rightarrow c$  folgt also  $a_n \rightarrow a$ , d. h.  $P^{-1}(c_n) \rightarrow P^{-1}(c)$ ; nach 28.1.21 ist also  $P^{-1}$  stetig.

In 24.2.11 ist enthalten:

**24.2.12.** Die Menge aller irrationalen Punkte eines Intervalles  $(a, b)$  (einer offenen Halbgeraden) ist homöomorph mit der Menge  $C$  aller irrationalen Punkte des  $R_1$ .

**24.2.2.** Der  $R_0$  ist homöomorph mit der Menge aller irrationalen Punkte des  $R_1$ .

Nach 24.2.12 genügt es, zu zeigen, daß der  $R_0$  homöomorph ist der Menge  $C'$  aller irrationalen Punkte von  $(0, 1)$ . Wir ordnen jedem Punkte  $a = ((k_n))$  des  $R_0$  (§ 9, 3) die irrationale Zahl  $c$  zu, deren Kettenbruchentwicklung lautet:  $c = \frac{1}{|k_1|} + \frac{1}{|k_2|} + \dots + \frac{1}{|k_\nu|} + \dots$ ; dadurch ist eine ein-eindeutige Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $C'$  gegeben. Ist  $a_n = ((k_{n\nu}))$ ,  $c_n = \frac{1}{|k_{n1}|} + \frac{1}{|k_{n2}|} + \dots$ , so gilt nach 17.3.7 im  $R_0$  dann und nur dann  $a_n \rightarrow a$ , wenn für jedes  $\nu$  gilt:  $k_{n\nu} = k_\nu$  für fast alle  $n$ ; das ist aber bekanntlich auch notwendig und hinreichend dafür, daß im  $R_1$  gelte  $c_n \rightarrow c$ ; aus  $a_n \rightarrow a$  folgt also  $c_n \rightarrow c$  und umgekehrt; nach 28.1.21 ist also sowohl  $P$  als  $P^{-1}$  stetig, d. h. die Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $C'$  ist homöomorph.

**24.2.21.** Jede unabzählbare, im  $R_0$  abgeschlossene Menge  $A$  ist darstellbar in der Form  $A = A' + A''$ ,  $A' A'' = A$ , wo  $A'$  homöomorph mit der Menge  $C$  aller irrationalen Punkte des  $R_1$  und  $A''$  abzählbar.

Da nach 24.1.2 eine homöomorphe Abbildung des  $R_0$  auf die Menge  $C$  der irrationalen Punkte des  $R_1$  jede im  $R_0$  abgeschlossene Menge



überführt in eine in  $C$  abgeschlossene Menge, können wir wegen 24-2-2 auch annehmen,  $A$  sei abgeschlossen in  $C$ . Nach § 13 (5-1) zerlegen wir:  $A = A_u + A_v$ ; nach 13-5-4 ist  $A_u$  abzählbar; nach 13-5-61 ist  $A_v$  perfekt in  $A$ , also nach 10-8-5 auch abgeschlossen in  $C$ . Wir bezeichnen mit  $A'$  die Menge aller  $a \in A_v$ , die beiderseitige Häufungspunkte von  $A_v$  sind; dann ist nach 24-2-1  $A_v - A'$  abzählbar; setzen wir noch  $A'' = (A_v - A') + A_u$ , so ist also auch  $A''$  abzählbar und  $A = A' + A''$ . Es bleibt zu zeigen, daß  $A'$  homöomorph mit  $C$ ; wir zeigen dies durch Berufung auf 24-2-11. Da  $A$  un-abzählbar,  $A''$  abzählbar, ist  $A' \supset A$ . Da  $A' \subseteq A_v \subseteq A \subseteq C$ , ist  $A'$  eine Randmenge. Sei  $a \in A'$ ; da  $a$  beiderseitiger Häufungspunkt von  $A_v$ , enthält jedes Intervall  $(a - h, a)$  und jedes Intervall  $(a, a + h)$  Punkte von  $A_v$ , und somit nach 13-5-6 un-abzählbar viele Punkte von  $A_v$ , also, weil  $A_v - A'$  abzählbar, auch un-abzählbar viele Punkte von  $A'$ , also ist jeder Punkt  $a \in A'$  beiderseitiger Häufungspunkt von  $A'$ . Nun ist nur mehr zu zeigen, daß das Komplement  $R_1 - A'$  nur abzählbar viele Komponenten hat. Da diese Komponenten nach 16-1-3 Halbgerade, Intervalle oder einzelne Punkte sind, und es nur abzählbar viele fremde Intervalle gibt, genügt es zu zeigen, daß  $R_1 - A'$  nur abzählbar viele einpunktige Komponenten hat; und da es nur abzählbar viele rationale Punkte gibt, genügt es zu zeigen: ist  $\{a\}$  eine Komponente von  $R_1 - A'$ , so ist  $a$  rational. Sei also  $\{a\}$  Komponente von  $R_1 - A'$ ; dann ist  $a$  beiderseitiger Häufungspunkt von  $A'$ , wegen  $A' \subseteq A_v$  also auch von  $A_v$ ; nach Definition von  $A'$  ist also  $a \sim \varepsilon (A_v - A')$ ; wegen  $a \in (R_1 - A')$  folgt also auch  $a \sim \varepsilon A_v$ ; und da  $a$  Häufungspunkt von  $A_v$  und  $A_v$  abgeschlossen in  $C$ , muß  $a \sim \varepsilon C$  sein, d. h.  $a$  ist ein rationaler Punkt, w. z. b. w.

**24-2-3.** *Je zwei dyadische Diskontinua  $A$  und  $B$  sind homöomorph.*

Nach § 18, 9 sind die Punkte von  $A$  und von  $B$  darstellbar in der Form  $a_{((k_r))}$ ,  $b_{((k_r))}$ , wo  $((k_r))$  alle dyadischen Folgen durchläuft und verschiedenen dyadischen Folgen verschiedene Punkte  $a_{((k_r))}$  bzw.  $b_{((k_r))}$  entsprechen. Ordnet man dem Punkte  $a_{((k_r))}$  den Punkt  $b_{((k_r))}$  zu, so ist das eine ein-eindeutige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , die — wie beim Beweise von 23-3-2 gezeigt wurde — stetig ist. Da  $A$  nach 18-8-2 in sich kompakt ist, ist diese Abbildung nach 24-1-1 homöomorph.

Wir nennen eine dyadische Folge  $((k_r))$ , in der fast alle  $k_r = 0$  sind, eine Nullfolge. Lassen wir aus dem dyadischen Diskontinuum  $B$  der Punkte  $b_{((k_r))}$  die abzählbar unendlich vielen Punkte weg, die durch Nullfolgen  $((k_r))$  geliefert werden, so nennen wir die übrigbleibende Menge ein reduziertes dyadisches Diskontinuum.

**24-2-4.** *Jedes reduzierte dyadische Diskontinuum  $B'$  ist eine Youngsche Menge.*

Denn da es nur abzählbar viele Nullfolgen gibt, ist  $B - B'$  abzählbar, also ein  $F_\sigma$ . Somit ist  $B' = B - (B - B')$  ein  $G_\delta$  in  $B$ , und da  $B$  als dyadisches Diskontinuum nach 18.8.21 vollständig ist, ist  $B'$  eine Youngsche Menge.

**24.2.41.** Jedes reduzierte dyadische Diskontinuum  $B'$  ist homöomorph dem  $R_0$ .

Sei  $b_{((k_v))} \in B'$ ; dann ist  $((k_v))$  keine Nullfolge; seien  $v_1 < v_2 < \dots < v_i < \dots$  die Indizes, für die  $k_v = 1$  ist; setzen wir  $n_1 = v_1$ ,  $n_2 = v_2 - v_1, \dots$ ,  $n_i = v_i - v_{i-1}, \dots$  so ist  $((n_i))$  eine Folge natürlicher Zahlen, also ein Punkt des  $R_0$ . Hierdurch ist eine ein-eindeutige Abbildung  $P$  von  $B'$  auf den  $R_0$  gegeben; wir haben zu zeigen, daß sie homöomorph ist. Seien  $b = b_{((k_v))}$ ,  $b_{m_1} = b_{((k_{m_v}))}$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) Punkte von  $B'$  und  $c = ((n_i))$ ,  $c_m = ((n_{m_i}))$  die zugeordneten Punkte des  $R_0$ ; dann ist nach 18.9.2  $b_m \rightarrow b$  gleichbedeutend mit: für jedes  $v$  gilt  $k_{m_v} = k_v$  für fast alle  $m$ ; dies aber ist gleichbedeutend mit: für jedes  $i$  gilt:  $n_{m_i} = n_i$  für fast alle  $i$ ; und dies ist gleichbedeutend mit: im  $R_0$  gilt  $c_m \rightarrow c$ . Aus  $b_m \rightarrow b$  folgt also  $c_m \rightarrow c$  und umgekehrt. Nach 23.1.21 sind also  $P$  und  $P^{-1}$  stetig, somit ist  $P$  homöomorph.

Literatur. Satz 24.2.21 stammt von St. Mazurkiewicz, Wektor 1918, S. 35.

**3. Erweiterung einer Homöomorphie.** Anknüpfend an § 22, 4 zeigen wir nun:

**24.3.1.** Sind  $X$  und  $Y$  vollständige Räume, und ist  $P$  eine homöomorphe Abbildung einer Menge  $A \subseteq X$  auf eine Menge  $B \subseteq Y$ , so kann  $P$  erweitert werden zu einer homöomorphen Abbildung einer Youngschen Menge  $A^\times$  auf eine Youngsche Menge  $B^\times$ , für die gilt:  $A \subseteq A^\times \subseteq A^0$ ,  $B \subseteq B^\times \subseteq B^0$ .

Nach 22.4.3 und 23.4.1 gibt es eine eindeutige stetige Erweiterung  $S$  von  $P$  auf die Menge  $\bar{A}$  aller Konvergenzpunkte von  $P$ ; und ebenso gibt es eine eindeutige stetige Erweiterung  $T$  von  $P^{-1}$  auf die Menge  $\bar{B}$  aller Konvergenzpunkte von  $P^{-1}$ . Wir zeigen: ist  $a \in \bar{A}$  und  $b = S(a) \in \bar{B}$ , so ist  $T(b) = a$ . Da  $\bar{A} \subseteq A^0$ , gibt es eine Folge von Punkten  $a_n \in A$  mit  $a_n \rightarrow a$ ; dann ist, weil  $S$  eine stetige Erweiterung von  $P$  ist:  $b = S(a) = \lim_n S(a_n) = \lim_n P(a_n)$ , also wenn  $P(a_n) = b_n$  gesetzt wird:  $b_n \rightarrow b$ , wo  $b_n \in B$ ; weil  $T$  eine stetige Erweiterung von  $P^{-1}$ , folgt daraus:  $T(b) = \lim_n T(b_n) = \lim_n P^{-1}(b_n) = \lim_n a_n = a$ , wie behauptet. Ebenso sieht man: ist  $b \in \bar{B}$  und  $a = T(b) \in \bar{A}$ , so ist  $S(a) = b$ . Bezeichnen wir also mit  $A^\times$  die Menge aller  $a \in \bar{A}$ , für die  $S(a) \in \bar{B}$  gilt, und mit  $B^\times$  die Menge aller  $b \in \bar{B}$ , für die  $T(b) \in \bar{A}$  gilt, so sind die Teilabbildungen (§ 22, 3)  $A^\times \rightarrow B^\times$  und  $B^\times \rightarrow A^\times$  zu einander invers, und

da sie eindeutig und stetig sind, liefern sie eine Homöomorphie zwischen  $A^\times$  und  $B^\times$ ; dabei ist  $A \subseteq A^\times \subseteq \bar{A} \subseteq A^0$ ,  $B \subseteq B^\times \subseteq \bar{B} \subseteq B^0$ . Es bleibt noch zu zeigen, daß  $A^\times$  und  $B^\times$  Youngsche Mengen sind. Nun ist nach Definition:  $A^\times = S^{-1}(S(\bar{A})\bar{B})$ ; nach 22.4.1 ist  $\bar{B}$  ein  $G_\delta$  in  $Y$ , also  $S(\bar{A})\bar{B}$  ein  $G_\delta$  in  $S(\bar{A})$ , also ist nach 23.2.12  $A^\times$  ein  $G_\delta$  in  $\bar{A}$ , und da nach 22.4.1  $\bar{A}$  ein  $G_\delta$  in  $X$  ist, so ist nach 10.9.2 auch  $A^\times$  ein  $G_\delta$  in  $X$ , also, weil  $X$  vollständig, eine Youngsche Menge. Ebenso verläuft der Beweis für  $B^\times$ .

Behalten wir Voraussetzungen und Bezeichnungsweise von 24.3.1 bei, so gilt:

**24.3.2.** *Gibt es eine homöomorphe Erweiterung  $Q$  der Abbildung  $P$  auf die Menge  $C \subseteq A^0$ , so ist  $C \subseteq A^\times$ ,  $Q(C) \subseteq B^\times$ .*

Denn nach 22.4.31, angewendet auf  $Q$  und  $Q^{-1}$ , muß  $C \subseteq \bar{A}$ ,  $Q(C) \subseteq \bar{B}$  sein; nach Definition von  $A^\times$  folgt aus der zweiten Beziehung  $C \subseteq A^\times$ , und daraus  $Q(C) \subseteq B^\times$ .

Literatur: M. Lavrentieff, Fund. math. 6 (1924) S. 149. F. Hausdorff, Fund. math. 16 (1930) S. 353. Vgl. auch A. Lindenbaum, Fund. math. 8 (1926) S. 215.

4. Youngsche Mengen. Aus 24.3.1 können wir nun leicht folgern:

**24.4.1.** *Jede mit einer Youngschen Menge  $A$  homöomorphe Menge  $B$  ist eine Youngsche Menge.*

Als Youngsche Menge ist  $A$  ein  $G_\delta$  in einem vollständigen Raume  $X$ . Sei  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ ; nach 18.4.6 gibt es einen vollständigen Raum  $Y \supseteq B$ . Nach 24.3.1 erweitern wir  $P$  zu einer homöomorphen Abbildung  $Q$  von  $A^\times$  auf  $B^\times$ . Als Youngsche Menge ist  $A$  auch ein  $G_\delta$  in  $A^\times$ , somit ist nach 24.1.22  $B$  ein  $G_\delta$  in  $B^\times$ , und da  $B^\times$  nach 24.3.1 eine Youngsche Menge ist, so ist nach 19.1.2 auch  $B$  eine Youngsche Menge.

Wir werden nun zeigen, daß jede Youngsche Menge einer vollständigen Menge homöomorph ist. Wir führen zunächst eine Hilfsbetrachtung durch.

Sei  $A$  eine Youngsche Menge, d. h. ein  $G_\delta$  in einem vollständigen Raume  $X$ , also  $A = \bigcap_n G_n$ , wo  $G_n$  offen in  $X$ . Setzen wir  $F_n = X - G_n$ , so ist  $F_n$  abgeschlossen in  $X$ , und wenn  $A$  nicht vollständig, also  $A \subset X$ , können wir annehmen:  $F_n \supset A$  für alle  $n$ . Wir setzen für alle  $x \in X$ ,  $x' \in X$ :

$$(4) \quad \varrho_n(x, x') = \frac{1}{n} \frac{xx'}{xx' + xF_n + x'F_n} \text{ für } x \neq x', \quad \varrho_n(x, x) = 0;$$

dann ist:

$$(4.1) \quad 0 \leq \varrho_n(x, x') \leq \frac{1}{n}.$$

Ist  $x \in F_n$ ,  $x' \sim \varepsilon F_n$ , so ist in (4):  $x F_n = 0$ ,  $x' F_n \leq x x'$ , also:

$$(4.11) \quad \varrho_n(x, x') \geq \frac{1}{2n} \text{ für } x \in F_n, x' \sim \varepsilon F_n.$$

Wir setzen noch:

$$(4.2) \quad r_n(x, x') = \max(x x', \varrho_n(x, x')), \quad r(x, x') = \sup_n r_n(x, x').$$

**24.4.2.** Ist  $a \in A$ ,  $a, \varepsilon X$ , so sind die Aussagen:  $a, a \rightarrow 0$  und  $r(a, a) \rightarrow 0$  äquivalent.

Da nach (4.2)  $a, a \leq r(a, a)$  ist, so folgt aus  $r(a, a) \rightarrow 0$  auch  $a, a \rightarrow 0$ . Sei umgekehrt  $a, a \rightarrow 0$ ; dann ist nach 17.3.31:  $\lim_v a, F_n = a F_n$ ; da  $a \in A$ , also  $a \sim \varepsilon F_n$  und  $F_n$  abgeschlossen, ist hierin  $a F_n > 0$ ; nach (4) gilt also  $\lim_v \varrho_n(a, a) = 0$ ; somit gibt es zu jedem  $n^*$  ein  $v^*$ , so daß  $\varrho_n(a, a) \leq \frac{1}{n^*}$  für  $n = 1, 2, \dots, n^*$  und  $v \geq v^*$ , und wegen  $a, a \rightarrow 0$  kann  $v^*$  auch so gewählt werden, daß  $a, a \leq \frac{1}{n^*}$  für  $v \geq v^*$ ; da nach (4.1)  $\varrho_n(a, a) < \frac{1}{n^*}$  für  $n > n^*$  und alle  $v$ , ist also zufolge (4.2):  $r(a, a) \leq \frac{1}{n^*}$  für  $v \geq v^*$ ; d. h. es gilt:  $r(a, a) \rightarrow 0$ .

Da nach § 9 (4.1):  $x' F_n \leq x x' + x F_n$ ,  $x' F_n \leq x' x'' + x'' F_n$ , so folgt aus (4):

$$\begin{aligned} \varrho_n(x, x') + \varrho_n(x', x'') &\geq \frac{1}{n} \frac{x x' + x' x''}{x x' + x' x'' + x F_n + x'' F_n} \\ &\geq \frac{1}{n} \frac{x x''}{x x'' + x F_n + x'' F_n} = \varrho_n(x, x''); \end{aligned}$$

es genügt also  $\varrho_n(x, x')$  den metrischen Axiomen  $1_m$ ,  $2_m$ ) (§ 9, 2). Dasselbe gilt dann nach (4.2) auch von  $r_n(x, x')$  und von  $r(x, x')$ . Betrachten wir also  $r(x, x')$  an Stelle von  $x x'$  als die Entfernung der Punkte  $x \in A$ ,  $x' \in A$ , so entsteht ein neuer metrischer Raum  $\hat{A}$ .

**24.4.21.** Der Raum  $\hat{A}$  ist homöomorph mit  $A$ .

Indem wir jedem Punkte  $a \in A$  eben diesen Punkt  $a \in \hat{A}$  zuordnen, erhalten wir eine ein-eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $\hat{A}$ , und aus 24.4.2 folgt nach 23.1.21 sofort, daß sowohl  $P$  als  $P^{-1}$  stetig ist; also ist  $P$  eine Homöomorphie.

**24.4.22.** Der Raum  $\hat{A}$  ist vollständig.

Sei  $((a_v))$  eine Cauchysche Folge in  $\hat{A}$ ; wir haben zu zeigen: es gibt einen Punkt  $a \in \hat{A}$  (oder was dasselbe heißt:  $a \in A$ ), so daß  $r(a, a) \rightarrow 0$ . Da nach (4.2)  $x x' \leq r(x, x')$ , ist  $((a_v))$  auch eine Cauchysche Folge in  $A \subseteq X$ ; da  $X$  vollständig, gibt es ein  $a \in X$ , so daß  $a_v \rightarrow a$ . Wir zeigen:  $a \in A$ . Wäre  $a \sim \varepsilon A$ ,

so gäbe es ein  $n$ , so daß  $a \in F_n$ ; dann wäre nach (4.11):  $\varrho_n(a_v, a) \geq \frac{1}{2n}$  für alle  $v$ ; da nach 17.3.31:  $\lim_{\mu} a_v a_{\mu} = a_v a$ ,  $\lim_{\mu} a_{\mu} F_n = a F_n$ , folgt aus (4):  $\lim_{\mu} \varrho_n(a_v, a_{\mu}) = \varrho_n(a_v, a)$ ; wegen  $\varrho_n(a_v, a) \geq \frac{1}{2n}$  wäre also bei gegebenem  $v$ :  $\varrho_n(a_v, a_{\mu}) > \frac{1}{3n}$  für fast alle  $\mu$ , also wegen (4.2) auch  $r(a_v, a_{\mu}) > \frac{1}{3n}$  für fast alle  $\mu$ , entgegen der Annahme,  $((a_v))$  sei eine Cauchysche Folge in  $\hat{A}$ ; somit ist  $a \in A$ , wie behauptet. — Da nun  $a \in A$ ,  $a_v \rightarrow a$ , also auch  $a_v a \rightarrow 0$ , folgt aus 24.4.2:  $r(a_v, a) \rightarrow 0$ , w. z. b. w. Aus 24.4.21 und 24.4.22 folgt nun:

**24.4.3.** Jede Youngsche Menge  $A$  ist homöomorph einer vollständigen Menge.

Z. B. ist ein offenes Intervall  $(a, b)$  nicht vollständig, aber homöomorph dem vollständigen  $R_1$ ; die Menge aller irrationalen Punkte des  $R_1$  ist nicht vollständig, aber nach 24.2.2 homöomorph dem (nach 18.2.22 vollständigen)  $R_0$ .

Von 24.4.3 gilt folgende Umkehrung:

**24.4.31.** Ist die Menge  $A$  eines metrischen Raumes  $E$  homöomorph einer vollständigen Menge  $B$ , so ist  $A$  ein  $G_{\delta}$  in  $E$ .

Als vollständige Menge ist  $B$  eine Youngsche Menge (§ 19, 1), also ist nach 24.4.1 auch  $A$  eine Youngsche Menge, d. h. ein absolutes  $G_{\delta}$ , also ist  $A$  auch ein  $G_{\delta}$  in  $E$ .

Literatur: St. Mazurkiewicz, Bull. Crac. 1916 S. 490. P. Alexandroff, C. R. 178 (1924) S. 185. F. Hausdorff, Fund. math. 6 (1924) S. 146. W. Sierpiński, Fund. math. 11 (1928) S. 203; Fund. math. 16 (1930) S. 173.

## § 25. Stetige Funktionen.

1. Die unendlichen Zahlen  $+\infty$ ,  $-\infty$ . Wir fügen zur Menge aller reellen Zahlen noch die beiden Elemente  $+\infty$ ,  $-\infty$  hinzu, die wir als unendliche Zahlen bezeichnen (im Gegensatz zu dazu heißen dann die reellen Zahlen endliche Zahlen), und setzen für sie folgende Rechenregeln fest (in denen  $a$  eine endliche Zahl bedeutet):

$$\begin{aligned} -\infty &< +\infty; & -\infty &< a, & a &< +\infty; \\ -(+\infty) &= -\infty, & -(-\infty) &= +\infty; \\ |+\infty| &= +\infty, & |-\infty| &= +\infty. \end{aligned}$$

Die Addition sei kommutativ, und es sei:

$$\begin{aligned} a + (+\infty) &= a + \infty = +\infty; & a + (-\infty) &= a - \infty = -\infty; \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty + \infty = +\infty; & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty - \infty = -\infty; \end{aligned}$$

hingegen gelte  $(+\infty) + (-\infty)$  und  $(-\infty) + (+\infty)$  als sinnlos. Die Sub-

traktion wird auf die Addition zurückgeführt durch die Festsetzung: die (endliche oder unendliche) Zahl  $b$  subtrahieren, heißt  $-b$  addieren. Die Multiplikation sei kommutativ, und es sei für  $a > 0$ :

$$a(+\infty) = (-a)(-\infty) = (+\infty)(+\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty;$$

$$(-a)(+\infty) = a(-\infty) = (+\infty)(-\infty) = -\infty;$$

die Ausdrücke  $0(+\infty)$ ,  $(+\infty)0$ ,  $0(-\infty)$ ,  $(-\infty)0$  gelten als sinnlos. Ferner setzen wir  $\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$  und erklären die Division durch die (endliche

oder unendliche) Zahl  $b$  als Multiplikation mit  $\frac{1}{b}$ ; Quotienten mit dem Nenner 0 sowie die Ausdrücke  $\frac{+\infty}{+\infty}$ ,  $\frac{+\infty}{-\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{+\infty}$ ,  $\frac{-\infty}{-\infty}$  gelten als sinnlos.

## 2. Die Schränkungstransformation. Setzen wir:

$$(2) \quad S(a) = \frac{a}{1+|a|} \text{ für } -\infty < a < +\infty; \quad S(+\infty) = 1, \quad S(-\infty) = -1,$$

so haben wir eine ein-eindeutige Abbildung der Menge aller (endlichen und unendlichen) reellen Zahlen auf das Intervall  $[-1, 1]$ , die wir als Schränkungs-transformation bezeichnen; ihre Umkehrung (die inverse Schränkungs-transformation) ist gegeben durch:

$$(2.1) \quad S^{-1}(b) = \frac{b}{1-|b|} \text{ für } -1 < b < 1, \quad S^{-1}(1) = +\infty, \quad S^{-1}(-1) = -\infty.$$

Die Schränkungstransformation (und somit auch ihre Inverse) ist stets wachsend, d. h.:

$$S(a') < S(a), \text{ wenn } a' < a; \quad S^{-1}(b') < S^{-1}(b), \text{ wenn } b' < b.$$

3. Der Raum  $\bar{R}_1$ . Wir machen nun die Menge aller reellen Zahlen, einschließlich der beiden unendlichen Zahlen  $+\infty$ ,  $-\infty$ , zu einem metrischen Raum  $\bar{R}_1$ , indem wir als Abstand der Zahlen  $a, b$  den Ausdruck definieren:

$$(3) \quad \|a - b\| = \|b - a\| = |S(b) - S(a)|,$$

wo  $S$  die Schränkungstransformation (2) bedeutet; die metrischen Axiome  $1_m$ ,  $2_m$  (§ 9, 2) sind dann offenbar erfüllt. Insbesondere gilt die Dreiecksungleichung:

$$(3.0) \quad \|a - b\| + \|b - c\| \geq \|a - c\|.$$

Es gilt, wenn  $a \neq b$ :

$$(3.1) \quad \|a - b\| < |a - b|.$$

Aus 17.3.32 entnehmen wir: Sind  $((a_n))$ ,  $((b_n))$  Punktfolgen des  $\bar{R}_1$  mit  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ , so gilt:

$$(3.2) \quad \lim_n \|a_n - b_n\| = \|a - b\|.$$

Wie aus (3) hervorgeht, ist der  $\bar{R}_1$  isometrisch (also auch homöomorph) mit dem Intervalle  $[-1, 1]$  des  $R_1$ . Daraus folgt:

**25.3.1.** *Der  $\bar{R}_1$  ist separabel, in sich kompakt, zusammenhängend und vollständig.*

Da im  $R_1$  der Abstand der Punkte  $a, b$  gegeben ist durch  $|a - b|$ , im  $\bar{R}_1$  durch  $\|a - b\|$ , so ist, wenn  $a, a_n$  endliche Zahlen bedeuten, die Aussage  $a_n \rightarrow a$ , gedeutet im  $R_1$ , gleichbedeutend mit  $|a_n - a| \rightarrow 0$ , hingegen, gedeutet im  $\bar{R}_1$ , gleichbedeutend mit  $\|a_n - a\| \rightarrow 0$ ; da aber  $\|a_n - a\| = |S(a_n) - S(a)|$ , und da die Aussagen  $|a_n - a| \rightarrow 0$  und  $|S(a_n) - S(a)| \rightarrow 0$  offenbar äquivalent sind, so hat (wenn  $a, a_n$  endliche Zahlen sind), die Aussage  $a_n \rightarrow a$  im  $R_1$  und im  $\bar{R}_1$  dieselbe Bedeutung. Aus 23.1.21 entnehmen wir also:

**25.3.2.** *Ordnen wir jedem Punkte  $a \in R_1$  eben diesen Punkt  $a \in \bar{R}_1$  zu, so ist dies eine homöomorphe Abbildung des  $R_1$  auf die Menge  $\bar{R}_1 - \{+\infty, -\infty\}$ .*

Wie aus der Definition des  $\bar{R}_1$  unmittelbar hervorgeht, haben im  $\bar{R}_1$  die Aussagen  $a_n \rightarrow +\infty$  (bzw.  $a_n \rightarrow -\infty$ ) die bekannte Bedeutung: ist  $z$  eine beliebige endliche Zahl, so gilt  $a_n > z$  (bzw.  $a_n < z$ ) für fast alle  $n$ .

**25.3.3.** *Ist  $[a, b]$  ein Intervall des  $R_1$ , so gibt es zu jedem  $\sigma > 0$  ein  $\varrho > 0$ , so daß aus  $z' \in [a, b]$ ,  $z'' \in [a, b]$ ,  $\|z' - z''\| < \varrho$  folgt:  $|z' - z''| < \sigma$ .*

Fassen wir das Intervall  $[a, b]$  einmal als Punktmenge  $A \subseteq \bar{R}_1$ , dann als Punktmenge  $B \subseteq R_1$  auf, und ordnen jedem Punkte  $x \in A$  eben diesen Punkt  $x \in B$  zu, so ist dies nach 25.3.2 eine stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , die nach 22.2.2 auch gleichmäßig stetig ist. Daraus folgt die Behauptung (vgl. § 23, 4).

Ist  $A \subseteq \bar{R}_1$ , so gibt es unter allen  $z \in \bar{R}_1$ , die  $\geq x$  (bzw.  $\leq x$ ) sind für alle  $x \in A$ , ein kleinstes (bzw. größtes); es heißt: das Supremum (bzw. das Infimum) von  $A$  und wird bezeichnet mit  $\sup_{x \in A} x$  (bzw.  $\inf_{x \in A} x$ ).

Ebenso: ist  $((a_n))$  eine Folge aus  $\bar{R}_1$ , so gibt es unter den  $z \in \bar{R}_1$ , die  $\geq a_n$  (bzw.  $\leq a_n$ ) sind für alle  $n$ , ein kleinstes (bzw. größtes); es wird bezeichnet mit  $\sup_n a_n$  (bzw.  $\inf_n a_n$ ). Ist  $b_n = \sup_{\nu} a_{n+\nu}$ ,  $c_n = \inf_{\nu} a_{n+\nu}$ , so

definieren wir:  $\lim_n a_n = \inf_n b_n$ ,  $\lim_n a_n = \sup_n c_n$ . Damit für eine Punktfolge  $((a_n))$  im  $\bar{R}_1$  gelte:  $\lim_n a_n = a$ , ist dann notwendig und hinreichend, daß  $\lim_n a_n = \lim_n a_n = a$  sei.

**25-3-4.** Ist  $A \supset A$  abgeschlossen im  $\bar{R}_1$  und  $a' = \sup_{x \in A} x$ ,  $a'' = \inf_{x \in A} x$ , so ist  $a' \in A$ ,  $a'' \in A$ .

Denn es gibt in  $A$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $a_n \rightarrow a'$ ; nach 17-3-6 ist also  $a' \in A^0$ , und weil  $A$  abgeschlossen, ist  $A^0 = A$ .

Ist  $a \in \bar{R}_1$ ,  $b \in \bar{R}_1$  und  $a < b$ , so bezeichnen wir auch die Intervalle  $a \leq x \leq b$ ,  $a < x < b$ ,  $a \leq x < b$ ,  $a < x \leq b$  mit  $[a, b]$ ,  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ . Aus 16-1-3 folgt dann:

**25-3-5.** Die einzigen zusammenhängenden Mengen des  $\bar{R}_1$  sind:  $A$ , die Mengen  $\{a\}$ , die Intervalle  $(a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b)$ ,  $[a, b]$  des  $\bar{R}_1$ .

**4. Reelle Funktionen.** Nach § 1, 5 liefert jede eindeutige Abbildung der Menge  $A$  auf eine Menge  $B$  eine Funktion  $f$ , die jedem Elemente  $a \in A$  ein Element  $f(a) \in B$  zuordnet; die Menge  $A$  heißt der Bereich dieser Funktion, und  $f$  heißt eine Funktion auf  $A$  oder in  $A$ . Ist  $B \subseteq \bar{R}_1$ , d. h. ist jeder Funktionswert  $f(a)$  eine (endliche oder unendliche) reelle Zahl, so heißt  $f$  eine reelle Funktion; wo wir weiterhin von einer Funktion schlechtweg sprechen, meinen wir stets eine reelle Funktion. Eine Funktion, die jedem  $a \in A$  dieselbe reelle Zahl zuordnet, nennen wir eine Konstante. Wir beschäftigen uns zunächst nur mit Funktionen, deren Bereich Punktmenge eines metrischen Raumes ist (Punktfunktionen).

Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $C \subseteq A$ , so bezeichnen wir (vgl. § 22, 3) als die auf  $C$  eingeschränkte Teilfunktion  $C \upharpoonright f$  diejenige Funktion auf  $C$ , die jedem  $a \in C$  den Funktionswert  $f(a)$  zuordnet; der Bereich von  $C \upharpoonright f$  ist  $C$ .

Die Funktion  $f$  auf  $A$  heißt endlich, wenn für jedes  $a \in A$  der Funktionswert  $f(a)$  eine endliche Zahl ist.

Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so heißen die Zahlen  $\sup_{x \in A} f(x)$ ,  $\inf_{x \in A} f(x)$  das Supremum, bzw. das Infimum von  $f$ . Ist das Supremum (bzw. das Infimum) von  $f$  endlich, so heißt  $f$  nach oben (bzw. nach unten) beschränkt; ist  $f$  sowohl nach oben als nach unten beschränkt, so heißt  $f$  beschränkt. Natürlich kann  $f$  endlich sein, ohne beschränkt zu sein; Beispiel: sei  $A$  die Menge aller  $a \neq 0$  des  $R_1$  und  $f(a) = \frac{1}{a}$ .

Wenden wir auf eine Funktion  $f$  die Schränkungstransformation an (§ 25, 2), d. h. ersetzen wir jeden Funktionswert  $f(a)$  durch  $S(f(a))$ , so entsteht eine beschränkte Funktion  $S(f)$ .

Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , und gibt es ein  $a \in A$ , so daß  $f(a) = \sup_{x \in A} f(x)$  (bzw.  $f(a) = \inf_{x \in A} f(x)$ ), so sagt man: der Funktionswert  $f(a)$  ist absolutes



**Maximum** (bzw. **Minimum**) von  $f$ ; dann ist  $f(x) \leq f(a)$  (bzw.  $\geq f(a)$ ) für alle  $x \in A$ . Ist  $f(x) < f(a)$  bzw.  $f(x) > f(a)$  für alle  $x \in A - \{a\}$ , so sagt man, der Funktionswert  $f(a)$  ist ein **eigentliches absolutes Maximum** (bzw. **Minimum**) von  $f$ . Gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $f(x) \leq f(a)$  (bzw.  $\geq f(a)$ ) für alle  $x \in A \cap U_a$ , so sagt man: der Funktionswert  $f(a)$  ist ein **Maximum** (bzw. **Minimum**) von  $f$ ; gibt es obendrein eine reduzierte Umgebung  $U'_a$  (§ 9, 1), so daß  $f(x) < f(a)$  (bzw.  $f(x) > f(a)$ ) für alle  $x \in A \cap U'_a$ , so sagt man: der Funktionswert  $f(a)$  ist ein **eigentliches Maximum** (bzw. **Minimum**) von  $f$ .

**25.4.1.** Ist  $f$  eine Funktion auf der separablen Menge  $A$ , so gibt es nur abzählbar viele Punkte  $a \in A$ , in denen  $f(a)$  ein eigentliches Maximum oder Minimum von  $f$  ist.

Sei  $K_{a, \frac{1}{n}}$  die Kugel (§ 9, 2) vom Mittelpunkt  $a$  und Radius  $\frac{1}{n}$ , und sei  $A_n$  die Menge aller  $a \in A$ , für die  $K_{a, \frac{1}{n}}$  in  $A$  ein eigentliches absolutes Maximum hat; für je zwei verschiedene Punkte  $a, a'$  von  $A_n$  gilt dann:  $|a - a'| \geq \frac{1}{n}$ , die Punkte von  $A_n$  bilden also einen isolierten Teil von  $A$ , mithin ist  $A_n$  abzählbar nach 13.5.91. Da die Menge  $A'$  aller Punkte von  $A$ , in denen  $f$  ein eigentliches Maximum hat,  $= \bigcup_n A_n$  ist, ist auch  $A'$  abzählbar. Ebenso sieht man, daß die Menge aller Punkte von  $A$ , in denen  $f$  ein eigentliches Minimum hat, abzählbar ist.

**5. Grenzwert.** Sei  $f$  eine Funktion auf  $A$ , sei  $a \in A^1$ , und  $b \in \bar{R}_1$ ; wir sagen:  $f$  hat in  $a$  den Grenzwert  $b$ , in Zeichen:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  (oder  $f(x) \rightarrow b$  für  $x \rightarrow a$ ), wenn es zu jedem  $\delta > 0$  eine reduzierte Umgebung  $U'_a$  (§ 9, 1) gibt, so daß  $|f(x) - b| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ .

**25.5.1.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ ,  $a \in A^1$  und  $b \in R_1$ , so ist, damit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  gelte, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\eta > 0$  eine reduzierte Umgebung  $U'_a$  gebe, so daß  $|f(x) - b| < \eta$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ .

Notwendig: Nach 25.3.3 gibt es zu jedem  $\eta > 0$  ein  $\delta > 0$ , so daß aus  $|f(x) - b| < \delta$  folgt:  $|f(x) - b| < \eta$ ; und nach Annahme gibt es ein  $U'_a$ , so daß aus  $x \in A \cap U'_a$  folgt  $|f(x) - b| < \delta$ . Hinreichend: Dies folgt aus § 25 (3.1).

**25.5.2.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so ist, damit  $f$  im Punkte  $a \in A^1$  einen Grenzwert habe, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  eine Umgebung  $U'_a$  gebe, so daß  $|f(x) - f(x')| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ ,  $x' \in A \cap U'_a$ .

Notwendig: Ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , so gibt es ein  $U'_a$ , so daß  $\|f(x) - b\| < \frac{\delta}{2}$   
 $\|f(x') - b\| < \frac{\delta}{2}$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ ,  $x' \in A \cap U'_a$ ; wegen der Dreiecksungleichung § 25 (3.0) ist dann aber  $\|f(x) - f(x')\| < \delta$ . Hinreichend: Ist die Bedingung erfüllt, und ist  $(a_n)$  eine Folge aus  $A - \{a\}$  mit  $a_n \rightarrow a$ , so ist  $(f(a_n))$  eine Cauchysche Folge im  $\bar{R}_1$ ; da der  $\bar{R}_1$  nach 25.3.1 vollständig, gibt es also ein  $b \in \bar{R}_1$ , so daß  $f(a_n) \rightarrow b$ . Nach Annahme gibt es ein  $U'_a$ , so daß  $\|f(x) - f(x')\| < \frac{\delta}{2}$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ ,  $x' \in A \cap U'_a$ ; wegen  $a_n \rightarrow a$ ,  $f(a_n) \rightarrow b$  gibt es ein  $n^*$ , so daß  $a_{n^*} \in U'_a$  und  $\|f(a_{n^*}) - b\| < \frac{\delta}{2}$ ; für alle  $x \in A \cap U'_a$  gilt dann:  $\|f(x) - b\| \leq \|f(x) - f(a_{n^*})\| + \|f(a_{n^*}) - b\| < \delta$ ; damit ist die Behauptung bewiesen.

**25.5.21.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $a \in A^1$ , so ist, damit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  gelte, notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $(a_n)$  aus  $A - \{a\}$  mit  $a_n \rightarrow a$  gelte:  $f(a_n) \rightarrow b$ .

Notwendig: Sei  $\delta > 0$ ; nach Annahme gibt es ein  $U'_a$ , so daß  $\|f(x) - b\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ ; da  $a_n \in A - \{a\}$  und  $a_n \rightarrow a$ , ist  $a_n \in A \cap U'_a$  für fast alle  $n$ , also  $\|f(a_n) - b\| < \delta$  für fast alle  $n$ , d. h.  $f(a_n) \rightarrow b$ . Hinreichend: Gilt nicht  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , so gibt es ein  $\delta > 0$ , so daß in jedem  $U'_a$  ein  $x \in A \cap U'_a$  mit  $\|f(x) - b\| \geq \delta$  vorkommt; insbesondere gibt es also ein  $a_n \in A \cap K_{\frac{1}{n}}^1$ , so daß  $\|f(a_n) - b\| \geq \delta$ ; dann ist  $a_n \in A - \{a\}$ ,  $a_n \rightarrow a$ , aber nicht  $f(a_n) \rightarrow b$ .

**25.5.3.** Sind  $f(x), g(x)$  Funktionen auf  $A$ , ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , und ist  $b + c$  (bzw.  $b - c, b \cdot c, \frac{b}{c}$ ) nicht sinnlos, so gibt es ein  $U'_a$ , so daß  $f(x) + g(x)$  (bzw.  $f(x) - g(x), f(x)g(x), \frac{f(x)}{g(x)}$ ) für kein  $x \in A \cap U'_a$  sinnlos ist.

Wir führen den Beweis für  $f + g$ . Die Behauptung ist sicher richtig, wenn  $b, c$  endlich sind, denn dann gibt es ein  $U'_a$ , so daß  $f(x)$  und  $g(x)$  endlich sind für alle  $x \in A \cap U'_a$ . Sei etwa  $b = +\infty$ ; dann ist  $c \neq -\infty$ ; es gibt dann ein  $U'_a$ , so daß  $f(x) \neq -\infty, g(x) \neq -\infty$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ ; dann aber ist  $f(x) + g(x)$  für kein  $x \in A \cap U'_a$  sinnlos.

In bekannter Weise beweist man nun die Sätze:

**25.5.4.** Gilt  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , so auch  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |b|$ .

**25.5.41.** Sind  $f(x)$ ,  $g(x)$  Funktionen auf  $A$ , und ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , so ist  $\lim_{x \rightarrow a} \max(f(x), g(x)) = \max(b, c)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \min(f(x), g(x)) = \min(b, c)$ .

**25.5.42.** Sind  $f(x)$ ,  $g(x)$  Funktionen auf  $A$ , ist  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$  und ist  $b + c$  (bzw.  $b - c$ ,  $bc$ ,  $\frac{b}{c}$ ) nicht sinnlos, so ist  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x)) = b - c$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = bc$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$ ).

**6. Stetigkeit in einem Punkte.** Die reelle Funktion  $f$  auf  $A$  heißt stetig im Punkte  $a \in A$ , wenn die Abbildung, die jedem Punkte  $x \in A$  die Zahl  $f(x)$  zuordnet, stetig ist im Punkte  $a$ ; anderenfalls heißt sie unstetig in  $a$ . In einem isolierten Punkte ihres Bereiches ist jede Funktion stetig. Ist  $f$  stetig im Punkte  $a$ , so heißt  $a$  ein Stetigkeitspunkt, anderenfalls ein Unstetigkeitspunkt von  $f$ .

Sei  $f$  eine Funktion auf  $A$ , sei  $C \subseteq A$  und  $a \in C$ ; ist dann  $f$  stetig im Punkte  $a$ , so ist auch die Teilfunktion  $C \upharpoonright f$  stetig im Punkte  $a$ ; umgekehrt kann natürlich  $C \upharpoonright f$  stetig sein in  $a$ , ohne daß  $f$  stetig in  $a$  wäre; ist  $C \upharpoonright f$  stetig in  $a$ , so sagt man auch:  $f$  ist stetig auf  $C$  im Punkte  $a$ .

**25.6.1.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $a \in A$ , so ist, damit  $f$  stetig sei in  $a$ , notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  gelte:  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ .

Dies folgt aus 23.1.21.

**25.6.2.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $a \in A_h$ , so ist, damit  $f$  stetig sei in  $a$ , notwendig und hinreichend, daß  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  sei.

Dies folgt, da nach § 12 (2.1)  $A_h \subseteq A^1$ , aus 25.6.1 und 25.5.21.

**25.6.21.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $a \in A$ , so ist, damit  $f$  stetig sei in  $a$ , notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  eine Umgebung  $U_a$  gebe, so daß  $\|f(x) - f(a)\| < \delta$  (oder, wenn  $f(a)$  endlich, so daß  $|f(x) - f(a)| < \delta$ ) für alle  $x \in A \cap U_a$ .

Das ist trivial, wenn  $a \in A - A_h$ , d. h. wenn  $a$  ein isolierter Punkt von  $A$  ist; es folgt, wenn  $a \in A_h$ , aus 25.6.2 (bzw. aus 25.6.2 und 25.5.1).

Sind  $f$  und  $g$  Funktionen auf  $A$ , so besteht der Bereich von  $f + g$  aus allen Punkten  $a \in A$ , für die  $f(a) + g(a)$  nicht sinnlos ist (§ 25, 1). Analoges gilt für  $f - g$ ,  $fg$ ,  $\frac{f}{g}$ .

**25-6-3.** Sind  $f$  und  $g$  Funktionen auf  $A$ , ist  $B$  der Bereich von  $f + g$  (bzw. von  $f - g$ ,  $f g$ ,  $\frac{f}{g}$ ), ist  $a \in B$ , und sind  $f$  und  $g$  stetig in  $a$ , so gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $A U_a \subseteq B$ .

Dies folgt aus 25-6-2 und 25-5-3.

Aus 25-6-2 und 25-5-4, 25-5-41, 25-5-42 folgen die Sätze:

**25-6-4.** Ist  $f(x)$  stetig in  $a$ , so auch  $|f(x)|$ .

**25-6-41.** Sind  $f, g$  Funktionen auf  $A$ , die stetig sind in  $a$ , so sind auch die Funktionen  $\max(f(x), g(x))$ ,  $\min(f(x), g(x))$  stetig in  $a$ .

**25-6-42.** Sind  $f, g$  Funktionen auf  $A$ , ist  $B$  der Bereich von  $f + g$  (bzw. von  $f - g$ ,  $f g$ ,  $\frac{f}{g}$ ), ist  $a \in B$  und sind  $f$  und  $g$  stetig in  $a$ , so ist auch  $f + g$  (bzw.  $f - g$ ,  $f g$ ,  $\frac{f}{g}$ ) stetig in  $a$ .

Sei  $f$  eine Funktion auf  $A$ , sei  $B$  die Menge aller  $f(x)$  ( $x \in A$ ), und sei  $g$  eine Funktion, deren Bereich  $\supseteq B$  ist; dann ist  $g(f(x))$  eine Funktion auf  $A$ ; sie heißt die aus  $f$  und  $g$  zusammengesetzte Funktion. Für sie gilt:

**25-6-5.** Ist  $f$  stetig im Punkte  $a \in A$ , und ist  $B \mid g$  stetig im Punkte  $f(a) \in B$ , so ist auch die zusammengesetzte Funktion  $g(f(x))$  stetig im Punkte  $a$ .

Dies folgt unmittelbar aus 22-1-4.

**7. Stetige Funktionen.** Ist  $A$  der Bereich der Funktion  $f$ , und ist  $f$  stetig in jedem Punkte  $a \in A$ , so heißt die Funktion  $f$  stetig (oder ausführlicher: eine stetige Funktion auf  $A$ ). Jede Funktion  $f$ , deren Bereich eine isolierte Menge ist (§ 12, 3), ist stetig. Ist  $C \subseteq A$ , und ist die Funktion  $C \mid f$  stetig, so heißt  $f$  stetig auf  $C$ . Ist  $A$  der Bereich von  $f$ , ist  $C \subseteq A$  und  $f$  stetig, so ist auch  $C \mid f$  stetig, d. h.  $f$  ist stetig auf  $C$ .

Ordnet die Funktion  $f(x)$  auf  $A$  jedem  $x \in A$  denselben Funktionswert  $c$  zu, so ist sie stetig; d. h.: jede konstante Funktion ist stetig.

Ist  $E$  ein metrischer Raum,  $b \in E$ ,  $B \subseteq E$ , so sind die Abstände  $xb, xB$  Funktionen, deren Bereich  $E$  ist; zufolge 25-6-1 und 17-3-31 gilt von ihnen:

**25-7-1.** Die Funktionen  $xb$  und  $xB$  sind stetig.

**25-7-2.** Ist der Bereich  $A$  der stetigen Funktion  $f$  in sich kompakt, so ist auch die Menge  $M$  aller Werte  $f(x)$  ( $x \in A$ ) in sich kompakt<sup>1)</sup>.

Dies folgt aus 23-3-1.

<sup>1)</sup> Dabei ist es, wenn  $f$  endlich ist, gleichgültig, ob  $M$  als Menge im  $\overline{R_1}$  oder im  $R_1$  aufgefaßt wird.

**25-7-21.** Ist der Bereich  $A$  der stetigen Funktion  $f$  in sich kompakt, so gibt es einen Punkt  $a' \in A$ , in dem  $f(a')$  ein absolutes Maximum, und einen Punkt  $a'' \in A$ , in dem  $f(a'')$  ein absolutes Minimum ist.

Dies folgt aus 25-3-4, denn nach 25-7-2 ist die Menge  $M$  aller Werte  $f(x)$  ( $x \in A$ ) in sich kompakt, also nach 15-2-22 auch abgeschlossen.

**25-7-22.** Damit auf der Menge  $A$  jede stetige, endliche Funktion beschränkt sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  in sich kompakt sei.

Notwendig: Ist  $A$  nicht in sich kompakt, so gibt es einen unendlichen Teil  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  von  $A$ , der keinen Häufungspunkt  $\varepsilon A$  besitzt; dann gibt es zu jedem  $a_n$  ein positives  $\varrho_n < \frac{1}{n}$ , so daß die Kugeln  $K_{a_n \varrho_n}$  disjunkt sind; wir setzen  $B = A - \bigcup_n K_{a_n \varrho_n}$  und definieren eine Funktion

$f$  auf  $A$  durch:  $f(x) = 0$  für  $x \in B$ ;  $f(x) = n \left(1 - \frac{x - a_n}{\varrho_n}\right)$  für  $x \in K_{a_n \varrho_n}$ ; dann ist  $f$  endlich, aber nicht beschränkt, da  $f(a_n) = n$ . Es ist noch zu zeigen, daß  $f$  stetig in jedem Punkte  $a \in A$ . Das folgt aus 35-7-1 wenn  $a \in K_{a_n \varrho_n}$ .

Sei also  $a \sim \varepsilon K_{a_n \varrho_n}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), d. h.  $a \in B$ . Dann ist  $f(a) = 0$ ; nach 25-6-1 ist also zu zeigen: für jede Folge  $((b_i))$  aus  $A$  mit  $b_i \rightarrow a$  gilt  $f(b_i) \rightarrow 0$ . Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein  $\delta > 0$  und eine Teilfolge  $((b_{i_j}))$ , so daß  $f(b_{i_j}) \geq \delta$  für alle  $j$ ; wegen  $f(b_{i_j}) > 0$  liegt jeder Punkt  $b_{i_j}$  in einer der Kugeln  $K_{a_n \varrho_n}$ ; wegen  $f(b_{i_j}) \geq \delta$ ,  $b_{i_j} \rightarrow a$  und  $a \sim \varepsilon K_{a_n \varrho_n}$  kann aber keine der Kugeln  $K_{a_n \varrho_n}$  unendlich viele  $b_{i_j}$  enthalten; unter den  $b_{i_j}$  müssen also Punkte aus unendlich vielen verschiedenen  $K_{a_n \varrho_n}$  vorkommen; wegen  $b_i \rightarrow a$ ,  $\varrho_n < \frac{1}{n}$  wäre aber dann  $a$

Häufungspunkt der Menge  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$ , was unmöglich, da diese Menge keinen Häufungspunkt  $\varepsilon A$  besitzt. Hinreichend: Dies ist enthalten in 25-7-21.

Aus 22-2-1 entnehmen wir:

**25-7-3.** Ist  $A$  der Bereich von  $f$ , ist  $A'$  ein in sich kompakter Teil von  $A$  und ist  $f$  stetig in jedem Punkte  $x \in A'$ , so gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $a \in A$  und  $a' \in A'$  mit  $a \sim a' < \sigma$  die Ungleichung gilt  $\|f(a) - f(a')\| < \delta$ .

Die Funktion  $f$  auf  $A$  heißt gleichmäßig stetig (vgl. § 23, 4), wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$  gibt, so daß für je zwei Punkte  $a \in A$ ,  $a' \in A$  mit  $a \sim a' < \sigma$  gilt:  $\|f(a) - f(a')\| < \delta$ ; ist  $f$  beschränkt, so kann es nach 25-3-3 statt dessen heißen:  $|f(a) - f(a')| < \delta$ .

**25-7-31.** Damit jede stetige Funktion auf  $A$  gleichmäßig stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  in sich kompakt sei.

Notwendig: Dies zeigt die beim Beweise von 25.7.22 konstruierte Funktion  $f(x)$ . Hinreichend: Dies folgt aus 25.7.3.

Die Funktion  $f$  auf  $A$  heiße eine Darboux'sche Funktion<sup>1)</sup>, wenn es zu je zwei Punkten  $a_1 \in A$ ,  $a_2 \in A$  mit  $f(a_1) < f(a_2)$  und zu jedem der Ungleichung  $f(a_1) < y < f(a_2)$  genügenden  $y$  ein  $a \in A$  mit  $f(a) = y$  gibt; d. h. (wegen 25.3.5), wenn die Menge aller Funktionswerte  $f(x)$  ( $x \in A$ ) zusammenhängend ist.

**25.7.4.** *Damit jede stetige Funktion auf  $A$  eine Darboux'sche Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  zusammenhängend sei.*

Notwendig: Ist  $A$  unzusammenhängend, so gibt es nach 16.1.1 eine Zerlegung  $A = A_1 + A_2$  in zwei fremde Summanden, die beide  $\supset A$  und offen in  $A$  sind. Setzen wir  $f = 0$  auf  $A_1$ ,  $f = 1$  auf  $A_2$ , so ist  $f$  eine stetige Funktion auf  $A$ , aber keine Darboux'sche Funktion. Hinreichend: Nach 23.5.1 ist die Menge  $M$  aller  $f(x)$  ( $x \in A$ ) zusammenhängend.

Ein Beispiel einer Darboux'schen Funktion im  $R_1$ , die nicht stetig ist, liefert die durch  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$  definierte Funktion, die im Punkte 0 unstetig ist. Es gibt sogar im  $R_1$  Darboux'sche Funktionen, die in jedem Intervalle  $[a, b]$  jeden beliebigen Wert  $z \in R_1$  annehmen (mithin in keinem Punkte stetig sind); man zerlege, um eine solche Funktion zu erhalten, den  $R_1$  in  $\aleph$  fremde, im  $R_1$  dichte Summanden, ordne in ein-eindeutiger Weise jedem  $z \in R_1$  einen dieser Summanden  $M_z$  zu, und setze  $f(x) = z$  für  $x \in M_z$ . Eine solche Zerlegung des  $R_1$  in  $\aleph$  fremde dichte Summanden erhält man z. B. in folgender Weise: wir ordnen jeder dyadischen Folge  $d = ((k_\nu))$  (§ 18, 7) die Menge  $A_d$  aller in der Form  $g + \sum_{\nu} \frac{k_\nu}{2^{2\nu-1}}$  oder  $g + \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{2^2} + \dots + \frac{g_{2n}}{2^{2n}} + \sum_{\nu} \frac{k_\nu}{2^{2n+2\nu-1}}$  darstellbaren Zahlen zu, wo  $g$  eine ganze Zahl,  $g_1, g_2, \dots, g_{2n-1}$  eine der beiden Zahlen 0, 1 bedeutet und  $g_{2n} = 1$  ist; jede dieser Mengen  $A_d$  ist dicht im  $R_1$  und verschiedenen dyadischen Folgen  $d$  entsprechen fremde Mengen  $A_d$ ; auch die Menge  $A$  aller  $x \in R_1$ , die zu keiner Menge  $A_d$  gehören, ist dicht im  $R_1$ ; da es nach 5.2.2  $\aleph$  dyadische Folgen gibt, liefern die Mengen  $A_d$  zusammen mit  $A$  eine Zerlegung des  $R_1$  in  $\aleph$  fremde, im  $R_1$  dichte Summanden.

**25.7.5.** *Ist  $f$  eine stetige Funktion auf  $A$ , und ist  $C$  dicht in  $A$ , so ist die Funktion  $f$  durch ihre Teilfunktion  $C \upharpoonright f$  völlig bestimmt.*

<sup>1)</sup> Abweichend hiervon bezeichnen manche Autoren eine Funktion  $f$  auf  $A$  als Darboux'sche Funktion, wenn  $A' \upharpoonright f$  für jeden zusammenhängenden Teil  $A'$  von  $A$  eine Darboux'sche Funktion im Sinne des Textes ist. Wie aus 25.7.4 hervorgeht, ist jede stetige Funktion in diesem Sinne eine Darboux'sche Funktion.

Dies ist ein Spezialfall von 22-3-1.

**25-7-6.** Ist  $A$  separabel, so hat die Menge  $\mathfrak{C}$  aller stetigen Funktionen auf  $A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Da jede konstante Funktion stetig ist, hat  $\mathfrak{C}$  mindestens die Mächtigkeit  $\aleph$ . Da  $A$  separabel, gibt es nach 13-1-3 einen abzählbaren in  $A$  dichten Teil  $C$ ; da nach § 5 (2-0):  $\aleph^{\aleph_0} = \aleph$  ist, hat nach 4-8-2 die Menge aller Funktionen auf  $C$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , also hat nach 25-7-5  $\mathfrak{C}$  auch höchstens die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Literatur: Satz 25-7-4 ist bekannt als „Zwischenwertsatz“; er wurde zuerst exakt von B. Bolzano (1817) bewiesen. Daß es auch unstetige Funktionen gibt, für die der Zwischenwertsatz gilt, hat G. Darboux betont (Ann. Éc. Norm. (2) 4 (1875) S. 109); obiges Beispiel stammt von H. Lebesgue, Leçons sur l'intégration S. 90. Über Darboux'sche Funktionen: C. H. Rowe, Am. Bull. 32 (1926) S. 285. Th. Radaković, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931) S. 117; 39 (1932) S. 229.

**8. Urbildmengen.** Sei  $f$  eine Funktion auf  $A$ . Wir bezeichnen (§ 1, 3) mit  $[f(x) > a]$  die Menge aller  $x \in A$ , für die  $f(x) > a$  gilt, und analoge Bedeutung haben die Symbole  $[f(x) < a]$ ,  $[f(x) = a]$ ,  $[a < f(x) < b]$  usw.

**25-8-1.** Ist  $f$  eine stetige Funktion auf  $A$ , so sind für jedes  $y \in \bar{R}_1$  die Mengen  $[f(x) > y]$  und  $[f(x) < y]$  offen in  $A$ , die Mengen  $[f(x) \geq y]$  und  $[f(x) \leq y]$  abgeschlossen in  $A$ .

Da die Menge aller  $z > y$ , sowie die Menge aller  $z < y$  offen (und die Menge aller  $z \geq y$ , sowie die Menge aller  $z \leq y$  abgeschlossen) im  $\bar{R}_1$  ist, folgt dies aus 23-2-1 und 23-2-11.

**25-8-11.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , ist die Menge  $M$  dicht im  $R_1$ , und sind für jedes  $z \in M$  die Mengen  $[f(x) > z]$  und  $[f(x) < z]$  offen in  $A$ , so ist  $f$  stetig.

Sei  $a \in A$  und  $y^* < f(a)$ ; dann gibt es ein  $z^* \in M$ , so daß  $y^* < z^* < f(a)$ ; dann ist  $a \in [f(x) > z^*]$ , und da diese Menge offen in  $A$ , gibt es eine Umgebung  $U_a^*$ , so daß  $A \cap U_a^* \subseteq [f(x) > z^*]$ ; dann ist  $f(x) > y^*$  für alle  $x \in A \cap U_a^*$ . Ebenso gibt es zu jedem  $y^{**} > f(a)$  ein  $U_a^{**}$ , so daß  $f(x) < y^{**}$  für alle  $x \in A \cap U_a^{**}$ . Setzen wir  $U_a = U_a^* \cap U_a^{**}$ , so ist also  $y^* < f(x) < y^{**}$  für  $x \in A \cap U_a$ . Daraus folgt: zu jedem  $\delta > 0$  gibt es ein  $U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(a)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ . Also ist  $f$  stetig nach 25-6-21.

**25-8-12.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , ist die Menge  $M$  dicht im  $R_1$ , und sind für jedes  $z \in M$  die Mengen  $[f(x) \geq z]$  und  $[f(x) \leq z]$  abgeschlossen in  $A$ , so ist  $f$  stetig.

Da  $[f(x) \geq z] = A - [f(x) < z]$ , ist die Menge  $[f(x) < z]$  offen in  $A$ , ebenso die Menge  $[f(x) > z]$ ; die Behauptung folgt also aus 25-8-11.

**25·8·13.** Ist  $f$  eine stetige Funktion auf  $A$ , so ist für jedes  $a \in \bar{R}_1$  die Menge  $[f(x) = a]$  abgeschlossen in  $A$ .

Dies folgt wegen  $[f(x) = a] = [f(x) \geq a] [f(x) \leq a]$  aus 25·8·1.

Die Umkehrung von 25·8·13 gilt nicht. Beispiel im  $R_1$ :  $f(x) = \frac{1}{x}$  für  $x \neq 0$ ,  $f(0) = 0$ .

**25·8·14.** Ist  $B$  offen in  $A$ , so gibt es eine stetige Funktion  $f$  auf  $A$ , so daß  $[f(x) > 0] = B$  (bzw.  $[f(x) < 0] = B$ ) und  $[f(x) = 0] = A - B$ .

Dies ist trivial, wenn  $B = A$ . Sei also  $B \subset A$ ; setzen wir  $A - B = C$ , so ist  $C \supset A$  und abgeschlossen in  $A$ , und die nach 25·7·1 stetige Funktion  $f(x) = xC$  (bzw.  $f(x) = -xC$ ) leistet zufolge 10·5·62 das Verlangte.

**25·8·2.** Ist  $A = \bigcup_{\nu} A_{\nu}$ , wo die  $A_{\nu}$  offen in  $A$ , ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , und ist  $A_{\nu} \cap f$  stetig für alle  $\nu$ , so ist auch  $f$  stetig.

Setzen wir  $A_{\nu} \cap f = f_{\nu}$ , so ist  $[f(x) > y] = \bigcap_{\nu} [f_{\nu}(x) > y]$ ; weil  $f_{\nu}$  eine stetige Funktion auf  $A_{\nu}$ , ist hierin nach 25·8·1  $[f_{\nu}(x) > y]$  offen in  $A_{\nu}$ , und weil  $A_{\nu}$  offen in  $A$ , ist auch  $[f_{\nu}(x) > y]$  offen in  $A$ , also nach 10·1·2 auch  $[f(x) > y]$  offen in  $A$ , also ist  $f$  stetig nach 25·8·11.

**25·8·21.** Ist  $A = A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , wo  $A_{\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) abgeschlossen in  $A$ , und ist  $A_{\nu} \cap f$  stetig ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), so ist auch  $f$  stetig.

Setzen wir  $A_{\nu} \cap f = f_{\nu}$ , so ist  $[f(x) \geq y] = \bigcap_{\nu=1}^n [f_{\nu}(x) \geq y]$ ; hierin ist  $[f_{\nu}(x) \geq y]$  nach 25·8·1 abgeschlossen in  $A_{\nu}$ , also auch in  $A$ ; nach 10·2·1 ist also auch  $[f(x) \geq y]$  abgeschlossen in  $A$ , also ist  $f$  stetig nach 25·8·12.

## § 26. Unstetige Funktionen.

**1. Die Hülle einer Funktion.** Sei  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $f$  eine reelle Funktion auf  $A$ . Zu jedem Punkte  $a \in A^0$  bilden wir die Menge aller  $y \in \bar{R}_1$ , zu denen es eine Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $f(a_n) \rightarrow y$  gibt; diese Menge nennen wir die Hülle von  $f$  in  $a$  und bezeichnen sie mit  $P_f^0(a)$ , oder, wenn kein Zweifel bestehen kann, mit  $P^0(a)$ . Ist  $a \in A$  und setzen wir  $a_n = a$ ,  $f(a_n) = f(a)$ , so gilt  $a_n \rightarrow a$ ,  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ ; für jedes  $a \in A$  gilt also  $f(a) \in P^0(a)$ . Für jeden isolierten Punkt  $a$  von  $A$  ist  $P^0(a) = \{f(a)\}$ .

**26·1·1.** Ist  $a \in A^0$ ,  $a_n \in A$ ,  $a_n \rightarrow a$  und ist  $b$  Häufungspunkt der Folge  $((f(a_n)))$ , so ist  $b \in P^0(a)$ .

Denn nach 17·3·53 gibt es eine Teilfolge  $((a_{n_k}))$ , so daß  $f(a_{n_k}) \rightarrow b$ .

**26·1·11.** Ist  $a \in A^0$ ,  $b \in \bar{R}_1$ , so ist, damit  $b \in P^0(a)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder Umgebung  $U_a$  und jeder Umgebung  $U_b$  ein  $x \in A \cap U_a$  mit  $f(x) \in U_b$  gebe.



Notwendig: Ist  $b \in P^0(a)$ , so gibt es in  $A$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $a_n \rightarrow a$ ,  $f(a_n) \rightarrow b$ ; dann ist  $a_n \in A \cap U_a$ ,  $f(a_n) \in U_b$  für fast alle  $n$ . Hinreichend: Nach Annahme gibt es ein  $a_n \in A \cap K_a^\perp$ , so daß  $f(a_n) \in K_b^\perp$ ; dann aber gilt  $a_n \rightarrow a$ ,  $f(a_n) \rightarrow b$ , mithin  $b \in P^0(a)$ .

**26.1.2.** Die Menge  $P^0(a)$  ist abgeschlossen im  $\bar{R}_1$ .

Sei  $b \in (P^0(a))^0$ ; wir haben zu zeigen: dann ist auch  $b \in P^0(a)$ . Nach 10.5.4 gibt es in jeder Umgebung  $U_b$  ein  $b' \in P^0(a)$ ; da  $U_b$  auch eine Umgebung  $U_{b'}$  ist, gibt es nach 26.1.11 in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $x \in A \cap U_a$  mit  $f(x) \in U_{b'}$ , also gilt nach 26.1.11  $b \in P^0(a)$ , w. z. b. w.

Machen wir Gebrauch von der Abweichung  $e(M, M')$  zweier Mengen (§ 9, 6), so gilt:

**26.1.3.** Sind  $f$  und  $g$  Funktionen auf  $A$ , und gibt es eine Umgebung  $U_a$  des Punktes  $a \in A^0$ , so daß  $\|f(x) - g(x)\| \leq k$  für alle  $x \in A \cap U_a$ , so ist  $e(P_f^0(a), P_g^0(a)) \leq k$ .

Sei  $b \in P_f^0(a)$ ; dann gibt es in  $A$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $a_n \rightarrow a$ ,  $f(a_n) \rightarrow b$ ; die Folge  $((g(a_n)))$  hat, da der  $\bar{R}_1$  in sich kompakt ist, mindestens einen Häufungspunkt  $c$ , und nach 26.1.1 ist  $c \in P_g^0(a)$ . Nach Annahme ist  $\|f(a_n) - g(a_n)\| \leq k$  für fast alle  $n$ ; aus § 25 (3.2) folgt also auch  $\|b - c\| \leq k$ ; zu jedem  $b \in P_f^0(a)$  gibt es also ein  $c \in P_g^0(a)$  mit  $\|b - c\| \leq k$ ; somit ist, wenn wir  $P_f^0(a) = B$ ,  $P_g^0(a) = C$  setzen:  $\sup_{b \in B} \inf_{c \in C} \|b - c\| \leq k$ . Ebenso zeigt man:  $\sup_{c \in C} \inf_{b \in B} \|b - c\| \leq k$ ; also ist auch  $e(B, C) \leq k$ , d. h.  $e(P_f^0(a), P_g^0(a)) \leq k$ .

**26.1.4.** Sei  $A$  kompakt,  $f$  eine Funktion auf  $A$ , und  $B$  die Menge aller Funktionswerte  $f(a)$  ( $a \in A$ ); dann gibt es zu jedem  $b \in B^0$  ein  $a \in A^0$ , so daß  $b \in P^0(a)$ .

Nach 17.3.6 gibt es in  $B$  eine Folge  $((b_n))$  mit  $b_n \rightarrow b$ ; sei  $b_n = f(a_n)$ ; da  $A$  kompakt, hat nach 17.2.3  $((a_n))$  einen Häufungspunkt  $a \in A^0$ ; in  $((a_n))$  gibt es eine Teilfolge  $((a_{n_\nu}))$  mit  $a_{n_\nu} \rightarrow a$ ; wegen  $b_n \rightarrow b$  ist auch  $b_{n_\nu} \rightarrow b$ , d. h.  $f(a_{n_\nu}) \rightarrow b$ , also ist  $b \in P^0(a)$ .

Ordnen wir jedem  $x \in A^0$  jedes  $y \in P_f^0(x)$  zu, so entsteht eine Abbildung von  $A^0$  auf eine Punktmenge des  $\bar{R}_1$ ; diese Abbildung bezeichnen wir mit  $P_f^0$  (oder  $P^0$ ); dann ist die Relation  $x P_f^0 y$  gleichbedeutend mit  $y \in P_f^0(x)$ .

**26.1.5.** Die Abbildung  $P_f^0$  von  $A^0$  ist oberhalb stetig.

Da der  $\bar{R}_1$  in sich kompakt ist, genügt es nach 21.2.21, zu zeigen: Ist  $a \in A^0$  und  $((a_n))$  eine Punktfolge aus  $A^0$  mit  $a_n \rightarrow a$ , so ist  $\overline{\lim_n P^0(a_n)} \subseteq P^0(a)$ . Sei  $b \in \overline{\lim_n P^0(a_n)}$ ; dann gibt es nach 17.3.521 eine Indizesfolge  $((n_\nu))$  und ein  $b_{n_\nu} \in P^0(a_{n_\nu})$ , so daß  $b_{n_\nu} \rightarrow b$ ; nach 26.1.11 gibt es ein  $a'_{n_\nu} \in A$ , so daß

$a'_{n_p} a_{n_p} < \frac{1}{p}$ ,  $\|f(a'_{n_p}) - b_{n_p}\| < \frac{1}{p}$ ; dann ist auch  $a'_{n_p} \rightarrow a$ ,  $f(a'_{n_p}) \rightarrow b$ , also ist  $b \in P^0(a)$ . Aus  $b \in \overline{\lim_n P^0(a_n)}$  folgt also  $b \in P^0(a)$ ; d. h. es ist  $\overline{\lim_n P^0(a_n)} \subseteq P^0(a)$ , w. z. b. w.

**2. Die Schrankenfunktionen.** Sei wieder  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ ,  $f$  eine reelle Funktion auf  $A$ ; sei  $a \in A^0$  und  $P^0(a)$  die Hülle von  $f$  in  $a$ . Da  $P^0(a)$  nach 26-1-2 abgeschlossen, gibt es nach 25-3-4 unter den Zahlen von  $P^0(a)$  eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit  $\bar{f}(a)$  bzw.  $\underline{f}(a)$ , und nennen sie die obere bzw. untere Schranke von  $f$  in  $a$ ; es sind  $\bar{f}$  und  $\underline{f}$  Funktionen auf  $A^0$ , die wir als die obere bzw. untere Schrankenfunktion von  $f$  bezeichnen. Da  $f(a) \in P^0(a)$  war für  $a \in A$ , so ist  $\underline{f}(a) \leq f(a) \leq \bar{f}(a)$  für  $a \in A$ . Für jeden isolierten Punkt  $a$  von  $A$  ist  $\bar{f}(a) = \underline{f}(a) = f(a)$ .

**26-2-1.** Ist  $a \in A^0$  und  $((U_{n\alpha}))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge (§ 13, 1), so ist:  $\bar{f}(a) = \lim_n \sup_{x \in A, U_{n\alpha}} f(x)$ ;  $\underline{f}(a) = \lim_n \inf_{x \in A, U_{n\alpha}} f(x)$ .

Wir setzen  $\sup_{x \in A, U_{n\alpha}} f(x) = g_n$ . Ist  $p < \bar{f}(a)$ , so gibt es nach 26-1-11 ein  $x \in A, U_{n\alpha}$  mit  $f(x) > p$ ; also ist  $g_n \geq \bar{f}(a)$  für alle  $n$ ; also ist  $\overline{\lim_n} g_n \geq \bar{f}(a)$ .

Bleibt zu zeigen, daß auch  $\overline{\lim_n} g_n \leq \bar{f}(a)$ . Sei  $q > \bar{f}(a)$ ; die Menge  $H$  aller  $x \in \bar{R}_1$  mit  $z < q$  ist offen im  $\bar{R}_1$  und es ist  $P^0(a) \subseteq H$ ; aus 26-1-5 folgt also: es gibt eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $P^0(x) \subseteq H$  für alle  $x \in U_a$ ; wegen  $f(x) \in P^0(x)$  ist dann  $f(x) < q$  für alle  $x \in A, U_a$ ; da  $U_{n\alpha} \subseteq U_a$  für fast alle  $n$ , ist also  $g_n \leq q$  für fast alle  $n$ , und mithin  $\overline{\lim_n} g_n \leq \bar{f}(a)$ , w. z. b. w.

Aus 26-2-1 folgt unmittelbar:

**26-2-11.** Ist  $a \in A^0$ , so gibt es zu jedem  $z > \bar{f}(a)$  (bzw.  $z < \underline{f}(a)$ ) eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $f(x) < z$  (bzw.  $f(x) > z$ ) für alle  $x \in A, U_a$ ; und zu jedem  $z < \bar{f}(a)$  (bzw.  $z > \underline{f}(a)$ ) gibt es in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $x \in A$  mit  $f(x) > z$  (bzw.  $f(x) < z$ ).

**26-2-2.** Für jede in  $X$  offene Menge  $G$ , für die  $AG \supset A$ , ist:  $\sup_{x \in AG} f(x) = \sup_{x \in A^0 G} \bar{f}(x)$ ,  $\inf_{x \in AG} f(x) = \inf_{x \in A^0 G} \underline{f}(x)$ .

Wir setzen  $\sup_{x \in A^0 G} \bar{f}(x) = g$ . Es gibt in  $A^0 G$  eine Folge  $((x_n))$ , so daß  $\bar{f}(x_n) \rightarrow g$ ; da  $G$  offen, gibt es nach 26-1-11 ein  $x'_n \in AG$ , so daß

$\|f(x'_n) - \bar{f}(x_n)\| < \frac{1}{n}$ ; also ist  $\sup_{x \in AG} f(x) \geq g$ . Da aber  $f(x) \leq f(x)$  für alle  $x \in A$ , ist auch  $\sup_{x \in AG} f(x) \leq g$ . Also ist  $\sup_{x \in AG} f(x) = g$ , w. z. b. w.

**26-2-3.** Ist  $A$  kompakt, so gibt es ein  $a' \in A^0$  und ein  $a'' \in A^0$ , so daß  $\bar{f}(a') = \sup_{x \in A} f(x)$ ,  $\bar{f}(a'') = \inf_{x \in A} f(x)$ .

Wir setzen  $\sup_{x \in A} f(x) = g$ . Bezeichnen wir mit  $B$  die Menge aller Funktionswerte  $f(x)$  ( $x \in A$ ), so ist  $g \in B^0$ ; also gibt es nach 26-1-4 ein  $a' \in A^0$ , so daß  $g \in P^0(a')$ ; dann aber ist  $g$  die größte Zahl in  $P^0(a')$ , also  $\bar{f}(a') = g$ .

**26-2-4.** Damit  $f$  stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $\bar{f}(a) = f(a) (= f(a))$  sei.

Denn  $\bar{f}(a) = f(a)$  ist gleichbedeutend mit  $P^0(a) = \{f(a)\}$ ; d. h. für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  gilt  $f(a_n) \rightarrow f(a)$ ; die Behauptung folgt also aus 25-6-1.

**3. Die Schwankung.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , ist  $g$  das Supremum,  $h$  das Infimum von  $f$  (§ 25, 4), so heißt die Zahl  $\omega_f(A) = \|g - h\|$  die Schwankung von  $f$ . Ist  $A' \subseteq A$ , so heißt die Schwankung von  $f$  auf  $A'$  die Schwankung von  $f$  auf  $A'$ ; sie ist  $\leq \omega_f(A)$ . Ist  $a \in A^0$ , so heißt die Zahl  $\omega_f(a) = \|\bar{f}(a) - f(a)\|$  die Schwankung von  $f$  in  $a$ ; es ist  $\omega_f(a)$  eine Funktion auf  $A^0$ , die wir als die Schwankungsfunktion von  $f$  bezeichnen; wo kein Zweifel möglich ist, schreiben wir  $\omega(a)$  statt  $\omega_f(a)$ . In jedem isolierten Punkte  $a$  von  $A$  ist  $\omega(a) = 0$ .

**26-3-1.** Ist  $a \in A^0$ , ist  $((U_{na}))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge, und ist  $\omega_n$  die Schwankung von  $f$  auf  $A \cap U_{na}$ , so ist  $\omega(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n$ .

Dies folgt wegen § 25 (3-2) aus 26-2-1.

**26-3-11.** Ist  $a \in A^0$ , so gibt es zu jedem  $z > \omega(a)$  eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(x')\| < z$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ,  $x' \in A \cap U_a$ ; und zu jedem  $z < \omega(a)$  gibt es in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $x' \in A \cap U_a$  und ein  $x'' \in A \cap U_a$ , so daß  $\|f(x') - f(x'')\| > z$ .

Dies folgt aus 26-3-1.

**26-3-12.** Ist  $a \in A$ , so gibt es zu jedem  $z < \omega(a)$  und zu jeder Umgebung  $U_a$  ein  $x \in A \cap U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(a)\| > \frac{z}{2}$ .

Denn anderenfalls wäre für alle  $x' \in A \cap U_a$ ,  $x'' \in A \cap U_a$ :

$\|f(x') - f(a)\| \leq \frac{z}{2}$ ,  $\|f(x'') - f(a)\| \leq \frac{z}{2}$ , also  $\|f(x') - f(x'')\| \leq z$ , im Widerspruche mit 26-3-11.

**26.3.2.** *Damit  $f$  stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $\omega(a) = 0$ .*

Dies folgt aus 26.2.4.

**26.3.3.** *Ist  $A'$  ein in sich kompakter Teil von  $A$ , und ist  $\omega(x) \leq k$  für alle  $x \in A'$ , so gibt es zu jedem  $z > k$  ein  $\sigma > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $a \in A$ ,  $a' \in A'$  mit  $a' < \sigma$  die Ungleichung gilt:  $\|f(a) - f(a')\| < z$ .*

Anderenfalls gäbe es ein  $z > k$ , ein  $a_n \in A$  und ein  $a'_n \in A'$ , so daß  $a_n a'_n < \frac{1}{n}$ ,  $\|f(a_n) - f(a'_n)\| \geq z$ . Da  $A'$  in sich kompakt, hat  $(a'_n)$  einen Häufungspunkt  $a \in A'$ , und es gibt eine Teilfolge  $(a'_{n_\nu})$  mit  $a'_{n_\nu} \rightarrow a$ ; wegen  $a_n a'_n < \frac{1}{n}$  ist dann auch  $a_{n_\nu} \rightarrow a$ . Nach Annahme ist  $\omega(a) \leq k < z$ , also gibt es nach 26.3.11 eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(x')\| < z$  für alle  $x \in A$ ,  $x' \in A$ ; da  $a_{n_\nu} \in A$ ,  $a'_{n_\nu} \in A$  für fast alle  $\nu$ , steht dies in Widerspruch mit  $\|f(a_{n_\nu}) - f(a'_{n_\nu})\| \geq z$ .

**26.3.31.** *Ist  $A$  in sich kompakt und ist  $\omega(x) \leq k$  für alle  $x \in A$ , so gibt es zu jedem  $z > k$  ein  $\sigma > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $a \in A$ ,  $a' \in A$  mit  $a' < \sigma$  die Ungleichung gilt:  $\|f(a) - f(a')\| < z$ .*

Dies folgt aus 26.3.3 für  $A' = A$ .

Die Sätze 26.3.3, 26.3.31 enthalten (für  $k = 0$ ) die Sätze 25.7.3, 25.7.31.

**26.3.4.** *Für jedes  $k$  ist die Menge aller  $a \in A^0$  mit  $\omega(a) \geq k$  abgeschlossen.*

Sei  $B$  diese Menge und  $b \in B^0$ . In jeder Umgebung  $U_b$  gibt es ein  $a \in B$ ; da  $U_b$  auch eine Umgebung von  $a$  ist, gibt es nach 26.3.11 in  $U_b$  zu jedem  $z < k$  zwei Punkte  $x, x'$  von  $A$ , für die  $\|f(x) - f(x')\| > z$ ; nach 26.3.11 ist also  $\omega(b) \geq k$ , d. h. es ist  $b \in B$ . Aus  $b \in B^0$  folgt also  $b \in B$ , somit ist  $B$  abgeschlossen.

**26.3.41.** *Für jedes  $k$  ist die Menge aller  $a \in A$  mit  $\omega(a) \geq k$  abgeschlossen in  $A$ , und wenn  $k > 0$  ist, auch abgeschlossen in  $A_h$ .*

Seien  $B$  und  $B'$  die Menge aller  $x \in A^0$ , bzw. aller  $x \in A$  mit  $\omega(x) \geq k$ . Da  $B' = A \setminus B$  und nach 26.3.4  $B$  abgeschlossen, ist  $B'$  abgeschlossen in  $A$ . Ist  $k > 0$ , so ist, da  $\omega(x) = 0$  für alle  $x \in A - A_h$  gilt:  $B' \subseteq A_h$ , also  $B' = A_h \setminus B$ , also ist  $B'$  auch abgeschlossen in  $A_h$ .

**4. Verteilung der Unstetigkeitspunkte.** Sei wieder  $f$  eine Funktion auf  $A$ ; wir betrachten die Menge aller ihrer Unstetigkeitspunkte.

**26.4.1.** *Die Menge  $C$  aller Unstetigkeitspunkte von  $f$  ist ein  $F_\sigma$  in  $A$  und in  $A_h$ .*

Sei  $C_n$  die Menge aller  $x \in A$  mit  $\omega(x) \geq \frac{1}{n}$ ; dann ist nach 26.3.2  $C = \bigcap_n C_n$ , die Behauptung folgt also aus 26.3.41. — Die Umkehrung werden wir in 26.4.8 beweisen.

**26.4.11.** Die Menge  $D$  aller Stetigkeitspunkte von  $f$  ist ein  $G_\delta$  in  $A$ .

Denn nach 26.4.1 ist  $A - D$  ein  $F_\sigma$  in  $A$ .

Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , die in jedem Punkte  $y \in A$  unstetig ist, so heißt  $f$  total unstetig.

**26.4.2.** Ist  $A \supset \Lambda$  und insichdicht, und sind  $z_1, z_2$  zwei verschiedene Zahlen, so gibt es auf  $A$  eine total unstetige Funktion, die nur die zwei Werte  $z_1, z_2$  annimmt.

Nach 12.4.6 zerlegen wir:  $A = B + (A - B)$ , wo  $B$  und  $A - B$  dicht in  $A$ . Setzen wir  $f(x) = z_1$  für  $x \in B$ ,  $f(x) = z_2$  für  $x \in A - B$ , so leistet  $f$  das Verlangte.

**26.4.3.** Ist  $C$  ein  $F_\sigma$  in  $A_h$ , so gibt es auf  $A$  eine Funktion  $f$ , die unstetig ist in allen Punkten von  $C$ , stetig in allen Punkten von  $A - C$ .

Sei  $C = \bigcup_n C_n$ , wo  $C_n$  abgeschlossen in  $A_h$ ; da  $A_h$  nach 12.2.3 abgeschlossen in  $A$ , ist nach 10.8.5  $C_n$  auch abgeschlossen in  $A$ . Seien  $C'_1, C''_1$  insichdichter Kern und separierter Bestandteil (§ 12, 7) von  $C_1$ , und  $C'_n, C''_n$  insichdichter Kern und separierter Bestandteil von  $C_n - (C_1 + \dots + C_{n-1})$ ; dann ist  $C = \bigcup_n (C'_n + C''_n)$ , und die Mengen  $C'_1, C''_1, C'_2, C''_2, \dots$  sind disjunkt. Falls  $C'_n \supset \Lambda$ , sei (gemäß 26.4.2)  $f_n$  eine total unstetige Funktion auf  $C'_n$ , die nur die Werte 0 und  $\frac{1}{n}$  annimmt. Nun definieren wir eine Funktion  $f$  auf  $A$  durch:

$$f(x) = f_n(x) \text{ für } x \in C'_n; \quad f(x) = \frac{1}{n} \text{ für } x \in C''_n; \quad f(x) = 0 \text{ für } x \in A - C.$$

Diese Funktion leistet das Verlangte: Sie ist stetig in jedem Punkte von  $A - C$ ; denn sei  $a \in A - C$  und  $(a_\nu)$  eine Punktfolge aus  $A$  mit  $a_\nu \rightarrow a$ ; da  $a \sim \varepsilon (C_1 + C_2 + \dots + C_n)$  und  $C_1 + C_2 + \dots + C_n$  abgeschlossen in  $A$ , gilt auch  $a_\nu \sim \varepsilon (C_1 + C_2 + \dots + C_n)$  für fast alle  $\nu$ ; mithin ist  $0 \leq f(a_\nu) < \frac{1}{n}$  für fast alle  $\nu$ ; und da dies für jedes  $n$  gilt, ist  $f(a_\nu) \rightarrow 0$ ; wegen  $a \in A - C$  ist aber auch  $f(a) = 0$ , also ist  $f$  stetig in  $a$ , wie behauptet. Die Funktion  $f(x)$  ist unstetig in jedem Punkte von  $C$ ; denn sei  $a \in C$ ; dann gibt es ein  $n$ , so daß entweder  $a \in C'_n$  oder  $a \in C''_n$ ; ist  $a \in C'_n$ , so ist  $f$  unstetig in  $a$ , weil  $f_n = C'_n \cap f$  unstetig in  $a$ ; ist  $a \in C''_n$ , so ist  $f(a) = \frac{1}{n}$ ; da  $C''_n = (C_n - (C_1 + \dots + C_{n-1}))_s$ , ist nach 12.7.2  $(C_n - (C_1 + \dots + C_{n-1}))_s$

dicht in  $C''_n$ , es gibt also in  $(C_n - (C_1 + \dots + C_{n-1}))_j$  eine Folge  $((a_r))$  mit  $a_r \rightarrow a$ ; dann ist  $a_r$  isolierter Punkt von  $C_n - (C_1 + \dots + C_{n-1})$ , und wegen  $C_n \subseteq A_k$  Häufungspunkt von  $A$ , es gibt also ein  $a'_r \in A$ , so daß  $a'_r a_r < \frac{1}{p}$  und  $a'_r \sim \varepsilon (C_n - (C_1 + \dots + C_{n-1}))$ , d. h.  $a'_r \sim \varepsilon (C'_n + C''_n)$ ; also ist  $f(a'_r) = 0$  oder  $= \frac{1}{k}$  ( $k \neq n$ ); wegen  $f(a) = \frac{1}{n}$  gilt also nicht  $f(a'_r) \rightarrow f(a)$ , und da aus  $a_r \rightarrow a$ ,  $a'_r a_r < \frac{1}{p}$  folgt:  $a'_r \rightarrow a$ , ist  $f$  unstetig in  $a$ .

Literatur: Satz 26.4.11 geht zurück auf W. H. Young, Wien. Ber. 112 (1903) S. 1307.

**5. Punktweise unstetige Funktionen.** Eine Funktion  $f$  auf  $A$  heißt punktweise unstetig, wenn die Menge der Stetigkeitspunkte von  $f$  dicht in  $A$  ist; insbesondere ist also jede stetige Funktion punktweise unstetig. Ist  $A$  separiert, so ist jede Funktion  $f$  auf  $A$  punktweise unstetig, denn nach 12.7.2 ist  $A_j$  dicht in  $A$ , und in jedem Punkte von  $A_j$  ist  $f$  stetig.

**26.5.1.** Ist  $f$  punktweise unstetig, so ist für jedes  $k > 0$  die Menge aller  $a \in A$  mit  $\omega(a) \geq k$  nirgends dicht in  $A$ .

Sei  $B$  diese Menge und  $C$  die Menge der Stetigkeitspunkte; da  $\omega(x) = 0$  für  $x \in C$ , ist  $C \subseteq A - B$ ; und da nach Annahme  $C$  dicht in  $A$ , ist auch  $A - B$  dicht in  $A$ ; da  $B$  nach 26.3.41 abgeschlossen in  $A$ , so ist nach 11.2.51  $B$  nirgends dicht in  $A$ .

**26.5.11.** Ist  $f$  punktweise unstetig, so ist die Menge  $B$  aller Unstetigkeitspunkte von  $f$  von erster Kategorie in  $A$ .

Denn ist  $B_n$  die Menge aller  $a \in A$  mit  $\omega(a) \geq \frac{1}{n}$ , so ist  $B = \bigcup_n B_n$ ; die Behauptung folgt also aus 26.5.1.

Ist  $A$  eine Youngsche Menge, so können diese Sätze umgekehrt werden:

**26.5.2.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$  und ist die Menge  $B$  aller Unstetigkeitspunkte von  $f$  von erster Kategorie in  $A$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Denn die Menge  $A - B$  der Stetigkeitspunkte von  $f$  ist eine Residualmenge (§ 19, 7), also nach 19.7.51 dicht in  $A$ .

**26.5.21.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist für jedes  $k > 0$  die Menge  $B_k$  aller  $a \in A$  mit  $\omega(a) \geq k$  von erster Kategorie in  $A$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Denn dann ist nach 19.4.2 auch die Menge  $B = \bigcup_n B_n^1$  von erster Kategorie in  $A$ , und da  $B$  die Menge aller Unstetigkeitspunkte von  $f$  ist, folgt die Behauptung aus 26.5.2.

**26-5-22.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist für jedes  $k > 0$  die Menge aller  $a \in A^0$  mit  $\omega(a) \geq k$  von erster Kategorie in  $A^0$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Dies folgt aus 19-4-32 und 26-5-21.

Die Sätze 26-5-11, 26-5-2 können zusammengefaßt werden in:

**26-5-23.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , so ist, damit  $f$  punktweise unstetig sei, notwendig und hinreichend, daß die Menge der Stetigkeitspunkte von  $f$  eine Residualmenge in  $A$  sei.

Eine Funktion im  $R_1$ , die stetig ist in allen irrationalen, unstetig in allen rationalen Punkten des  $R_1$ , ist punktweise unstetig; eine solche Funktion erhält man z. B., indem man setzt:  $f(x) = 0$ , wenn  $x$  irrational;  $f(x) = \frac{1}{q}$ , wenn  $x = \pm \frac{p}{q}$  ( $p, q$  teilerfremde natürliche Zahlen);  $f(0) = 1$ . Eine Funktion im  $R_1$ , die stetig in allen rationalen, unstetig in allen irrationalen Punkten wäre, kann es nicht geben; dies folgt aus 26-5-11, weil die Menge der irrationalen Punkte nicht von erster Kategorie ist, oder auch aus 26-4-1, weil die Menge der irrationalen Punkte kein  $F_\sigma$  ist (§ 19, 2).

**26-5-3.** Sind  $f_n$  ( $n = 1; 2, \dots$ ) punktweise unstetige Funktionen auf der Youngschen Menge  $A$ , so ist die Menge aller Punkte, in denen sämtliche  $f_n$  stetig sind, dicht in  $A$ .

Dies folgt aus 26-5-23 und 19-7-52.

**26-5-4.** Ist  $f$  punktweise unstetig, so auch  $|f|$ .

Dies folgt aus 25-6-4.

**26-5-41.** Sind  $f$  und  $g$  punktweise unstetige Funktionen auf der Youngschen Menge  $A$ , so auch  $\max(f(x), g(x))$  und  $\min(f(x), g(x))$ .

Dies folgt aus 25-6-41 und 26-5-3.

**26-5-42.** Sind  $f$  und  $g$  punktweise unstetige Funktionen auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist eine der Funktionen  $f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}$  definiert auf  $A$ , so ist sie punktweise unstetig.

Dies folgt aus 25-6-42 und 26-5-3.

Hingegen folgt daraus, daß  $f$  und  $g$  punktweise unstetig sind, nicht die punktweise Unstetigkeit der zusammengesetzten Funktion  $g(f(x))$ . Beispiel: sei  $f(x)$  die vorhin eingeführte, im  $R_1$  punktweise unstetige Funktion, die  $= 0$  ist, wenn  $x$  irrational,  $= \frac{1}{q}$  wenn  $x = \pm \frac{p}{q}$  ( $p, q$  teilerfremde natürliche Zahlen) und  $= 1$  für  $x = 0$ ; sei ferner  $g(y)$  die im  $R_1$  punktweise unstetige Funktion, die  $= 0$  ist für  $y = 0$  und  $= 1$  für  $y \neq 0$ ; dann ist

$g(f(x)) = 1$ , wenn  $x$  rational, und  $= 0$ , wenn  $x$  irrational; somit ist  $g(f(x))$  total unstetig.

Literatur: Der Begriff der punktweise unstetigen Funktion rührt her von H. Hankel, Math. Ann. 20 (1882) S. 89.

## § 27. Vernachlässigung von Teilmengen.

1. Die reduzierte Hülle einer Funktion. Sei wieder  $X$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$  und  $f$  eine Funktion auf  $A$ . Zu jedem Punkte  $a \in A^1$  bilden wir die Menge aller  $y \in \bar{R}_1$ , zu denen es eine Folge  $((a_n))$  aus  $A - \{a\}$  mit  $a_n \rightarrow a$  und  $f(a_n) \rightarrow y$  gibt; diese Menge nennen wir die reduzierte Hülle von  $f$  in  $a$  und bezeichnen sie mit  $P_f^1(a)$  (oder einfach mit  $P^1(a)$ ). Die Abbildung, die entsteht, indem wir jedem  $x \in A^1$  jedes  $y \in P_f^1(x)$  zuordnen, bezeichnen wir mit  $P_f^1$  (oder  $P^1$ ). Für alle  $a \in A^1$  ist  $P^1(a) \subseteq P^0(a)$ ; für alle  $a \in A^1 - A$  ist  $P^1(a) = P^0(a)$ ; für  $a \in A_h$  ist entweder  $P^1(a) = P^0(a)$  oder  $P^1(a) = P^0(a) - \{f(a)\}$ . Ganz analog, wie die entsprechenden Sätze in § 26, 1 beweist man:

**27.1.1.** Ist  $a \in A^1$ ,  $a_n \in A - \{a\}$ ,  $a_n \rightarrow a$ , und ist  $b$  Häufungspunkt der Folge  $((f(a_n)))$ , so ist  $b \in P^1(a)$ .

**27.1.11.** Ist  $a \in A^1$ ,  $b \in \bar{R}_1$ , so ist, damit  $b \in P^1(a)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder reduzierten Umgebung  $U'_a$  und jeder Umgebung  $U_b$  ein  $x \in A \cap U'_a$  mit  $f(x) \in U_b$  gebe.

**27.1.2.** Die Menge  $P^1(a)$  ist abgeschlossen im  $\bar{R}_1$ .

**27.1.3.** Sind  $f$  und  $g$  Funktionen auf  $A$ , und gibt es eine reduzierte Umgebung  $U'_a$  des Punktes  $a \in A^1$ , so daß  $\|f(x) - g(x)\| \leq k$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ , so ist  $e(P_f^1(a), P_g^1(a)) \leq k$ .

**27.1.4.** Sei  $A$  kompakt,  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $B$  die Menge aller Funktionswerte  $f(a)$  ( $a \in A$ ); dann gibt es zu jedem  $b \in B^1$  ein  $a \in A^1$ , so daß  $b \in P^1(a)$ .

**27.1.5.** Die Abbildung  $P_f^1$  von  $A^1$  ist oberhalb stetig.

Während für alle  $a \in A$  gilt:  $f(a) \in P^0(a)$ , braucht nicht  $f(a) \in P^1(a)$  zu sein<sup>1)</sup>; wohl aber gilt:

**27.1.6.** Ist  $A_h$  separabel, so kann es nur abzählbar viele  $a \in A_h$  mit  $f(a) \sim_\varepsilon P^1(a)$  geben.

Sei  $\mathcal{G}$ , bzw.  $\mathcal{S}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A_h$  bzw. im  $\bar{R}_1$  offener Mengen (§ 13, 1). Ist  $a \in A_h$ ,  $f(a) = b$ ,  $b \sim_\varepsilon P^1(a)$ , so gibt es nach

<sup>1)</sup> Beispiel im  $\bar{R}_1$ : sei  $f(x) = 0$  für irrationales  $x$ ,  $f(x) = \frac{1}{q}$  für  $x = \pm \frac{p}{q}$  ( $p, q$  teilerfremde natürliche Zahlen),  $f(0) = 1$ ; dann ist  $P^1(x) = \{0\}$  für alle  $x \in \bar{R}_1$ ; also ist  $f(x) \sim_\varepsilon P^1(x)$  für alle rationalen  $x$ .



27.1.11 ein  $U_a$  und ein  $U_b$ , so daß für alle  $x \in (A \setminus U_a - \{a\})$  gilt:  $f(x) \sim \varepsilon U_b$ ; es ist also  $a$  der einzige Punkt  $x \in A \setminus U_a$  mit  $f(x) \in U_b$ . Nun gibt es ein  $G \in \mathcal{G}$  und ein  $H \in \mathcal{H}$ , so daß  $a \in G$ ,  $G \subseteq U_a$ ,  $b \in H$ ,  $H \subseteq U_b$ ; dann ist auch  $a$  der einzige Punkt  $x \in G$  mit  $f(x) \in H$ . Jedem Punkte  $a \in A_h$  mit  $f(a) \sim \varepsilon P^1(a)$  kann also ein  $G \in \mathcal{G}$  und ein  $H \in \mathcal{H}$  so zugeordnet werden, daß  $a$  der einzige Punkt  $x \in G$  mit  $f(x) \in H$  ist. Da hierbei verschiedenen Punkten  $a \in A_h$  verschiedene Paare  $(G, H)$  zugeordnet werden, und da es — weil  $\mathcal{G}$  und  $\mathcal{H}$  abzählbar sind — nur abzählbar viele Paare  $(G, H)$  gibt, gibt es also auch nur abzählbar viele  $a \in A_h$  mit  $f(a) \sim \varepsilon P^1(a)$ .

Literatur: Das Studium der reduzierten Hülle geht im wesentlichen zurück auf R. Bettazzi, Rend. Pal. 6 (1892) S. 177.

2. Die reduzierten Schrankenfunktionen. Da  $P^1(a)$  nach 27.1.2 abgeschlossen, gibt es unter den Zahlen von  $P^1(a)$  eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit  $\bar{f}^1(a)$  bzw.  $\underline{f}^1(a)$  und nennen sie die obere bzw. untere reduzierte Schranke von  $f$  in  $a$ ; es sind  $\bar{f}^1$  und  $\underline{f}^1$  Funktionen auf  $A^1$ , die wir als die obere bzw. untere reduzierte Schrankenfunktion von  $f$  bezeichnen. Für alle  $a \in A^1 - A$  ist  $\bar{f}^1(a) = \bar{f}(a)$ ,  $\underline{f}^1(a) = f(a)$ , für alle  $a \in A^1$  ist  $\bar{f}^1(a) \leq \bar{f}(a)$ ,  $\underline{f}^1(a) \geq f(a)$ ; für alle  $a \in A_h$  ist  $\bar{f}(a) = \max(\bar{f}^1(a), f(a))$ ,  $\underline{f}(a) = \min(\underline{f}^1(a), f(a))$ .

27.2.1. Ist  $a \in A^1$ , ist  $((U_{na}))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge und  $U'_{na} = U_{na} - \{a\}$ , so ist  $\bar{f}^1(a) = \lim_n \sup_{x \in A \setminus U'_{na}} f(x)$ ,  $\underline{f}^1(a) = \lim_n \inf_{x \in A \setminus U'_{na}} f(x)$ .

Ist  $a \in A^1 - A$ , so ist dies gleichbedeutend mit 26.2.1. Ist  $a \in A^1 A (= A_h)$ , so erhält man die Behauptung, indem man 26.2.1 auf die Funktion anwendet, die  $= f$  ist auf  $A - \{a\}$ , und  $= \bar{f}^1$  im Punkte  $a$ .

Aus 27.2.1 folgt unmittelbar:

27.2.11. Ist  $a \in A^1$ , so gibt es zu jedem  $z > \bar{f}^1(a)$  (bzw.  $z < \underline{f}^1(a)$ ) eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , so daß  $f(x) < z$  (bzw.  $f(x) > z$ ) für alle  $x \in A \setminus U'_a$ ; und zu jedem  $z < \bar{f}^1(a)$  (bzw.  $z > \underline{f}^1(a)$ ) gibt es in jeder reduzierten Umgebung  $U'_a$  ein  $x \in A$  mit  $f(x) > z$  (bzw.  $f(x) < z$ ).

27.2.2. Ist  $A_h$  separabel, so gilt für alle  $a \in A_h$  mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen:  $\underline{f}^1(a) \leq f(a) \leq \bar{f}^1(a)$ .

Dies folgt aus 27.1.6.

27.2.3. Ist  $a \in A^1$ , so ist, damit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $\bar{f}^1(a) = \underline{f}^1(a) = b$  sei.

Denn  $\bar{f}^1(a) = f^1(a) = b$  ist gleichbedeutend mit  $P^1(a) = \{b\}$ ; d. h. für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A - \{a\}$  mit  $a_n \rightarrow a$  folgt  $f(a_n) \rightarrow b$ ; die Behauptung folgt also aus 25-5-21.

**27-2-4.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , ist  $A_j \subseteq B \subseteq A$ , ist  $g$  eine Funktion auf  $A^0$  und  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in B$ ,  $\bar{f}^1(x) \leq g(x) \leq \bar{f}^1(x)$  für alle  $x \in A^1 - B$ , so gilt  $\bar{f}^1(x) \leq g^1(x) \leq \bar{g}^1(x) \leq \bar{f}^1(x)$  für alle  $x \in A^1$ .

Sei  $a \in A^1$ ; nach 27-2-11 haben wir zu zeigen: Ist  $z > \bar{f}^1(a)$ , so gibt es eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , so daß  $g(x) \leq z$  für alle  $x \in A^0 U'_a$ . Nach 27-2-11 gibt es eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , so daß  $f(x) < z$  für alle  $x \in A U'_a$ ; nach 27-2-11 ist dann auch  $\bar{f}^1(x) \leq z$  für alle  $x \in A^1 U'_a$ , mithin (2)  $g(x) \leq z$  für alle  $x \in A^1 U'_a - B$ .

Da  $f(x) < z$  war für alle  $x \in A U'_a$ , gilt  $g(x) = f(x) < z$  für alle  $x \in B U'_a$ ; wegen  $A_j = A^0 - A^1$  (§ 12 (2-2)) und  $A_j \subseteq B$  folgt also aus (2):  $g(x) \leq z$  für alle  $x \in A^0 U'_a$ , w. z. b. w.

Ist  $a \in A_h$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $f(a) \neq b$ , so ist nach 25-6-2  $f$  unstetig in  $a$ ; und zwar heißt  $f$  hebbbar unstetig in  $a$ , weil  $f$  durch bloße Abänderung des Funktionswertes  $f(a)$  in den Wert  $b$  zu einer in  $a$  stetigen Funktion wird.

**27-2-5.** Hat die Funktion  $f$  auf  $A$  keine anderen als hebbare Unstetigkeiten, so geht sie in eine stetige Funktion  $g$  über, wenn man in jedem Unstetigkeitspunkte  $a$  den Funktionswert  $f(a)$  durch  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ersetzt.

Da  $g$  in jedem Punkte  $a \in A_j$  (§ 12, 2) stetig ist, ist nur zu zeigen, daß  $g$  auch in jedem Punkte  $a \in A_h$  stetig ist. In jedem Punkte  $a \in A_h$  aber ist nach 27-2-3  $\bar{f}^1(a) = \bar{f}^1(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$ , also nach 27-2-4  $\bar{g}^1(a) = \bar{g}^1(a) = g(a)$ , also nach 27-2-3:  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$ , also ist  $g$  stetig in  $a$  nach 25-6-2.

**27-2-51.** Ist  $A_h$  separabel und hat die Funktion  $f$  auf  $A$  keine anderen als hebbare Unstetigkeiten, so hat sie höchstens abzählbar viele Unstetigkeitspunkte.

Da  $f$  in jedem Punkte  $a \in A_j$  stetig ist, ist nur zu zeigen: es gibt nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte  $a \in A_h$ . Nach Annahme existiert für jedes  $a \in A_h$  der Grenzwert:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$ ; nach 27-2-3 ist also  $\bar{f}^1(a) = \bar{f}^1(a) = g(a)$ ; also gilt nach 27-2-2 für alle  $a \in A_h$  mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen:  $f(a) = g(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , also gibt es nach 25-6-2 nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte  $a \in A_h$ .

Literatur: Satz 27-2-2 geht zurück auf W. H. Young, Lond. Proc. (2) 8 (1910) S. 119.

**3. Die reduzierte Schwankung.** Ist  $a \in A^1$ , so heißt die Zahl  $\omega_f^1(a) = \|\bar{f}^1(a) - f^1(a)\|$  die reduzierte Schwankung von  $f$  in  $a$ ; es ist  $\omega_f^1(a)$  eine Funktion auf  $A^1$ , die wir als die reduzierte Schwankungsfunktion von  $f$  bezeichnen; wo kein Zweifel möglich ist, schreiben wir  $\omega^1(a)$  statt  $\omega_f^1(a)$ . Für alle  $a \in A^1 - A$  ist  $\omega^1(a) = \omega(a)$ , für alle  $a \in A^1$  ist  $\omega^1(a) \leq \omega(a)$ . Wie die analogen Sätze in § 26, 3 zeigt man:

**27.3.1.** Ist  $a \in A^1$ , ist  $((U_n a))$  eine sich auf  $a$  zusammenziehende Umgebungsfolge und  $U'_n a = U_n a - \{a\}$ , und bedeutet  $\omega'_n$  die Schwankung von  $f$  auf  $A \cap U'_n a$ , so ist  $\omega^1(a) = \lim_n \omega'_n$ .

**27.3.11.** Ist  $a \in A^1$ , so gibt es zu jedem  $z > \omega^1(a)$  eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , so daß  $\|f(x) - f(x')\| < z$  für alle  $x \in A \cap U'_a$ ,  $x' \in A \cap U'_a$ ; und zu jedem  $z < \omega^1(a)$  gibt es in jeder reduzierten Umgebung  $U'_a$  ein  $x \in A \cap U'_a$  und ein  $x' \in A \cap U'_a$ , so daß  $\|f(x) - f(x')\| > z$ .

Aus 27.2.3 folgt:

**27.3.2.** Damit  $f$  einen Grenzwert habe im Punkte  $a \in A^1$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $\omega^1(a) = 0$ .

**27.3.3.** Für jedes  $k$  ist die Menge aller  $a \in A^1$  mit  $\omega^1(a) \geq k$  abgeschlossen.

Sei  $B$  diese Menge und  $b \in B^1$ . In jeder reduzierten Umgebung  $U'_b$  gibt es ein  $a \in B$ ; da  $U'_b - \{a\}$  eine reduzierte Umgebung von  $a$  ist, gibt es zu jedem  $z < k$  nach 27.3.11 in  $U'_b$  zwei Punkte  $x, x'$  von  $A$ , für die  $\|f(x) - f(x')\| > z$ ; nach 27.3.11 ist also  $\omega^1(b) \geq k$ , d. h. es ist  $b \in B$ . Aus  $b \in B^1$  folgt also  $b \in B$ , somit ist  $B$  abgeschlossen.

**27.3.31.** Für jedes  $k$  ist die Menge aller  $a \in A_k$  mit  $\omega^1(a) \geq k$  abgeschlossen in  $A$  und in  $A_k$ .

Der Beweis ist analog dem von 26.3.41.

**27.3.4.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist für jedes  $k > 0$  die Menge  $C_k$  aller  $a \in A_k$  mit  $\omega^1(a) \geq k$  von erster Kategorie in  $A$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Wäre  $f$  nicht punktweise unstetig, so gäbe es nach 26.5.21 ein  $l > 0$ , so daß die Menge  $B_l$  aller  $x \in A$  mit  $\omega(x) \geq l$  nicht nirgends dicht in  $A$ . Da  $B_l$  nach 26.3.41 abgeschlossen in  $A$ , gibt es dann nach 11.2.111 eine nicht leere, in  $A$  offene Menge  $G \cap A \subseteq B_l$  ( $G$  offen). Bezeichnen wir mit  $C$  die Menge aller  $x \in A_k$  mit  $\omega^1(x) > 0$ , so ist  $C = \bigcup_n C_{\frac{1}{n}}$ , und da jedes  $C_{\frac{1}{n}}$  von erster Kategorie in  $A$ , ist nach 19.4.2 auch  $C$  von erster Kategorie in  $A$ . Also ist  $A - C$  eine Residualmenge in  $A$ , also nach 19.7.51 dicht in  $A$ , also gibt es ein  $a \in G \cap (A - C)$ ; wegen  $G \cap A \subseteq B_l$  ist  $a \in B_l$ , d. h.  $\omega(a) \geq l$ , also ist  $a \in A_k$ , denn in jedem isolierten Punkte von  $A$  ist  $\omega(a) = 0$ ; da aber  $C$  die Menge aller  $x \in A_k$  mit  $\omega^1(x) > 0$  war, und  $a \in A_k - C$  ist, so ist  $\omega^1(a) = 0$ ;

nach 27.3.11 gibt es also eine reduzierte Umgebung  $U'_a$ , so daß  $\|f(x) - f(x')\| < \frac{l}{2}$  für alle  $x \in A U'_a$ ,  $x' \in A U'_a$ . Wegen  $a \in A_h$  gibt es ein  $a' \in A U'_a G$ , und da  $U'_a$  eine Umgebung von  $a'$  ist, so ist nach 26.3.11  $\omega(a') \leq \frac{l}{2}$ ; aus  $a' \in A G$  und  $A G \subseteq B_i$  folgt aber  $a' \in B_i$ , d. h.  $\omega(a') \geq l$ ; die Annahme,  $f$  sei nicht punktweise unstetig, führt also auf einen Widerspruch.

**27.3.41.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist für jedes  $k > 0$  die Menge  $C_k$  aller  $a \in A^1$  mit  $\omega^1(a) \geq k$  von erster Kategorie in  $A^0$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Nach 11.3.12 und 19.4.32 ist  $C_k A$  von erster Kategorie in  $A$ . Da  $C_k A$  die Menge aller  $a \in A_h$  mit  $\omega^1(a) \geq k$  ist, folgt die Behauptung aus 27.3.4.

**27.3.5.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist die Menge  $B$  aller  $a \in A_h$ , in denen  $f$  einen Grenzwert hat, dicht in  $A_h$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Sei  $C_k$  ( $k > 0$ ) die Menge aller  $a \in A_h$  mit  $\omega^1(a) \geq k$ ; da  $B \subseteq A_h - C_k$ , ist  $A_h - C_k$  dicht in  $A_h$ ; weil  $C_k$  nach 27.3.31 abgeschlossen in  $A_h$ , ist also nach 11.2.51  $C_k$  nirgends dicht in  $A_h$ , also auch nirgends dicht in  $A$ , und die Behauptung folgt aus 27.3.4.

**27.3.51.** Ist  $f$  eine Funktion auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist die Menge aller  $a \in A^1$ , in denen  $f$  einen Grenzwert hat, dicht in  $A^1$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Der Beweis ist (unter Berufung auf 27.3.3 und 27.3.41) analog dem von 27.3.5.

4. Vernachlässigung von Teilmengen. Sei  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen der Menge  $A$  mit folgenden Eigenschaften:

1. Ist  $M \in \mathfrak{M}$  und  $M' \subseteq M$ , so ist auch  $M' \in \mathfrak{M}$ .
2.  $\mathfrak{M}$  ist ein  $\sigma$ -System.
3. Kein  $M \supset A$  aus  $\mathfrak{M}$  ist offen in  $A$ .

Aus 1. folgt:  $A \in \mathfrak{M}$ . Beispiele solcher Systeme  $\mathfrak{M}$  sind: wenn  $A$  ver-dichtet (§ 13, 5), das System aller abzählbaren Teile von  $A$ ; wenn  $A$  eine Youngsche Menge, das System aller Mengen erster Kategorie in  $A$  (nach 19.7.62). — Jede Menge  $M \in \mathfrak{M}$  nennen wir kurz eine  $\mathfrak{M}$ -Menge. — Ist  $a \in A^0$ , und  $M$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so gibt es wegen 3. in  $A - M$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $a_n \rightarrow a$ .

Sei  $f$  eine Funktion auf  $A$ . Zu jedem Punkte  $a \in A^0$  bilden wir die Menge aller  $y \in \bar{R}_1$ , zu denen es für jedes  $M \in \mathfrak{M}$  eine Folge  $((a_n))$  aus  $A - M$  mit

$a_n \rightarrow a$  und  $f(a_n) \rightarrow y$  gibt; diese Menge nennen wir die Hülle von  $f$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, und bezeichnen sie mit  $P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$  (oder einfach mit  $P^{(\mathfrak{M})}(a)$ ). Die Abbildung, die entsteht, indem wir jedem  $x \in A^0$  jedes  $y \in P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$  zuordnen, bezeichnen wir mit  $P_f^{(\mathfrak{M})}$  (oder  $P^{(\mathfrak{M})}$ ). Ist auch  $g$  eine Funktion auf  $A$ , und ist die Menge aller  $x \in A$  mit  $f(x) \neq g(x)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so stimmen  $P_f^{(\mathfrak{M})}$  und  $P_g^{(\mathfrak{M})}$  überein.

Ganz ebenso wie 26-1-11, 26-1-2, 26-1-5 zeigt man:

**27-4-1.** Ist  $a \in A^0$ ,  $b \in \bar{R}_1$ , so ist, damit  $b \in P^{(\mathfrak{M})}(a)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jeder Umgebung  $U_a$ , jeder Umgebung  $U_b$  und jedem  $M \in \mathfrak{M}$  ein  $x \in (A - M) \cap U_a$  mit  $f(x) \in U_b$  gebe.

**27-4-2.** Die Menge  $P^{(\mathfrak{M})}(a)$  ist abgeschlossen im  $\bar{R}_1$ .

**27-4-3.** Die Abbildung  $P_f^{(\mathfrak{M})}$  von  $A^0$  ist oberhalb stetig.

**27-4-4.** Ist  $A$  separabel, so ist die Menge aller  $a \in A$  mit  $f(a) \sim \varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge.

Sei  $G_1, G_2, \dots, G_i, \dots$ , bzw.  $H_1, H_2, \dots, H_j, \dots$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A$ , bzw. im  $\bar{R}_1$  offener Mengen (§ 13, 1). Sei  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$  die abzählbare Menge derjenigen Paare  $(G_i, H_j)$ , für die die Menge aller  $x \in G_i$  mit  $f(x) \in H_j$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge ist; für das Paar  $Q_n$  bezeichnen wir die Menge dieser  $x$  mit  $M_n$  und setzen  $M = \bigcup_n M_n$ ; da  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System, ist dann auch  $M$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge. Es genügt also zu zeigen: ist  $f(a) \sim \varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$ , so ist  $a \in M$ . Sei also  $b = f(a)$ ,  $b \sim \varepsilon P^{(\mathfrak{M})}(a)$ ; dann gibt es nach 27-4-1 ein  $U_a$  und ein  $U_b$ , so daß die Menge aller  $x \in A \cap U_a$  mit  $f(x) \in U_b$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge ist; sodann gibt es ein  $G_i$  und ein  $H_j$ , so daß  $a \in G_i$ ,  $G_i \subseteq U_a$ ,  $b \in H_j$ ,  $H_j \subseteq U_b$ ; dann ist, da jeder Teil einer  $\mathfrak{M}$ -Menge eine  $\mathfrak{M}$ -Menge ist, auch die Menge aller  $x \in G_i$  mit  $f(x) \in H_j$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, und somit ist  $(G_i, H_j)$  eines der Paare  $Q_1, Q_2, \dots$ , etwa das Paar  $Q_n$ ; da aber  $a \in G_i$ ,  $f(a) \in H_j$ , ist dann  $a \in M_n$ , also auch  $a \in M$ , w. z. b. w.

Da  $P^{(\mathfrak{M})}(a)$  nach 27-4-2 abgeschlossen, gibt es unter den Zahlen von  $P^{(\mathfrak{M})}(a)$  eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit  $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$  bzw.  $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ , und nennen sie die obere und untere Schranke von  $f$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen; die Zahl  $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) = \|\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a) - \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)\|$  nennen wir die Schwankung von  $f$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen; es sind  $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ ,  $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$ ,  $\omega^{(\mathfrak{M})}(a)$  Funktionen auf  $A^0$ , die wir als die obere und untere Schrankenfunktion, bzw. die Schwankungsfunktion von  $f$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen bezeichnen. Aus 27-4-4 folgt:

**27-4-5.** Ist  $A$  separabel, so ist die Menge aller  $a \in A$ , in denen nicht  $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a) \leq f(a) \leq \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$  gilt, eine  $\mathfrak{M}$ -Menge.

**27.4.51.** Für jedes  $k$  ist die Menge  $C$  aller  $a \in A^0$  mit  $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) \geq k$  abgeschlossen.

Sei  $a \in A^0 - C$ , also  $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) < k$ . Aus 27.4.3 folgt: zu jedem  $p > \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$  (bzw. zu jedem  $q < f^{(\mathfrak{M})}(a)$ ) gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) < p$  (bzw.  $f^{(\mathfrak{M})}(x) > q$ ) für alle  $x \in A^0 \cap U_a$ ; wegen  $\omega^{(\mathfrak{M})} = \|\bar{f}^{(\mathfrak{M})} - f^{(\mathfrak{M})}\|$  und  $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) < k$  gibt es also eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\omega^{(\mathfrak{M})}(x) < k$  für alle  $x \in A^0 \cap U_a$ ; also ist  $A^0 \cap U_a \subseteq A^0 - C$ , also ist  $A^0 - C$  offen in  $A^0$ , mithin  $C$  abgeschlossen in  $A^0$ , und da  $A^0$  abgeschlossen, ist  $C$  abgeschlossen.

In Anlehnung an 26.2.4 und 26.3.2 definieren wir: Ist  $a \in A$  und  $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a) = f^{(\mathfrak{M})}(a)$  (d.h.  $\omega^{(\mathfrak{M})}(a) = 0$ ), so heißt  $f$  stetig in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen; gilt dies für jeden Punkt  $a$  des Bereiches  $A$  von  $f$ , so heißt  $f$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen.

**27.4.6.** Ist  $f$  stetig in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, so ist die Abbildung  $P^{(\mathfrak{M})}$  stetig in  $a$ .

Dies folgt aus 27.4.3 und 22.1.5.

**27.4.61.** Ist  $f$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, und setzen wir  $g(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = f^{(\mathfrak{M})}(x)$  für  $x \in A$ , so ist die Funktion  $g$  auf  $A$  stetig.

Dies folgt aus 27.4.6.

Offenbar gilt:

**27.4.62.** Sind  $f$  und  $g$  Funktionen auf  $A$ , ist  $g$  stetig, und ist die Menge aller  $x \in A$  mit  $f(x) \neq g(x)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so ist  $f$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen.

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

**27.4.621.** Ist  $A$  separabel und  $f$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, so gibt es eine stetige Funktion  $g$  auf  $A$ , so daß die Menge aller  $x \in A$  mit  $f(x) \neq g(x)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge ist.

Dies folgt aus 27.4.61 und 27.4.5.

Die Funktion  $f$  auf  $A$  heißt punktweise unstetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, wenn die Menge aller Punkte, in denen  $f$  stetig ist bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, dicht in  $A$  ist. Offenbar gilt:

**27.4.7.** Sind  $f$  und  $g$  Funktionen auf  $A$ , ist  $g$  punktweise unstetig, und ist die Menge aller  $x \in A$  mit  $f(x) \neq g(x)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so ist  $f$  punktweise unstetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen.

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

**27.4.71.** Ist  $A$  separabel und  $f$  punktweise unstetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, so gibt es eine punktweise unstetige Funktion  $g$  auf  $A$ , so daß die Menge aller  $x \in A$  mit  $f(x) \neq g(x)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge ist.

Sei  $g(x) = f(x)$  für alle  $x \in A$ , in denen  $\underline{f^{(\mathfrak{M})}}(x) \leq f(x) \leq \bar{f^{(\mathfrak{M})}}(x)$ , und  $g(x) = \bar{f^{(\mathfrak{M})}}(x)$  für alle übrigen  $x \in A$ ; nach 27.4.5 ist dann die Menge aller  $x \in A$  mit  $f(x) \neq g(x)$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge. Da die Menge  $P_f^{(\mathfrak{M})}(x)$  nach 27.4.2 abgeschlossen im  $\bar{R}_1$ , ist sie nach 15.2.3 in sich kompakt, d. h. die Abbildung  $P_f^{(\mathfrak{M})}$  ist in sich kompakt; ist  $f$  stetig in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, so ist nach 27.4.6 die Abbildung  $P_f^{(\mathfrak{M})}$  stetig in  $a$ , nach 22.1.2 gibt es also zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$ , so daß  $e(P_f^{(\mathfrak{M})}(x), P_f^{(\mathfrak{M})}(a)) < \delta$  für alle  $x \in A$   $K_{\sigma\sigma}$ ; da  $P_f^{(\mathfrak{M})}(a) = \{g(a)\}$ , und da überall  $\underline{f^{(\mathfrak{M})}}(x) \leq g(x) \leq \bar{f^{(\mathfrak{M})}}(x)$ , folgt daraus sofort  $\|g(x) - g(a)\| < \delta$ ; also ist nach 25.6.21  $g$  stetig in  $a$ . Es ist also  $g$  in jedem Punkte stetig, in dem  $f$  stetig ist bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen; also ist  $g$  punktweise unstetig.

**27.4.72.** *Ist  $f$  punktweise unstetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, so ist die Menge aller Punkte von  $A$ , in denen  $f$  nicht stetig ist bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, von erster Kategorie in  $A$ .*

Dies folgt aus 27.4.51 ebenso wie 26.5.11 aus 26.3.4.

Wir nennen die Funktion  $f$  auf  $A$  stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, wenn es eine  $\mathfrak{M}$ -Menge  $M \subseteq A$  gibt, so daß  $(A - M)$  1  $f$  stetig ist. Ist  $A$  separabel und ist die Funktion  $f$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, so ist sie zufolge 27.4.621 auch stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, aber nicht umgekehrt (vgl. Satz 27.4.811).

**27.4.8.** *Ist  $M_0$  die Menge aller  $x \in A$ , für die nicht  $f(x) = \underline{f^{(\mathfrak{M})}}(x) = \bar{f^{(\mathfrak{M})}}(x)$  gilt, so ist  $(A - M_0)$  1  $f$  stetig.*

Dies folgt unmittelbar aus 27.4.6.

**27.4.81.** *Ist  $f$  stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so ist die Menge  $C$  aller  $a \in A$ , in denen  $f$  nicht stetig ist bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, eine  $\mathfrak{M}$ -Menge.*

Sei  $M$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge und  $(A - M)$  1  $f$  stetig; dann ist  $f$  in jedem Punkte  $a \in A - M$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, also ist  $C \subseteq M$ , mithin eine  $\mathfrak{M}$ -Menge.

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

**27.4.811.** *Ist  $A$  separabel und ist die Menge  $C$  aller  $x \in A$ , in denen  $f$  nicht stetig ist bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen, eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so ist  $f$  stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge.*

Nach Voraussetzung ist die Menge aller  $x \in A$ , in denen nicht  $\underline{f^{(\mathfrak{M})}}(x) = \bar{f^{(\mathfrak{M})}}(x)$  gilt, eine  $\mathfrak{M}$ -Menge; also ist nach 27.4.5 auch die Menge  $M_0$  aller  $x \in A$ , in denen nicht  $f(x) = \underline{f^{(\mathfrak{M})}}(x) = \bar{f^{(\mathfrak{M})}}(x)$  gilt, eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, und die Behauptung folgt aus 27.4.8.

**27.4.82.** Ist  $f$  stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so gibt es unter allen  $\mathfrak{M}$ -Mengen  $M$ , für die  $(A - M) \mid f$  stetig ist, eine kleinste, nämlich die Menge  $M_0$  aller  $x \in A$ , für die nicht  $f(x) = \bar{f}^{(\mathfrak{M})}(x) = f^{(\mathfrak{M})}(x)$  gilt.

Ist  $M$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge und  $a \in M_0 - M$ , so kann  $(A - M) \mid f$  nicht stetig in  $a$  sein; für alle  $\mathfrak{M}$ -Mengen, für die  $(A - M) \mid f$  stetig ist, gilt also  $M \supseteq M_0$ . Da es nach Voraussetzung solche  $\mathfrak{M}$ -Mengen gibt, ist auch  $M_0$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, und da nach 27.4.8  $(A - M_0) \mid f$  stetig ist, ist  $M_0$  die kleinste  $\mathfrak{M}$ -Menge, für die  $(A - M) \mid f$  stetig ist.

**27.4.9.** Ist  $f$  stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so ist  $f$  punktweise unstetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen.

Sei  $M$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge und  $(A - M) \mid f$  stetig. Dann ist  $f$  stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen in jedem Punkte von  $A - M$ . Es ist also nur mehr zu zeigen, daß  $A - M$  dicht in  $A$  ist. Sei  $G \supset A$  und offen in  $A$ ; nach Eigenschaft 3. der  $\mathfrak{M}$ -Mengen ist dann  $G - M \supset A$ , also auch  $G(A - M) \supset A$ , also ist  $A - M$  dicht in  $A$  nach 11.1.3, w. z. b. w.

Ist  $A$  eine separable Youngsche Menge und verstehen wir unter den  $\mathfrak{M}$ -Mengen insbesondere die Mengen erster Kategorie in  $A$ , so gilt hiervon auch die Umkehrung:

**27.4.91.** Ist  $A$  eine separable, Youngsche Menge, so ist, damit  $f$  stetig sei bis auf eine Menge erster Kategorie in  $A$ , notwendig und hinreichend, daß  $f$  punktweise unstetig sei bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie in  $A$ .

Notwendig: Dies ist enthalten in 27.4.9. Hinreichend: Nach 27.4.72 ist die Menge aller  $x \in A$ , in denen  $f$  nicht stetig ist bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie, von erster Kategorie, die Behauptung folgt also aus 27.4.811.

**27.4.92.** Damit die charakteristische Funktion  $f$  der Menge  $M \subseteq E$  stetig sei bis auf eine Menge erster Kategorie, ist notwendig und hinreichend, daß  $M$  offen sei bis auf eine Menge erster Kategorie.

Notwendig: Nach Annahme gibt es eine Menge  $A$ , die von erster Kategorie in  $E$  ist, so daß  $(E - A) \mid f$  stetig ist. Dann ist  $[(E - A) \mid f(x) = 1]$

$= [(E - A) \mid f(x) > \frac{1}{2}]$  offen in  $E - A$  nach 25.8.1; also ist

$$[(E - A) \mid f(x) = 1] = G(E - A) = G - A,$$

wo  $G$  offen in  $E$ ; also ist  $M = [f(x) = 1] = (G - A) + A'$ , wo  $A' \subseteq A$ ; da  $A$  von erster Kategorie in  $E$ , so auch  $A'$ . Hinreichend: Nach Annahme ist  $M = (G - A) + A'$ , wo  $G$  offen,  $A$  und  $A'$  von erster Kategorie. Nach 11.2.71 ist  $G$ , nirgends dicht, also ist die Menge  $B = A + A' + G$ , von erster Kategorie, und offenbar ist  $(E - B) \mid f$  stetig.



Literatur: Die Betrachtungen dieser Nummer gehen zurück auf R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 72, 81; Acta math. 30 (1906) S. 21; H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 185, 189. Satz 27·4·82 stammt im wesentlichen von W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 20.

**5. Teilfunktionen.** Sei  $f$  eine Funktion auf  $A$ ,  $B \subseteq A$  und  $g = B \upharpoonright f$ . Ist dann  $a \in B^0$  (bzw.  $a \in B^1$ , bzw.  $a \in B^0$ ), so gilt für die Hüllen (§ 26, 1) von  $f$  und  $g$  in  $a$  (bzw. für die reduzierten Hüllen (§ 27, 1) von  $f$  und  $g$  in  $a$ , bzw. für die Hüllen von  $f$  und  $g$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen):  $P_g^0(a) \subseteq P_f^0(a)$  (bzw.  $P_g^1(a) \subseteq P_f^1(a)$ , bzw.  $P_g^{(\mathfrak{M})}(a) \subseteq P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$ ).

Wählen wir insbesondere für  $B$  eine in  $A$  offene Menge  $A \cap G$  ( $G$  offen), so heiße  $g = A \cap G \upharpoonright f$  eine offene Teilfunktion von  $f$ .

**27·5·1.** Ist  $G$  offen und  $g = A \cap G \upharpoonright f$ , so gilt für alle  $a \in A^0 \cap G$ :

$$P_g^0(a) = P_f^0(a), \quad P_g^1(a) = P_f^1(a), \quad P_g^{(\mathfrak{M})}(a) = P_f^{(\mathfrak{M})}(a).$$

Denn  $G$  ist eine Umgebung von  $a$ , und für alle  $x \in A \cap G$  ist  $g(x) = f(x)$ .

Hingegen kann für  $a \in (A \cap G)^0 - G$  sehr wohl  $P_g^0(a) \subset P_f^0(a)$  (ebenso  $P_g^1(a) \subset P_f^1(a)$ ,  $P_g^{(\mathfrak{M})}(a) \subset P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$ ) sein. Diesbezüglich gilt:

**27·5·2.** Die Menge  $C$  aller  $a \in A^0$  (bzw. aller  $a \in A^1$ , bzw. aller  $a \in A^0$ ), zu denen es eine offene Menge  $G$  mit  $a \in (A \cap G)^0$  gibt, so daß für die offene Teilfunktion  $g = A \cap G \upharpoonright f$  gilt:  $P_g^0(a) \subset P_f^0(a)$  (bzw.  $P_g^1(a) \subset P_f^1(a)$ , bzw.  $P_g^{(\mathfrak{M})}(a) \subset P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$ ), ist von erster Kategorie in  $A^0$  (bzw. in  $A^1$ , bzw. in  $A^0$ ).

Seien  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  die abzählbar vielen abgeschlossenen Intervalle des  $R_1$ , deren Randpunkte  $p, q$  rational oder  $= \pm \infty$  sind. Ist  $P_g^0(a) \subset P_f^0(a)$ , so gibt es, da  $P_g^0(a)$  nach 26·1·2 abgeschlossen, ein  $I_n$ , so daß  $P_g^0(a) \cap I_n = \Lambda$ ,  $P_f^0(a) \cap I_n \supset \Lambda$ . Bezeichnen wir also mit  $C_n$  die Menge aller  $a \in A^0$ , zu denen es eine offene Menge  $G$  mit  $a \in (A \cap G)^0$  gibt, so daß für die offene Teilfunktion  $g = A \cap G \upharpoonright f$  gilt:  $P_g^0(a) \cap I_n = \Lambda$ ,  $P_f^0(a) \cap I_n \supset \Lambda$ , so ist  $C = \bigcup_n C_n$ .

Um zu zeigen, daß  $C$  von erster Kategorie in  $A^0$ , genügt es also zu zeigen, daß  $C_n$  nirgends dicht in  $A^0$ . Sei also  $a \in C_n$ , d. h. es gibt ein offenes  $G$ , so daß  $a \in (A \cap G)^0$  und  $P_g^0(a) \cap I_n = \Lambda$ ,  $P_f^0(a) \cap I_n \supset \Lambda$ . Da nach 26·1·5 die Abbildung  $P_g^0$  von  $(A \cap G)^0$  oberhalb stetig ist, so ist nach 21·5·2 die Menge aller  $x \in (A \cap G)^0$ , für die  $P_g^0(x) \cap I_n \supset \Lambda$  ist, abgeschlossen, mithin die Menge aller  $x \in (A \cap G)^0$ , für die  $P_g^0(x) \cap I_n = \Lambda$  ist, offen in  $(A \cap G)^0$ , also von der Gestalt  $(A \cap G)^0 \cap G'$ , wo  $G'$  offen. Da nach 27·5·1  $P_g^0(x) = P_f^0(x)$  für alle  $x \in A^0 \cap G$ , und da  $A^0 \cap G \subseteq (A \cap G)^0$ , so ist auch  $P_f^0(x) \cap I_n = \Lambda$  für alle  $x \in A^0 \cap G \cap G'$ , und daher ist  $C_n \cap G \cap G' = \Lambda$ . Sei nun  $A^0 \cap H$  ( $H$  offen) eine  $a$  enthaltende, in  $A^0$  offene Menge; wegen  $a \in (A \cap G)^0$  und  $P_g^0(a) \cap I_n = \Lambda$ , ist  $a \in (A \cap G)^0 \cap G'$ , also ist  $G' \cap H$  eine Umgebung von  $a$ ; wegen  $a \in (A \cap G)^0$  ist also  $A \cap G \cap G' \cap H \supset \Lambda$ , also ist  $A^0 \cap G \cap G' \cap H$  eine nicht leere, in  $A^0$  offene Menge  $\subseteq A^0 \cap H$ , die wegen  $C_n \cap G \cap G' = \Lambda$  zu  $C_n$

fremd ist; in jeder in  $A^0$  offenen Menge  $A^0 H$ , die einen Punkt von  $C_n$  enthält, gibt es also eine zu  $C_n$  fremde, nicht leere, in  $A^0$  offene Menge, also ist nach 11.2.2  $C_n$  nirgends dicht, w. z. b. w.

Sei  $E$  ein metrischer Raum, und  $f$  eine Funktion auf  $E$ ; wir nennen die in  $E$  dichte Menge  $B$  eine Kernmenge für  $f$ , wenn es zu jedem  $b \in B$  und zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U_b$  gibt, so daß die Menge aller  $x \in B \cap U_b$  mit  $\|f(x) - f(b)\| < \varepsilon$  dicht in  $U_b$  ist.

**27.5.3.** Ist  $E$  ein separabler Youngscher Raum, so gibt es für jede Funktion  $f$  auf  $E$  eine Kernmenge.

Verstehen wir unter den  $\mathcal{M}$ -Mengen die Mengen erster Kategorie, so ist nach 27.4.4 die Menge  $B'$  aller  $a \in E$ , für die  $f(a) \in P_f^{(\mathfrak{M})}(a)$  gilt, eine Residualmenge. Setzen wir in 27.5.2  $A = E$  (also auch  $A^0 = E$ ), so ist, da die Menge  $C$  von 27.5.2 von erster Kategorie ist, die Menge  $B'' = E - C$  eine Residualmenge. Setzen wir  $B = B' \cap B''$ , so ist nach 19.7.2 auch  $B$  eine Residualmenge, und nach 19.7.51 ist  $B$  dicht. Wir haben noch zu zeigen: ist  $b \in B$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U_b$ , so daß die Menge aller  $x \in B \cap U_b$  mit  $\|f(x) - f(b)\| < \varepsilon$  dicht in  $U_b$  ist. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es ein  $\varepsilon > 0$ , so daß in keiner Umgebung  $U_b$  die Menge aller  $x \in B \cap U_b$  mit  $\|f(x) - f(b)\| < \varepsilon$  dicht ist; nach 11.1.3 gäbe es dann zu jeder Umgebung  $U_b$  eine nicht leere offene Menge  $G_{U_b} \subseteq U_b$ , so daß  $\|f(x) - f(b)\| \geq \varepsilon$  für alle  $x \in B \cap G_{U_b}$ ; ist dann  $((U_{nb}))$  eine sich auf  $b$  zusammenziehende Umgebungsfolge (§ 13, 1) und  $G = \bigcap_n G_{U_{nb}}$ , so wäre  $G$  offen,  $b \in G^0$  und  $\|f(x) - f(b)\| \geq \varepsilon$  für alle  $x \in B \cap G$ ; setzen wir  $g = G \cap f$ , so wäre demnach, da  $B$  eine Residualmenge also  $E - B$  von erster Kategorie, mithin nach 19.4.4  $G - B$  von erster Kategorie in  $G$  ist:  $f(b) \sim_\varepsilon P_g^{(\mathfrak{M})}(b)$ , im Widerspruche zur Tatsache, daß aus  $b \in B = B' \cap B''$  folgt:  $f(b) \in P_f^{(\mathfrak{M})}(b)$  und  $P_f^{(\mathfrak{M})}(b) = P_g^{(\mathfrak{M})}(b)$ .

**27.5.4.** Ist  $E$  ein separabler Youngscher Raum, so gibt es zu jeder Funktion  $f$  auf  $E$  eine in  $E$  dichte Menge  $A$ , so daß  $A \cap f$  stetig.

Sei  $((\varepsilon_n))$  eine abnehmende Zahlenfolge mit  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Nach 27.5.3 gibt es eine Kernmenge  $B_1$  für  $f$ , und nach 9.7.1 gibt es in  $B_1$  ein  $\varepsilon_1$ -Netz  $C_1$ , das nach 18.1.6 abzählbar ist; es bestehe aus den Punkten  $b_{11}, b_{12}, \dots, b_{1v}, \dots$ . Dann gibt es ein disjunktes System von Umgebungen  $U_{b_{1v}}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ), so daß, wenn  $B_{1v}$  die Menge aller  $x \in B_1$  mit  $\|f(x) - f(b_{1v})\| < \varepsilon_1$  bedeutet,  $B_{1v} \cap U_{b_{1v}}$  dicht in  $U_{b_{1v}}$  ist. Wir setzen nun:  $\bigcup_v U_{b_{1v}} = G_1$ ,  $B_2 = \bigcup_v B_{1v} \cap U_{b_{1v}} + (B_1 - G_1^0)$ . Dann ist  $B_2 \subseteq B_1$ . Wir zeigen, daß  $B_2$  dicht ist; da  $G_1$  offen, ist nach 11.2.71  $G_1^0 - G_1 = G_{1g}$  nirgends dicht; bedeutet also  $G$  eine offene Menge  $\supset A$ , so ist nach 11.2.11  $G - G_{1g} \supset A$ , wegen  $G - G_{1g} = G \cap G_1 + (G - G_1^0)$  ist also eine der offenen Mengen  $G \cap U_{b_{1v}}$  ( $v = 1, 2, \dots$ ),

$G - G_1^0$  nicht leer, und da  $B_1, U_{b_1}$  dicht in  $U_{b_1}$  und  $B_1$  dicht, ist also  $B_2 G \supset A$ , d. h. nach 11.1.3:  $B_2$  ist dicht, wie behauptet. Wir zeigen nun, daß  $B_2$  eine Kernmenge für  $f$  ist. Sei  $b \in B_2$ ; dann gehört  $b$  zu  $B_1 - G_1^0$  oder zu einer der Mengen  $B_1, U_{b_1}$ ; wir haben zu zeigen: zu jedem  $\delta > 0$  gibt es eine Umgebung  $U_b$ , so daß die Menge aller  $x \in B_2 U_b$  mit  $\|f(x) - f(b)\| < \delta$  dicht in  $U_b$ ; dies ist evident, wenn  $b \in B_1 - G_1^0$ , weil  $E - G_1^0$  offen, weil  $B_2(E - G_1^0) = B_1(E - G_1^0)$  und weil  $B_1$  eine Kernmenge; sei also  $b \in B_1, U_{b_1}$ ; nach Definition von  $B_1$ , ist dann  $\|f(b) - f(b_1)\| < \varepsilon_1$ ; wir können ohne weiteres annehmen:  $\delta < \varepsilon_1 - \|f(b) - f(b_1)\|$ ; da  $b \in B_1 U_{b_1}$  und da  $B_1$  eine Kernmenge, gibt es eine Umgebung  $U_b \subseteq U_{b_1}$ , so daß die Menge  $M$  aller  $x \in B_1 U_b$  mit  $\|f(x) - f(b)\| < \delta$  dicht in  $U_b$ ; da aber  $\|f(x) - f(b_1)\| \leq \|f(x) - f(b)\| + \|f(b) - f(b_1)\| < \varepsilon_1$ , ist  $M \subseteq B_1, U_b \subseteq B_1, U_{b_1}$ , also auch  $M \subseteq B_2$ ; also ist  $B_2 U_b$  dicht in  $U_b$ , w. z. b. w. — Da also  $B_2$  eine Kernmenge, können wir mit  $B_2$  genau so verfahren, wie vorhin mit  $B_1$ , indem wir nur  $\varepsilon_1$  durch  $\varepsilon_2$  ersetzen: es gibt nach 9.7.2 in  $B_2$  ein  $\varepsilon_2$ -Netz  $C_2 \supseteq C_1$ , bestehend etwa aus den Punkten  $b_{21}, b_{22}, \dots, b_{2\nu}, \dots$ , und es gibt ein disjunktes System von Umgebungen  $U_{b_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), so daß, wenn  $B_{2\nu}$  die Menge aller  $x \in B_2$  mit  $\|f(x) - f(b_{2\nu})\| < \varepsilon_2$  bedeutet,  $B_{2\nu} U_{b_\nu}$  dicht in  $U_{b_\nu}$ . Setzen wir dann  $S U_{b_\nu} = G_2, B_3 = S B_{2\nu} U_{b_\nu} + (B_2 - G_2^0)$ ,

so ist  $B_3 \subseteq B_2$  und es ist auch  $B_3$  eine Kernmenge usw. Wir gelangen so zu einer monoton abnehmenden Folge  $((B_n))$  von Kernmengen für  $f$  und zu einer monoton wachsenden Mengenfolge  $((C_n))$ , wo  $C_n$  ein  $\varepsilon_n$ -Netz in  $B_n$ ; zufolge der Definition von  $B_{n+1}$  gibt es zu jedem  $a \in C_n$  eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon_n$  für alle  $x \in B_{n+1} U_a$ . Wir setzen nun  $A = S C_n$ ; da  $B_n$  dicht und  $C_n$  ein  $\varepsilon_n$ -Netz in  $B_n$ , ist wegen  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  auch  $A$  dicht. Wir haben noch zu zeigen, daß  $A$   $1f$  stetig. Sei  $a \in A^*$  und sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben; dann gibt es ein  $n^*$ , so daß  $a \in C_{n^*}$ ; da die  $C_n$  monoton wachsen, kann wegen  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  angenommen werden:  $\varepsilon_{n^*} < \varepsilon$ ; da  $a \in C_{n^*}$ , gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon_{n^*} (< \varepsilon)$  für  $x \in B_{n^*+1} U_a$ ; da die  $B_n$  monoton abnehmen, die  $C_n$  monoton wachsen, ist  $A \subseteq B_{n^*+1}$ , es gilt also  $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$  für alle  $x \in A U_a$ , d. h.  $A$   $1f$  ist stetig.

Als Gegenstück zu 27.5.4 zeigen wir noch:

**27.5.5.** Ist  $A$  separabel, so gibt es eine Funktion  $f$  auf  $A$ , so daß für keinen Teil  $A'$  von  $A$ , der die Mächtigkeit  $\aleph$  hat,  $A' 1f$  stetig ist.

Dies ist trivial, wenn  $A$  eine Mächtigkeit  $< \aleph$  hat. Wir nehmen also an, die Mächtigkeit von  $A$  sei  $\geq \aleph$ ; nach 13.2.1 ist sie dann  $= \aleph$ . Nach 13.2.5 gibt es  $\aleph$  in  $A$  offene Mengen, also nach 5.2.48 auch  $\aleph G_\delta$  in  $A$ . Nach 25.7.6 gibt es auf jedem  $G_\delta$  in  $A$   $\aleph$  stetige Funktionen,

und da nach § 5 (2.0)  $\aleph^2 = \aleph$  ist, hat auch die Menge aller stetigen Funktionen, deren Bereich ein  $G_\delta$  in  $A$  ist, die Mächtigkeit  $\aleph$ . Bezeichnet  $\gamma$  die kleinste Ordinalzahl der Mächtigkeit  $\aleph$ , so können also nach 8.3.2 sowohl die Punkte des  $\bar{R}_1$ , als auch die Punkte  $a \in A$ , als auch die stetigen Funktionen, deren Bereich ein  $G_\delta$  in  $A$  ist, ein-eindeutig den Ordinalzahlen  $\xi < \gamma$  zugeordnet werden; seien  $z_\xi$  ( $\xi < \gamma$ ) die sämtlichen Punkte des  $\bar{R}_1$ ,  $a_\xi$  ( $\xi < \gamma$ ) die sämtlichen Punkte  $a \in A$  und  $f_\xi$  ( $\xi < \gamma$ ) die sämtlichen stetigen Funktionen, deren Bereich ein  $G_\delta$  in  $A$  ist; der Bereich von  $f_\xi$  werde mit  $A_\xi$  bezeichnet. Wir definieren nun vermöge transfiniter Induktion (§ 7, 4) eine Funktion  $f$  auf  $A$  durch die Festsetzungen: 1.  $f(a_0) = z_0$ ; 2. ist  $f(a_{\eta'})$  definiert für alle  $\eta' < \eta$  ( $< \gamma$ ), so sei  $f(a_\eta)$  das erste  $z_\xi$ , das von allen  $f_{\eta'}(a_\eta)$  ( $\eta' < \eta$ ,  $a_\eta \in A_{\eta'}$ ) verschieden ist (ein solches  $z_\xi$  gibt es, weil die Menge der  $f_{\eta'}(a_\eta)$  ( $\eta' < \eta$ ,  $a_\eta \in A_{\eta'}$ ) eine Mächtigkeit  $< \aleph$  hat). Sei nun  $A'$  ein Teil von  $A$  der Mächtigkeit  $\aleph$ ; wir haben zu zeigen, daß  $A' \nmid f$  nicht stetig ist. Angenommen,  $A' \mid f$  wäre stetig; nach 22.4.3, 22.4.1, 23.4.1 gibt es dann ein  $\bar{A} \supseteq A'$ , das ein  $G_\delta$  in  $A$  ist, und eine stetige Funktion  $g$  auf  $\bar{A}$ , so daß  $A' \mid g = A' \mid f$ . Dann ist  $g$  eine unserer Funktionen  $f_\xi$ , etwa  $f_{\xi^*}$ , und  $\bar{A} = A_{\xi^*}$ . Da  $A'$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , die Menge der  $a_\xi$  mit  $\xi \leq \xi^*$  eine Mächtigkeit  $< \aleph$  hat, gibt es ein  $a_{\xi^{**}} \in A'$  mit  $\xi^{**} > \xi^*$ ; dann aber ist nach Definition von  $f$ :  $f(a_{\xi^{**}}) \neq f_{\xi^*}(a_{\xi^{**}})$ , d. h.  $f(a_{\xi^{**}}) \neq g(a_{\xi^{**}})$ , was unmöglich, da wegen  $a_{\xi^{**}} \in A'$ :  $g(a_{\xi^{**}}) = f(a_{\xi^{**}})$ .

Literatur: Satz 27.5.2 geht zurück auf W. H. Young Lond. Proc. (2) 8 (1910) S. 118; die Sätze 27.5.3, 27.5.4 stammen von H. Blumberg, Am. Trans. 24 (1922) S. 113; Satz 27.5.5 stammt von W. Sierpiński und A. Zygmund, Fund. math. 4 (1923) S. 316.

**6. Einseitige Hüllen.** Wir beschäftigen uns nun insbesondere mit Funktionen, deren Bereich eine lineare Punktmenge, d. h. eine Punktmenge  $A$  des  $R_1$  ist. Die Menge der linksseitigen (bzw. rechtsseitigen) Häufungspunkte von  $A$  (§ 24, 2) bezeichnen wir mit  $A_-^1$  (bzw.  $A_+^1$ ); die Menge der beiderseitigen Häufungspunkte ist dann  $A_-^1 A_+^1$ .

**27.6.1.** Die Mengen  $A^1 - A_-^1$ ,  $A^1 - A_+^1$ ,  $A^1 - A_-^1 A_+^1$  sind abzählbar.

Dies folgt unmittelbar aus 24.2.1.

Sei  $A$  eine lineare Punktmenge,  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $a \in A^1$ ; mit  $B$  bezeichnen wir die Menge aller  $x \in A$  mit  $x < a$ , und setzen  $B \mid f = g$ ; dann heißt die Hülle  $P_g^1(a)$  von  $g$  in  $a$  die linksseitige reduzierte Hülle  $P_{f-}^1(a)$  (oder kurz  $P_-^1(a)$ ) von  $f$  in  $a$ . Analog ist die Definition

der rechtsseitigen reduzierten Hülle  $P_{f+}^1(a)$  (oder kurz  $P_+^1(a)$ ) von  $f$  in  $a$ . Offenbar ist  $P^1(a) = P_-^1(a) + P_+^1(a)$ . Aus 26.1.2 folgt:

**27.6.2.** Die Mengen  $P_-^1(a)$ ,  $P_+^1(a)$  sind abgeschlossen im  $\bar{R}_1$ .

An Stelle von 27.5.2 tritt hier der schärfere Satz:

**27.6.21.** Die Menge  $C$  aller  $a \in A_-^1 A_+^1$ , für die  $P_-^1(a) \neq P_+^1(a)$  gilt, ist abzählbar.

Seien  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  die Intervalle  $[p, q]$  des  $\bar{R}_1$ , deren Randpunkte  $p, q$  rational oder  $= \pm \infty$  sind; sei ferner  $C_n$  (bzw.  $C'_n$ ) die Menge aller  $a \in A_-^1 A_+^1$ , für die  $P_-^1(a) I_n = \Lambda$ ,  $P_+^1(a) I_n \supset \Lambda$  (bzw.  $P_+^1(a) I_n = \Lambda$ ,  $P_-^1(a) I_n \supset \Lambda$ ). Wie beim Beweise von 27.5.2 sieht man, daß  $C = \bigcup_n (C_n + C'_n)$ ; es genügt also zu zeigen, daß  $C_n$  und  $C'_n$  abzählbar; wir zeigen es für  $C_n$ . Sei also  $a \in C_n$ ; dann ist  $P_-^1(a) I_n = \Lambda$ . Bezeichnen wir mit  $G$  die Menge aller  $x \in A$  mit  $x < a$  und setzen  $G \mid f = g$ , so sehen wir, wie beim Beweise von 27.5.2, daß die Menge aller  $x \in G^0$ , für die  $P_-^0(x) I_n = \Lambda$  ist, offen in  $G^0$  ist. Daraus folgt, daß es ein Intervall  $(a - \sigma, a)$  gibt, so daß auch  $P_{f+}^1(x) I_n = \Lambda$  für alle  $x \in (a - \sigma, a) A_+^1$ ; somit ist auch  $(a - \sigma, a) C_n = \Lambda$ . Zu jedem  $a \in C_n$  gibt es also ein Intervall  $(a - \sigma, a)$ , so daß  $(a - \sigma, a) C_n = \Lambda$ . Da es aber im  $R_1$  nur abzählbar viele fremde Intervalle gibt, ist  $C_n$  abzählbar, w. z. b. w.

Literatur: Satz 27.6.21 stammt von W. H. Young, Quart. Journ. 39 (1907) S. 67; Rend. Linc. 17/1 (1908) S. 582.

**7. Einseitige Schrankenfunktionen.** Sei wieder  $A$  eine lineare Punktmenge,  $f$  eine Funktion auf  $A$ . Da  $P_-^1(a)$  und  $P_+^1(a)$  nach 27.6.2 abgeschlossen, gibt es unter den Zahlen von  $P_-^1(a)$  und von  $P_+^1(a)$  je eine größte und eine kleinste; wir bezeichnen sie mit  $\bar{f}_-^1(a)$ ,  $f_-^1(a)$ ,  $\bar{f}_+^1(a)$ ,  $f_+^1(a)$  und nennen sie die linksseitige (bzw. rechtsseitige) obere (bzw. untere) reduzierte Schranke von  $f$  in  $a$ ; betrachtet man sie als Funktionen auf  $A_-^1$  (bzw. auf  $A_+^1$ ), so heißen sie linksseitige (bzw. rechtsseitige) obere (bzw. untere) reduzierte Schrankenfunktion von  $f$ .

Sei  $a \in A_-^1$ , sei  $B$  die Menge aller  $x \in A$  mit  $x < a$  und  $g = B \mid f$ . Ist dann  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$ , so heißt  $b$  linksseitiger Grenzwert von  $f$  in  $a$ , in Zeichen:  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ , oder auch  $f(a-0)$ . Analog ist die Definition des rechtsseitigen Grenzwertes  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  oder  $f(a+0)$ . Wir sagen:

$f$  hat in  $a$  einen einseitigen Grenzwert, wenn  $f$  in  $a$  sei es einen rechtsseitigen, sei es einen linksseitigen Grenzwert hat. Ist  $a \in A_-^1 A_+^1$ , so ist das Bestehen von  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  gleichbedeutend mit

dem gleichzeitigen Bestehen von  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$  und  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ . Offenbar gilt:

**27.7.1.** Ist  $a \in A_-^1$  (bzw.  $a \in A_+^1$ ), so ist, damit  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = b$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = b$ ) sei, notwendig und hinreichend, daß  $\bar{f}_-^1(a) = \underline{f}_-^1(a) = b$  (bzw.  $\bar{f}_+^1(a) = \underline{f}_+^1(a) = b$ ) sei.

**27.7.2.** Ist  $A$  eine Youngsche Menge, und ist die Menge  $C$  aller  $a \in A_h$  (bzw. aller  $a \in A^1$ ), in denen  $f$  einen einseitigen Grenzwert hat, dicht in  $A_h$  (bzw. in  $A^1$ ), so ist  $f$  punktweise unstetig.

Nach 26.5.21 genügt es, zu zeigen: für jedes  $k > 0$  ist die Menge  $B_k$  aller  $a \in A$  mit  $\omega(a) \geq k$  nirgends dicht in  $A$ . Da  $B_k$  nach 26.3.41 abgeschlossen in  $A$ , genügt es weiter zufolge 11.2.51, zu zeigen: die Menge  $A - B_k$  ist dicht in  $A$ . Nach 11.1.3 ist also zu zeigen: ist  $G$  offen und  $A \cap G \supset A$ , so gibt es ein  $a \in A \cap G$  mit  $\omega(a) < k$ . Dies ist trivial, wenn  $A \cap G \supset A$ , denn in jedem Punkte  $a \in A \cap G$  ist  $\omega(a) = 0 < k$ . Sei also  $A \cap G = A$ , d. h.  $A \cap G = A_h \cap G$ . Da  $A_h \cap G \supset A$  und offen in  $A_h$ , und da  $C$  dicht in  $A_h$ , gibt es nach 11.1.3 ein  $c \in C \cap A_h \cap G$ . In  $c$  hat  $f$  einen einseitigen, etwa den linksseitigen Grenzwert; daher gibt es ein Intervall  $(c - \sigma, c)$ , so daß  $A \cap (c - \sigma, c) \supset A$  und  $\|f(x') - f(x'')\| \leq \frac{k}{2}$  für alle  $x' \in A \cap (c - \sigma, c)$ ,  $x'' \in A \cap (c - \sigma, c)$ ; dabei können wir sofort annehmen:  $(c - \sigma, c) \subseteq G$ . Für jedes  $a \in A \cap (c - \sigma, c)$  aber gilt nach 26.3.11:  $\omega(a) \leq \frac{k}{2}$ ; und da  $A \cap (c - \sigma, c) \subseteq A \cap G$ , gibt es also ein  $a \in A \cap G$  mit  $\omega(a) < k$ , w. z. b. w.

In Anlehnung an 25.6.2 definieren wir: ist  $a \in A_-^1$  (bzw.  $a \in A_+^1$ ) und gilt  $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$  (bzw.  $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ), so heißt  $f$  linksseitig (bzw. rechtsseitig) stetig in  $a$ .

Ein Unstetigkeitspunkt  $a$  von  $f$  heißt von erster Art, wenn, falls  $a \in A_-^1$  ist, ein linksseitiger, und falls  $a \in A_+^1$  ist, ein rechtsseitiger Grenzwert von  $f$  in  $a$  existiert.

**27.7.3.** Sind sämtliche Unstetigkeitspunkte von  $f$  von erster Art, so hat  $f$  nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte.

Wegen 27.6.1 brauchen wir nur die Punkte von  $A \cap A_-^1 \cap A_+^1$  in Betracht zu ziehen. Nach 27.7.1 gilt für alle  $a \in A \cap A_-^1 \cap A_+^1$ :  $\bar{f}_-^1(a) = \underline{f}_-^1(a)$ ,  $\bar{f}_+^1(a) = \underline{f}_+^1(a)$ , also zufolge 27.6.21 mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen:

$$\bar{f}_-^1(a) = \underline{f}_-^1(a) = \bar{f}_+^1(a) = \underline{f}_+^1(a), \text{ d. h. } \bar{f}^1(a) = \underline{f}^1(a);$$

da jede Punktmenge des  $R_1$  separabel ist, gilt daher nach 27.2.2 weiter für alle  $a \in A \setminus A_+^1$  mit höchstens abzählbar vielen Ausnahmen:  $\bar{f}^1(a) = f^1(a) = f(a)$ , d. h. nach 27.2.3  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ; daraus folgt die Behauptung nach 25.6.2.

Literatur: Satz 27.7.2 stammt von U. Dini, *Grundl. f. e. Theorie d. Funkt. einer veränderl. reellen Größe* (1892) § 151.

## § 28. Konvergente Funktionenfolgen.

1. **Uniforme, einfach-gleichmäßige, völlig uniforme Konvergenz.** Wir betrachten nun eine Folge reeller Funktionen  $f_v$ , deren Bereich die Punktmenge  $A$  eines metrischen Raumes ist. Ist  $a \in A$  und gibt es ein  $b \in R_1$ , so daß  $f_v(a) \rightarrow b$ , so heißt die Funktionenfolge  $((f_v))$  konvergent im Punkte  $a$ , und der Punkt  $a$  heißt ein Konvergenzpunkt von  $((f_v))$ ; die übrigen Punkte von  $A$  heißen Divergenzpunkte von  $((f_v))$ . Ist die Folge  $((f_v))$  konvergent in jedem Punkte von  $A$ , so heißt sie konvergent (oder ausführlicher: konvergent auf  $A$ ); dann ist  $\lim_v f_v(a)$  eine Funktion auf  $A$ , die als die Grenzfunktion der Folge  $((f_v))$  bezeichnet wird. Wir behandeln nun Bedingungen, unter denen aus der Stetigkeit der Funktionen  $f_v$  einer konvergenten Funktionenfolge die Stetigkeit ihrer Grenzfunktion folgt.

Sei  $((f_v))$  eine konvergente Folge von Funktionen auf  $A$ . Wir sagen: die Folge  $((f_v))$  konvergiert im Punkte  $a \in A^0$  uniform gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $v$  und eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ . Wir sagen: die Folge  $((f_v))$  konvergiert im Punkte  $a \in A^0$  einfach-gleichmäßig gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  und jedem  $v_0$  ein  $v \geq v_0$  und eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ . Wir sagen: die Folge  $((f_v))$  konvergiert im Punkte  $a \in A^0$  völlig uniform gegen  $f$ , wenn zu jedem  $\delta > 0$  ein  $v_\delta$  gehört, so daß es zu jedem  $v \geq v_\delta$  ein  $U_{a,v}$  gibt, so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_{a,v}$ . — Wenn  $((f_v))$  im Punkte  $a \in A^0$  völlig uniform gegen  $f$  konvergiert, so auch einfach-gleichmäßig, und wenn einfach-gleichmäßig, so auch uniform.

**28.1.1.** Ist  $f = \lim_v f_v$  und sind alle  $f_v$  stetig im Punkte  $a \in A$ , so ist, damit auch  $f$  stetig sei in  $a$ , notwendig und hinreichend, daß  $((f_v))$  in  $a$  uniform (oder einfach-gleichmäßig, oder völlig uniform) gegen  $f$  konvergiere.

Notwendig: Wegen  $\lim_v f_v(a) = f(a)$  gibt es ein  $v_\delta$ , so daß

$$\|f_v(a) - f(a)\| < \frac{\delta}{3} \text{ für } v \geq v_\delta;$$

weil  $f$  und alle  $f_\nu$  stetig sind, gibt es ein  $U_{a,\nu}$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f_\nu(a)\| < \frac{\delta}{3}$  und  $\|f(x) - f(a)\| < \frac{\delta}{3}$  für alle  $x \in A \cap U_{a,\nu}$ ; also ist:  $\|f_\nu(x) - f(x)\| \leq \|f_\nu(x) - f_\nu(a)\| + \|f_\nu(a) - f(a)\| + \|f(a) - f(x)\| < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$  und alle  $x \in A \cap U_{a,\nu}$ ; also konvergiert  $((f_\nu))$  in  $a$  völlig uniform, mithin auch einfach-gleichmäßig und uniform gegen  $f$ . Hinreichend: Konvergiert  $((f_\nu))$  in  $a$  uniform (oder einfach-gleichmäßig, oder völlig uniform) gegen  $f$ , so gibt es ein  $\nu$  und ein  $U_a$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; insbesondere ist also  $\|f_\nu(a) - f(a)\| < \delta$ ; weil  $f_\nu$  stetig in  $a$ , gibt es eine Umgebung  $U_a^*$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f_\nu(a)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a^*$ . Also ist  $\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - f_\nu(x)\| + \|f_\nu(x) - f_\nu(a)\| + \|f_\nu(a) - f(a)\| < 3\delta$  für alle  $x \in A \cap U_a \cap U_a^*$ , d. h.  $f$  ist stetig in  $a$ .

**28-1-2.** Ist  $((f_\nu))$  eine konvergente Funktionenfolge und sind alle  $f_\nu$  stetig im Punkte  $a \in A$ , so sind die Aussagen: „Die Folge  $((f_\nu))$  konvergiert in  $a$  uniform, bzw. einfach-gleichmäßig, bzw. völlig uniform gegen ihre Grenzfunktion  $f$ “ äquivalent.

Denn jede dieser drei Aussagen ist zufolge 28-1-1 äquivalent der Aussage: „ $f$  ist stetig in  $a$ “.

**28-1-3.** Konvergiert die Funktionenfolge  $((f_\nu))$  im Punkte  $a \in A^1$  uniform gegen ihre Grenzfunktion  $f$  und existiert für jedes  $\nu$  der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f_\nu(x)$ , so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Wegen der uniformen Konvergenz gibt es ein  $\nu$  und ein  $U_a$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; wegen der Existenz von  $\lim_{x \rightarrow a} f_\nu(x)$  gibt es eine Umgebung  $U_a^*$ , so daß  $\|f_\nu(x') - f_\nu(x'')\| < \delta$  für alle  $x' \in A \cap U_a^*$ ,  $x'' \in A \cap U_a^*$ . Also gilt für alle  $x' \in A \cap U_a \cap U_a^*$ ,  $x'' \in A \cap U_a \cap U_a^*$ :

$$\|f(x') - f(x'')\| \leq$$

$$\|f(x') - f_\nu(x')\| + \|f_\nu(x') - f_\nu(x'')\| + \|f_\nu(x'') - f(x'')\| < 3\delta,$$

also existiert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

**28-1-31.** Konvergiert die Funktionenfolge  $((f_\nu))$  im Punkte  $a \in A^1$  völlig uniform gegen ihre Grenzfunktion  $f$  und existiert für jedes  $\nu$  der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f_\nu(x) = l_\nu$ , so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , und es gilt:  $l_\nu \rightarrow l$ .

Wegen 28-1-3 ist nur mehr zu zeigen:  $l_\nu \rightarrow l$ . Wegen der völlig uniformen Konvergenz gibt es ein  $\nu_\delta$  und ein  $U_{a,\nu}$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$  und alle  $x \in A \cap U_{a,\nu}$ ; daraus folgt:  $\|l_\nu - l\| \leq \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , d. h.  $l_\nu \rightarrow l$ , w. z. b. w.



Dieser Satz ist ein Spezialfall des Satzes:

**28.1.4.** Konvergiert die Funktionenfolge  $((f_\nu))$  im Punkte  $a \in A^0$  (bzw.  $a \in A^1$ ) völlig uniform gegen ihre Grenzfunktion  $f$ , so gilt für die Hüllen (§ 26, 1):  $\lim_{\nu} P_{f_\nu}^0(a) = P_f^0(a)$  (bzw. für die reduzierten Hüllen:  $\lim_{\nu} P_{f_\nu}^1(a) = P_f^1(a)$ ).

Denn zu jedem  $\delta > 0$  gibt es ein  $\nu_\delta$  und ein  $U_{a,\nu}$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$  und alle  $x \in A U_{a,\nu}$ ; nach 26.1.3 ist also  $e(P_{f_\nu}^0(a), P_f^0(a)) \leq \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , somit nach 17.1.7  $\lim_{\nu} P_{f_\nu}^0(a) = (P_f^0(a))^0$ , und nach 26.1.2 ist  $(P_f^0(a))^0 = P_f^0(a)$ .

Literatur: E. W. Hobson, The theory of functions of a real variable (Cambridge 1907) S. 489; F. Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre S. 386.

**2. Quasigleichmäßige Konvergenz.** Sei wieder  $((f_\nu))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$  und  $f$  ihre Grenzfunktion. Wir sagen: die Folge  $((f_\nu))$  konvergiert quasigleichmäßig gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  und jedem  $\nu_0$  ein  $\nu'_0 > \nu_0$  gibt, so daß für jedes  $x \in A$  mindestens eine der  $\nu'_0 - \nu_0 + 1$  Ungleichungen gilt:  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  ( $\nu_0 \leq \nu \leq \nu'_0$ ).

**28.2.1.** Konvergiert die Folge  $((f_\nu))$  quasigleichmäßig gegen  $f$ , so konvergiert sie in jedem Punkte  $a \in A$ , in dem alle  $f_\nu$  stetig sind, völlig uniform (und mithin auch einfach-gleichmäßig und uniform) gegen  $f$ .

Wegen der Konvergenz von  $((f_\nu))$  gibt es ein  $\nu_0$ , so daß

$$(2) \quad \|f_\nu(a) - f_{\nu_0}(a)\| < \delta \text{ für } \nu \geq \nu_0.$$

Weil die Konvergenz quasigleichmäßig ist, gibt es ein  $\nu'_0 > \nu_0$ , und zu jedem  $x \in A$  einen der Ungleichung  $\nu_0 \leq \nu_x \leq \nu'_0$  genügenden Index  $\nu_x$ , so daß  $\|f_{\nu_x}(x) - f(x)\| < \delta$ . Wegen der Stetigkeit der  $f_\nu$  gibt es zufolge (2) ein  $U_a$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f_{\nu_0}(x)\| < \delta$  für  $\nu_0 \leq \nu \leq \nu'_0$  und alle  $x \in A U_a$ . Also gilt für alle  $x \in A U_a$ :

$$\|f_{\nu_0}(x) - f(x)\| \leq \|f_{\nu_0}(x) - f_{\nu_x}(x)\| + \|f_{\nu_x}(x) - f(x)\| < 2\delta,$$

d. h.  $((f_\nu))$  konvergiert in  $a$  uniform, und somit nach 28.1.2 auch völlig uniform gegen  $f$ .

Umgekehrt gilt:

**28.2.11.** Ist  $A$  in sich kompakt und konvergiert die Folge  $((f_\nu))$  in jedem Punkte  $a \in A$  einfach-gleichmäßig (oder völlig uniform) gegen  $f$ , so konvergiert sie quasigleichmäßig gegen  $f$ .

Nach Annahme gibt es zu jedem  $\delta > 0$ , jedem  $a \in A$  und jedem  $\nu_0$  ein  $U_a$  und ein  $\nu_a \geq \nu_0$ , so daß  $\|f_{\nu_a}(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A U_a$ . Nach 15.5.11 gibt es im System der  $A U_a$  ein endliches,  $A$  überdeckendes Teilsystem, etwa  $A U_{a_1}, A U_{a_2}, \dots, A U_{a_n}$ . Für jedes  $x \in A$  gilt also mindestens eine der

$n$  Ungleichungen:  $\|f_{\nu_{a_i}}(x) - f(x)\| < \delta$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), und somit, wenn wir  $\max(\nu_{a_1}, \nu_{a_2}, \dots, \nu_{a_n}) = \nu'_0$  setzen, mindestens eine der Ungleichungen  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  ( $\nu_0 \leq \nu \leq \nu'_0$ ), d. h.  $((f_\nu))$  konvergiert quasigleichmäßig gegen  $f$ .

**28-2-2.** Ist  $((f_\nu))$  eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf  $A$ , so ist, damit auch  $f = \lim_\nu f_\nu$  stetig sei, hinreichend und, wenn  $A$  in sich kompakt ist, auch notwendig, daß  $((f_\nu))$  quasigleichmäßig gegen  $f$  konvergiere.

Notwendig: Dies folgt aus 28-1-1 und 28-2-11. Hinreichend: Dies folgt aus 28-2-1 und 28-1-1.

Literatur: Der Inhalt dieser Nummer geht zurück auf C. Arzelà, Rend. Bol. (1) 19 (1883/84) S. 83; Mem. Bol. (5) 8 (1899/1900) S. 131.

**3. Gleichmäßige Konvergenz in einem Punkte.** Sei wieder  $((f_\nu))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$  und  $f$  ihre Grenzfunktion. Wir sagen: die Folge  $((f_\nu))$  konvergiert im Punkte  $a \in A^0$  gleichmäßig gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\nu_\delta$  und eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$  und alle  $x \in A \cap U_a$ . Die Folge  $((f_\nu))$  heißt gleichmäßig konvergent im Punkte  $a \in A^0$ , wenn es eine Funktion  $f$  auf  $A$  gibt, so daß  $((f_\nu))$  im Punkte  $a$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert.

Konvergiert  $((f_\nu))$  in  $a$  gleichmäßig gegen  $f$ , so auch völlig uniform, und mithin auch einfach-gleichmäßig und uniform. Umgekehrt gilt:

**28-3-1.** Konvergiert die monotone<sup>1)</sup> Funktionenfolge  $((f_\nu))$  im Punkte  $a \in A^0$  uniform (oder einfach-gleichmäßig, oder völlig uniform) gegen  $f$ , so konvergiert sie auch gleichmäßig in  $a$  gegen  $f$ .

Denn zu jedem  $\delta > 0$  gibt es ein  $\nu_\delta$  und eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\|f_{\nu_\delta}(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; da  $((f_\nu))$  monoton, gilt dann aber auch:  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$  und alle  $x \in A \cap U_a$ .

In 28-1-1 und 28-1-31 sind die beiden Sätze enthalten:

**28-3-2.** Konvergiert  $((f_\nu))$  im Punkte  $a \in A$  gleichmäßig gegen  $f$ , und sind alle  $f_\nu$  stetig in  $a$ , so ist auch  $f$  stetig in  $a$ .

**28-3-3.** Konvergiert  $((f_\nu))$  im Punkte  $a \in A^1$  gleichmäßig gegen  $f$ , und existiert für jedes  $\nu$  der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f_\nu(x) = l_\nu$ , so existiert auch der Grenzwert  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$ , und es gilt:  $l_\nu \rightarrow l$ .

<sup>1)</sup> Die Funktionenfolge  $((f_\nu))$  auf  $A$  heißt monoton wachsend (abnehmend), wenn für alle  $\nu$  und alle  $x \in A$  gilt:  $f_{\nu+1}(x) \geq f_\nu(x)$  (bzw.  $f_{\nu+1}(x) \leq f_\nu(x)$ ).

**28-3-4.** Ist  $((f_\nu))$  eine monoton wachsende (bzw. abnehmende) Folge monoton wachsender (bzw. abnehmender) Funktionen<sup>1)</sup> im Intervalle  $(a, b)$  des  $\bar{R}_1$ , so konvergiert sie in  $b$  gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion. Ist  $((f_\nu))$  eine monoton wachsende (bzw. abnehmende) Folge monoton abnehmender (bzw. wachsender) Funktionen im Intervalle  $(a, b)$  des  $\bar{R}_1$ , so konvergiert sie in  $a$  gleichmäßig gegen ihre Grenzfunktion.

Sei  $\lim_{\nu} f_\nu = f$ ; ebenso wie die  $f_\nu$  ist auch  $f$  monoton wachsend; es existieren also die Grenzwerte  $f_\nu(b-0)$ ,  $f(b-0)$ . Wir zeigen zunächst:  $f_\nu(b-0) \rightarrow f(b-0)$ . Weil  $((f_\nu))$  monoton wächst, gilt jedenfalls  $f_\nu(b-0) \leq f(b-0)$  für alle  $\nu$ ; sei sodann  $q < f(b-0)$ ; dann gibt es ein  $x \in (a, b)$ , so daß auch  $f(x) > q$ ; mithin ist auch  $f_\nu(x) > q$  für fast alle  $\nu$ ; weil die  $f_\nu$  monoton wachsen, ist also auch  $f_\nu(b-0) > q$  für fast alle  $\nu$ ; d. h. es gilt  $f_\nu(b-0) \rightarrow f(b-0)$ , wie behauptet. Es gibt also ein  $\nu_\delta$ , so daß  $\|f_{\nu_\delta}(b-0) - f(b-0)\| < \delta$ ; wegen

$$\|f_{\nu_\delta}(x) - f(x)\| \leq \|f_{\nu_\delta}(b-0) - f(b-0)\| + \|f_{\nu_\delta}(x) - f_{\nu_\delta}(b-0)\| + \|f(x) - f(b-0)\|$$

gibt es dann auch ein Intervall  $(c, b)$ , so daß  $\|f_{\nu_\delta}(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in (c, b)$ ; weil  $((f_\nu))$  monoton wachsend, ist dann auch  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in (c, b)$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , d. h.  $((f_\nu))$  konvergiert in  $b$  gleichmäßig gegen  $f$ .

**4. Gleichmäßige Konvergenz.** Ist  $((f_\nu))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$  und  $f$  ihre Grenzfunktion, so sagen wir: die Folge  $((f_\nu))$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\nu_\delta$  gibt, so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ . Ist  $((f_\nu))$  eine Funktionenfolge auf  $A$  und gibt es eine Funktion auf  $A$ , gegen die  $((f_\nu))$  gleichmäßig konvergiert, so heißt die Folge  $((f_\nu))$  gleichmäßig konvergent.

**28-4-1.** Damit  $((f_\nu))$  gleichmäßig konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\nu_\delta$  gebe, so daß  $\|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ ,  $\nu' \geq \nu_\delta$ .

Notwendig: Nach Annahme gibt es eine Funktion  $f$ , gegen die  $((f_\nu))$  gleichmäßig konvergiert; es gibt also ein  $\nu_\delta$ , so daß  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \frac{\delta}{2}$  für alle  $x \in A$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ . Also gilt für alle  $x \in A$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ ,  $\nu' \geq \nu_\delta$ :

$$\|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)\| \leq \|f_\nu(x) - f(x)\| + \|f(x) - f_{\nu'}(x)\| < \delta.$$

<sup>1)</sup> Eine Funktion  $g$  im Intervalle  $(a, b)$  des  $\bar{R}_1$  heißt monoton wachsend (bzw. abnehmend), wenn aus  $a < x < x' < b$  folgt  $g(x) \leq g(x')$  (bzw.  $g(x) \geq g(x')$ ).

Hinreichend: Jedenfalls ist die Funktionenfolge  $((f_\nu))$  konvergent; sei  $f$  ihre Grenzfunktion. Da  $\|f_\nu(x) - f_{\nu'}(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ ,  $\nu' \geq \nu_\delta$ , so folgt durch den Grenzübergang  $\nu' \rightarrow \infty$ :  $\|f_\nu(x) - f(x)\| \leq \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , d. h.  $((f_\nu))$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ .

**28-4-2.** *Damit die Folge  $((f_\nu))$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiere, ist notwendig und, wenn  $A$  in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß sie in jedem Punkte  $a \in A$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiere.*

Notwendig: Dies ist trivial. Hinreichend: Zu jedem  $a \in A$  gibt es ein  $\nu_a$  und ein  $U_a$ , so daß:  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_a$ . Nach 15-5-11 gibt es im System der  $U_a$  ein endliches,  $A$  überdeckendes Teilsystem, etwa  $U_{a_1}, U_{a_2}, \dots, U_{a_n}$ . Setzen wir  $\max(\nu_{a_1}, \nu_{a_2}, \dots, \nu_{a_n}) = \nu_\delta$ , so gilt  $\|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , d. h.  $((f_\nu))$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ .

**28-4-3.** *Konvergiert  $((f_\nu))$  gleichmäßig gegen  $f$ , und sind alle  $f_\nu$  stetig, so ist auch  $f$  stetig.*

Dies folgt aus 28-2-2; denn konvergiert  $((f_\nu))$  gleichmäßig gegen  $f$ , so auch quasigleichmäßig.

Sei  $(b, c)$  ein Intervall des  $\bar{R}_1$  und sei  $f(x, t)$  eine Funktion auf  $A$  für jedes  $t \in (b, c)$ . Wir sagen:  $f(x, t)$  konvergiert für  $t \rightarrow c - 0$  gleichmäßig gegen die Funktion  $f(x)$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein Intervall  $(c_\delta, c)$  gibt, so daß  $\|f(x, t) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $t \in (c_\delta, c)$ . Wir sagen:  $f(x, t)$  ist für  $t \rightarrow c - 0$  gleichmäßig konvergent, wenn es eine Funktion  $f(x)$  gibt, gegen die  $f(x, t)$  für  $t \rightarrow c - 0$  gleichmäßig konvergiert. Analog ist die Definition der gleichmäßigen Konvergenz für  $t \rightarrow b + 0$ .

**28-4-4.** *Damit  $f(x, t)$  für  $t \rightarrow c - 0$  (bzw. für  $t \rightarrow b + 0$ ) gleichmäßig konvergent sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein Intervall  $(c_\delta, c)$  (bzw. ein Intervall  $(b, b_\delta)$ ) gebe, so daß  $\|f(x, t) - f(x, t')\| < \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $t$  und  $t'$  aus  $(c_\delta, c)$  (bzw. aus  $(b, b_\delta)$ ).*

Der Beweis ist analog dem von 28-4-1.

**28-4-5.** *Damit  $f(x, t)$  für  $t \rightarrow c - 0$  (bzw. für  $t \rightarrow b + 0$ ) gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß für jede Folge  $((t_\nu))$  aus  $(b, c)$  mit  $t_\nu \rightarrow c$  (bzw. mit  $t_\nu \rightarrow b$ ) die Folge der Funktionen  $f(x, t_\nu)$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiere.*

Notwendig: Nach Annahme gibt es ein Intervall  $(c_\delta, c)$ , so daß  $\|f(x, t) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A$  und alle  $t \in (c_\delta, c)$ ; wegen  $t_\nu \rightarrow c$  aber gibt es ein  $\nu^*$ , so daß  $t_\nu \in (c_\delta, c)$  für  $\nu \geq \nu^*$ ; also ist:  $\|f(x, t_\nu) - f(x)\| < \delta$  für  $\nu \geq \nu^*$  und alle  $x \in A$ ; d. h. die Folge  $f(x, t_\nu)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ . Hinreichend: Sei  $((c_\nu))$  eine Folge aus  $(b, c)$  mit  $c_\nu \rightarrow c$ . Wenn  $f(x, t)$

für  $t \rightarrow c - 0$  nicht gleichmäßig gegen  $f(x)$  konvergiert, so gibt es ein  $\delta > 0$ , und in jedem Intervall  $(c, c)$  ein  $t_v$ , so daß nicht  $\|f(x, t_v) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A$  gilt; dann ist  $t_v \rightarrow c$  und die Folge  $f(x, t_v)$  ( $v = 1, 2, \dots$ ) konvergiert nicht gleichmäßig gegen  $f(x)$ .

**28-4-6.** Konvergiert  $f(x, t)$  für  $t \rightarrow c - 0$  (oder für  $t \rightarrow b + 0$ ) gleichmäßig gegen  $f(x)$ , und ist  $f(x, t)$  für jedes  $t \in (b, c)$  eine stetige Funktion von  $x$ , so ist auch  $f(x)$  stetig.

Dies folgt aus 28-4-5 und 28-4-3.

**5. Der Ungleichmäßigkeitsgrad.** Sei wieder  $((f_v))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$ ,  $f$  ihre Grenzfunktion, und sei  $a \in A^0$ . Sei  $\chi(a)$  das Infimum aller Zahlen  $z$ , zu denen es ein  $U_a$  und ein  $\nu^*$  gibt, so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| < z$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu^*$  (solche Zahlen  $z$  gibt es sicher: jedes  $z > 0$  ist eine solche Zahl); wir nennen  $\chi(a)$  den Ungleichmäßigkeitsgrad von  $((f_v))$  im Punkte  $a$ . Es ist  $0 \leq \chi(a) \leq 2$ ; in jedem Punkte  $a \in A$  ist  $\chi(a) = 0$ . Ist  $z < \chi(a)$  so gibt es in jeder Umgebung  $U_a$  zu jedem  $\nu^*$  ein  $x \in A \cap U_a$  und ein  $\nu \geq \nu^*$ , so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| \geq z$ . Ist  $((f_{v_i}))$  eine Teilfolge von  $((f_v))$  und  $\chi^*(a)$  der Ungleichmäßigkeitsgrad von  $((f_{v_i}))$ , so ist  $\chi^*(a) \leq \chi(a)$ .

**28-5-1.** Damit  $((f_v))$  im Punkte  $a \in A^0$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiere, ist notwendig und hinreichend, daß  $\chi(a) = 0$  sei.

Denn  $\chi(a) = 0$  bedeutet: zu jedem  $z > 0$  gibt es ein  $U_a$  und ein  $\nu^*$ , so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| < z$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu^*$ .

**28-5-2.** Für jedes  $k$  ist die Menge aller  $a \in A^0$  mit  $\chi(a) \geq k$  abgeschlossen.

Sei  $B$  diese Menge und  $b \in B^0$ . In jeder Umgebung  $U_b$  gibt es ein  $a \in B$ ; da  $U_b$  auch eine Umgebung von  $a$ , gibt es wegen  $\chi(a) \geq k$  zu jedem  $z < k$  und zu jedem  $\nu^*$  ein  $x \in A \cap U_b$  und ein  $\nu \geq \nu^*$ , so daß  $\|f_v(x) - f(x)\| \geq z$ ; also muß  $\chi(b) \geq k$  sein; d. h.  $b \in B$ . Aus  $b \in B^0$  folgt also  $b \in B$ , somit ist  $B$  abgeschlossen.

Aus 28-5-2 folgt unmittelbar:

**28-5-21.** Für jedes  $k$  ist die Menge aller  $a \in A$  mit  $\chi(a) \geq k$  abgeschlossen in  $A$  und, wenn  $k > 0$  ist, auch abgeschlossen in  $A_h$ .

Literatur: Der Ungleichmäßigkeitsgrad wurde eingeführt von W. F. Osgood, Am. Journ. 19 (1897) S. 164.

**6. Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz.** Ist wieder  $((f_v))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$ , so bezeichnen wir auf Grund

von 28.5.1 den Punkt  $a \in A$  als einen Punkt gleichmäßiger oder ungleichmäßiger Konvergenz, je nachdem  $\chi(a) = 0$  oder  $\chi(a) > 0$ .

**28.6.1.** Ist  $((f_\nu))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$ , so ist die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von  $((f_\nu))$  ein  $F_\sigma$  in  $A$  und in  $A_h$ , und die Menge aller Punkte gleichmäßiger Konvergenz von  $((f_\nu))$  ein  $G_\delta$  in  $A$ .

Der Beweis ist analog dem von 26.4.1 und 26.4.11.

Die konvergente Funktionenfolge  $((f_\nu))$  auf  $A$  heißt total ungleichmäßig konvergent, wenn jeder Punkt  $a \in A$  ein Punkt ungleichmäßiger Konvergenz ist.

**28.6.2.** Ist  $A \supset \Lambda$  und insichdicht, und ist  $z \neq 0$ , so gibt es auf  $A$  eine total ungleichmäßig konvergente Folge von Funktionen  $g_\nu$ , die nur die Werte 0 und  $z$  annehmen, mit  $\lim g_\nu = 0$ .

Nach 12.4.61 gibt es eine Zerlegung  $A = \bigcup A_\nu$  von  $A$  in  $\aleph_0$  disjunkte, in  $A$  dichte Teile. Sei  $g_\nu = z$  auf  $A_\nu$ ,  $g_\nu = 0$  auf  $A - A_\nu$ . Dann ist  $\lim g_\nu(a) = 0$  für alle  $a \in A$ , und da  $A_\nu \cap U_a \supset \Lambda$  ist für jede Umgebung  $U_a$  und alle  $\nu$ , und  $g_\nu(x) = z$  ist für alle  $x \in A_\nu$ , ist  $\chi(a) = \|z - 0\| > 0$  für alle  $a \in A$ .

**28.6.21.** Ist  $B$  abgeschlossen in  $A_h$  und  $z \neq 0$ , so gibt es auf  $A$  eine Folge von Funktionen  $f_\nu$ , die nur die Werte 0 und  $z$  annehmen, mit  $\lim f_\nu = 0$ , so daß  $\chi(a) > 0$  für  $a \in B$ ,  $\chi(a) = 0$  für  $a \in A - B$ .

Seien  $B'$ ,  $B''$  insichdichter Kern und separierter Bestandteil von  $B$  (§ 12, 7). Falls  $B' \supset \Lambda$ , gibt es nach 28.6.2 auf  $B'$  eine total ungleichmäßig konvergente Folge von Funktionen  $g_\nu$ , die nur die Werte 0 und  $z$  annehmen, mit  $g_\nu \rightarrow 0$ . Wir definieren nun eine Funktionenfolge  $((f_\nu))$  auf  $A$  durch:  $f_\nu(x) = g_\nu(x)$  für  $x \in B'$ ;  $f_\nu(x) = 0$  für  $x \in B''$ ;  $f_\nu(x) = z$  für  $x \in A - B$  und  $x \in B - \frac{1}{\nu}$ ;  $f_\nu(x) = 0$  für  $x \in A - B$  und  $x \in B \geq \frac{1}{\nu}$ . Wir zeigen zunächst, daß für alle  $x \in A$  gilt:  $f_\nu(x) \rightarrow 0$ ; dies bedarf eines Beweises nur für  $x \in A - B$ ; sei also  $x \in A - B$ ; da  $B$  abgeschlossen in  $A_h$ , also wegen 12.2.3 auch in  $A$ , ist dann nach 10.5.62  $x \in B > 0$ , also  $\frac{1}{\nu} \leq x \in B$  für fast alle  $\nu$ , also  $f_\nu(x) = 0$  für fast alle  $\nu$ , also  $f_\nu(x) \rightarrow 0$ , wie behauptet. — Nun zeigen wir:  $\chi(a) > 0$  für  $a \in B$ ; wegen  $B' \cap f_\nu = g_\nu$  ist dies evident für  $a \in B'$ ; sei also  $a \in B''$  und  $U_a$  eine beliebige Umgebung von  $a$ ; da nach 12.7.2  $B_j$  dicht in  $B''$ , gibt es ein  $b \in B_j \cap U_a$ , und da  $B \subseteq A_h$ , ist auch  $b \in A_h$ ; aus  $b \in B_j \cap A_h$  folgt aber: es gibt in  $A - B$  eine Folge  $((x_n))$  mit  $x_n \rightarrow b$ ; für jedes  $\nu$  ist dann  $x_n \in B < \frac{1}{\nu}$  für fast alle  $n$ , also  $f_\nu(x_n) = z$  für fast alle  $n$ ; und da wegen  $b \in U_a$  auch  $x_n \in U_a$  für fast alle  $n$  ist, und  $f_\nu \rightarrow 0$  gilt, so ist  $\chi(a) = \|z - 0\| > 0$ , wie behauptet. — Nun ist nur mehr zu zeigen:  $\chi(a) = 0$  für  $a \in A - B$ ;

da  $B$  abgeschlossen in  $A_h$ , und somit in  $A$ , ist dann nach 10.5.62:  $aB > 0$ ; für  $0 < \varrho < aB$  ist dann die Kugel  $K_{a\varrho}$  eine Umgebung  $U_a$ , für die  $\overline{U_a B} > 0$ ; wählen wir  $\nu^*$  so, daß  $\frac{1}{\nu^*} < \overline{U_a B}$ , so ist  $f_\nu(x) = 0$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu^*$ ; wegen  $f_\nu \rightarrow 0$  ist also auch  $\chi(a) = 0$ , wie behauptet.

**28.6.3.** Ist  $B$  ein  $F_\sigma$  in  $A_h$ , so gibt es auf  $A$  eine konvergente Funktionenfolge  $((f_\nu))$ , für die jedes  $a \in B$  ein Punkt ungleichmäßiger, jedes  $a \in A - B$  ein Punkt gleichmäßiger Konvergenz ist.

Sei  $B = \bigcup_n B_n$ , wo  $B_n$  abgeschlossen in  $A_h$ . Nach 28.6.21 gibt es auf  $A$  eine Folge von Funktionen  $f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{n\mu}, \dots$ , die nur die Werte 0 und  $\frac{1}{n}$  annehmen, mit  $\lim_{\mu} f_{n\mu} = 0$ , für deren Ungleichmäßigkeitsgrad  $\chi_n(x)$  gilt:  $\chi_n(x) \neq 0$  für  $x \in B_n$ ,  $\chi_n(x) = 0$  für  $x \in A - B_n$ . Wir ordnen die Doppelreihe der  $f_{n\mu}$  in eine einfache Folge  $f_1, f_2, \dots, f_\nu, \dots$ , und zeigen zunächst, daß für jedes  $x \in A$  gilt:  $f_\nu(x) \rightarrow 0$ ; sei  $\delta > 0$  beliebig gegeben und  $n^* > \frac{1}{\delta}$ ; da  $f_{n\mu}$  nur die Werte 0 und  $\frac{1}{n}$  annimmt, ist  $0 \leq f_{n\mu}(x) < \delta$  für  $n > n^*$  und alle  $\mu$ ; und da  $\lim_{\mu} f_{n\mu}(x) = 0$ , gilt auch für die  $f_{n\mu}(x)$  ( $n = 1, 2, \dots, n^*$ ) mit höchstens endlich vielen Ausnahmen:  $0 \leq f_{n\mu}(x) < \delta$ ; es ist also  $0 \leq f_\nu(x) < \delta$  für fast alle  $\nu$ , d. h.  $f_\nu(x) \rightarrow 0$ , wie behauptet. — Nun zeigen wir, daß  $\chi(a) > 0$  für jedes  $a \in B$ ; ist  $a \in B$ , so gibt es ein  $n$ , so daß  $a \in B_n$ ; also ist  $\chi_n(a) > 0$ , und da die Folge  $f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{n\mu}, \dots$  Teilfolge von  $((f_\nu))$  ist, so ist auch  $\chi(a) > 0$ , wie behauptet. — Nun ist nur mehr zu zeigen:  $\chi(a) = 0$  für  $a \in A - B$ ; dann ist  $\chi_n(a) = 0$  für alle  $n$ ; sei  $\delta > 0$  beliebig gegeben und  $n^* > \frac{1}{\delta}$ ; dann ist  $0 \leq f_{n\mu}(x) < \delta$  für  $n > n^*$ , alle  $\mu$  und alle  $x \in A$ ; und wegen  $\chi_n(a) = 0$  ( $n = 1, 2, \dots, n^*$ ) und  $\lim_{\mu} f_{n\mu} = 0$  gibt es eine Umgebung  $U_a$  und ein  $\mu^*$ , so daß  $|f_{n\mu}(x)| < \delta$  für  $n = 1, 2, \dots, n^*$ ,  $\mu \geq \mu^*$  und alle  $x \in A \cap U_a$ ; es gilt also für alle  $f_\nu$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen:  $|f_\nu(x)| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; und da  $f_\nu \rightarrow 0$ , folgt daraus  $\chi(a) = 0$ , wie behauptet.

**Literatur:** Die Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz wurde zuerst untersucht von W. H. Young, Lond. Proc. (2) 1 (1904) S. 356.

**7. Punktweise ungleichmäßige Konvergenz.** Eine konvergente Funktionenfolge  $((f_\nu))$  auf  $A$  heißt punktweise ungleichmäßig konvergent, wenn die Menge ihrer Punkte gleichmäßiger Konvergenz dicht

in  $A$  ist; insbesondere ist also jede gleichmäßig konvergente Funktionenfolge auch punktweise ungleichmäßig konvergent.

**28.7.1.** Ist  $((f_n))$  punktweise ungleichmäßig konvergent, so ist für jedes  $k > 0$  die Menge aller  $a \in A$  mit  $\chi(a) \geq k$  nirgends dicht in  $A$ .

Der Beweis ist, unter Berufung auf 28.5.21, analog dem von 26.5.1.

**28.7.11.** Ist  $((f_n))$  punktweise ungleichmäßig konvergent, so ist die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von erster Kategorie in  $A$ .

Der Beweis ist analog dem von 26.5.11.

**28.7.2.** Ist  $((f_n))$  eine konvergente Funktionenfolge auf der Youngschen Menge  $A$ , und ist für jedes  $k > 0$  die Menge aller  $a \in A$  mit  $\chi(a) \geq k$  von erster Kategorie in  $A$ , so ist  $((f_n))$  punktweise ungleichmäßig konvergent.

Der Beweis ist analog dem von 26.5.21.

**28.7.21.** Ist  $((f_n))$  eine konvergente Funktionenfolge auf der Youngschen Menge  $A$ , so ist, damit  $((f_n))$  punktweise ungleichmäßig konvergent sei, notwendig und hinreichend, daß die Menge der Punkte gleichmäßiger Konvergenz eine Residualmenge in  $A$  sei.

Dies ergibt sich wie 26.5.23.

**8. Konvergente Folgen stetiger Funktionen.** Wir behandeln nun insbesondere konvergente Folgen stetiger Funktionen. Sei  $E$  der zugrunde gelegte metrische Raum. Anknüpfend an die Begriffsbildungen von § 19, 5 bezeichnen wir mit  $E_{II}$  die Menge aller  $x \in E$ , in denen  $E$  von zweiter Kategorie ist. Dann gilt:

**28.8.1.** Ist  $((f_n))$  eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf  $E$ , und ist  $B_k$  die Menge aller  $x \in E$  mit  $\chi(x) \geq k$ , so ist  $B_k E_{II}$  für jedes  $k > 0$  nirgends dicht in  $E_{II}$ .

Da  $B_k E_{II}$  nach 28.5.21 abgeschlossen in  $E_{II}$ , ist die Behauptung nach 11.2.51 gleichbedeutend mit: die Menge aller  $x \in E_{II}$  mit  $\chi(x) < k$  ist dicht in  $E_{II}$ . Nach 11.1.8 ist also zu zeigen: ist  $G$  offen und  $A \subset G \subseteq E_{II}$ , so gibt es ein  $a \in G$  mit  $\chi(a) < k$ . Wie aus § 25 (3.2) hervorgeht, ist  $\|f_{n'}(x) - f_{n''}(x)\|$  eine stetige Funktion auf  $E$ ; die Menge aller  $x \in G$  mit  $\|f_{n'}(x) - f_{n''}(x)\| \leq \frac{k}{2}$  ist also nach 25.8.1 abgeschlossen in  $G$ ; also

ist auch die Menge  $G_\nu$  aller  $x \in G$ , in denen  $\|f_{n'}(x) - f_{n''}(x)\| \leq \frac{k}{2}$  ist für alle  $n' \geq n, n'' \geq n$ , als Durchschnitt in  $G$  abgeschlossener Mengen, abgeschlossen in  $G$ . Da aber  $((f_n))$  konvergent, ist  $G = \bigcup_{\nu} G_\nu$ ; und da nach 19.5.4  $G$  von zweiter Kategorie, also nach 19.4.81 auch von zweiter Kategorie in  $G$ , ist mindestens ein  $G_\nu$  nicht nirgends dicht in  $G$ ; da  $G_\nu$  abgeschlossen in



$G$ , gibt es dann nach 11.2.111 eine nicht leere, in  $G$  (und mithin in  $E$ ) offene Menge  $H \subseteq G$ ; für alle  $x \in H$  gilt nun:  $\|f_{v'}(x) - f_{v''}(x)\| \leq \frac{k}{2}$  für  $v' \geq v$ ,  $v'' \geq v$ ; also durch Grenzübergang  $v'' \rightarrow \infty$ , wenn  $\lim_v f_v = f$  gesetzt wird, auch:  $\|f_{v'}(x) - f(x)\| \leq \frac{k}{2}$  für alle  $x \in H$  und alle  $v' \geq v$ ; für jedes  $a \in H$  ist also  $\chi(a) \leq \frac{k}{2} < k$ , und wegen  $H \subseteq G$  ist auch  $a \in G$ , w. z. b. w.

**28.8.11.** Ist  $((f_v))$  eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf  $E$ , so ist die Menge aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von  $((f_v))$  von erster Kategorie in  $E$ .

Es genügt zu zeigen: für jedes  $k > 0$  ist die Menge  $B_k$  aller  $x \in E$  mit  $\chi(x) \geq k$  von erster Kategorie in  $E$ . Es ist  $B_k = B_k E_{IIi} + B_k(E - E_{IIi})$ ; hierin ist nach 28.8.1  $B_k E_{IIi}$  nirgends dicht in  $E_{IIi}$ , also nach 19.4.3 von erster Kategorie in  $E$ ; nach 19.5.33 und 19.4.1 ist auch  $B_k(E - E_{IIi})$  von erster Kategorie in  $E$ ; also ist nach 19.4.2 auch  $B_k$  von erster Kategorie in  $E$ , w. z. b. w.

**28.8.12.** Auf einer Youngschen Menge  $A$  ist jede konvergente Folge  $((f_v))$  stetiger Funktionen punktweise ungleichmäßig konvergent.

Dies folgt (für  $A = E$ ) aus 28.8.11 und 28.7.21.

**28.8.2.** Ist  $((f_v))$  eine konvergente Folge stetiger Funktionen auf der Youngschen Menge  $A$ , und  $f = \lim_v f_v$ , so ist  $f$  punktweise unstetig.

Dies folgt wegen 26.5.2 aus 28.8.11 und 28.8.2. — Wir kommen auf diesen Satz in § 37, 1 zurück.

Nach 28.8.11 kann auf einer Youngschen Menge eine konvergente Folge stetiger Funktionen nicht total ungleichmäßig konvergieren; tatsächlich sind auch die Funktionen  $g_v$  von 28.6.2 unstetig. Bei Beschränkung auf Folgen stetiger Funktionen treten an Stelle von 28.6.21, 28.6.3 die Sätze:

**28.8.3.** Ist  $B$  abgeschlossen in  $A_h$  und nirgends dicht in  $A$ , und ist  $z > 0$ , so gibt es auf  $A$  eine Folge stetiger Funktionen  $f_v$ , die der Ungleichung  $0 \leq f_v \leq z$  genügen, mit  $\lim_v f_v = 0$ , so daß  $\chi(a) > 0$  für  $a \in B$ ,  $\chi(a) = 0$  für  $a \in A - B$ .

Sei  $h_v(r)$  eine für  $r \geq 0$  definierte, der Ungleichung  $0 \leq h_v \leq z$  genügende, stetige Funktion der reellen Veränderlichen  $r$ , die  $= 0$  ist für  $r = 0$  und für  $r \geq \frac{1}{2^v}$ , und  $= z$  ist für  $\frac{1}{2^{v+2}} \leq r \leq \frac{1}{2^{v+1}}$ , und sei  $f_v(x) = h_v(xB)$  für  $x \in A$ . Dann ist  $f_v$  eine stetige Funktion auf  $A$ , und es gilt  $f_v \rightarrow 0$ . Sei  $a \in B$ ; nach 17.3.64 gibt es in  $A - B$  eine Punktfolge  $((a_n))$  mit  $a_n \rightarrow a$ ,

und wir können ohne weiteres annehmen:  $a_n a \leq \frac{1}{2^2}$ ; nach Definition von  $f_v$  gibt es zu jedem  $n$  ein  $v_n$ , so daß  $v_n \rightarrow \infty$  und  $f_{v_n}(a_n) = z$ ; also ist  $\chi(a) > 0$ . Sei  $a \in A - B$ ; da  $B$  abgeschlossen in  $A_h$ , somit auch in  $A$ , ist  $aB > 0$ ; für  $0 < \varrho < aB$  ist dann die Kugel  $K_{a\varrho}$  eine Umgebung  $U_a$ , für die  $\overline{U_a B} > 0$ ; wählen wir  $v^*$  so, daß  $\frac{1}{2^{v^*}} < \overline{U_a B}$ , so ist  $f_v(x) = 0$  für  $v \geq v^*$  und alle  $x \in A U_a$ ; also ist  $\chi(a) = 0$ .

**28.8.4.** Ist  $B = \bigcup_n B_n$ , wo alle  $B_n$  abgeschlossen in  $A_h$  und nirgends dicht in  $A$ , so gibt es auf  $A$  eine konvergente Folge stetiger Funktionen, für die jedes  $a \in B$  ein Punkt ungleichmäßiger, jedes  $a \in A - B$  ein Punkt gleichmäßiger Konvergenz ist.

Der Beweis ist, unter Berufung auf 28.8.3, analog dem Beweise von 28.6.3.

**28.8.5.** Damit es auf  $E$  eine total ungleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen gebe, ist notwendig und hinreichend, daß  $E$  in sich von erster Kategorie sei.

Notwendig: Dies folgt aus 28.8.11. Hinreichend: Sei  $E$  in sich von erster Kategorie; nach 19.6.2 ist  $E = E_h$ ; aus 19.4.7 folgt:  $E = \bigcup_n B_n$ , wo  $B_n$  abgeschlossen und nirgends dicht in  $E$ . Nun ergibt sich die Behauptung aus 28.8.4.

Literatur: Satz 28.8.11 geht zurück auf W. F. Osgood, Am. Journ. 19 (1897) S. 155; Satz 28.8.2 stammt von F. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 30; Satz 28.8.5 stammt von W. Hurewicz.

**9. Stetige Konvergenz.** Sei wieder  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes und  $((f_v))$  eine Funktionenfolge auf  $A$ . Wir setzen nun nicht mehr voraus, daß  $((f_v))$  in jedem Punkte  $a \in A$  konvergent sei.

Die Funktionenfolge  $((f_v))$  heißt im Punkte  $a \in A^0$  stetig konvergent, wenn für jede Punktfolge  $((a_v))$  aus  $A$  mit  $a_v \rightarrow a$  die Zahlenfolge  $((f_v(a_v)))$  einen Grenzwert (im  $\bar{R}_1$ ) besitzt; in bekannter Weise sieht man, daß dann für alle Folgen  $((a_v))$  aus  $A$  mit  $a_v \rightarrow a$  der Grenzwert der  $f_v(a_v)$  derselbe ist. Ist  $a \in A$  und setzt man  $a_v = a$ , so sieht man: Ist  $((f_v))$  stetig konvergent im Punkte  $a \in A$ , so ist  $a$  ein Konvergenzpunkt von  $((f_v))$ , und für jede Folge  $((a_v))$  aus  $A$  mit  $a_v \rightarrow a$  gilt:  $\lim_v f_v(a_v) = \lim_v f_v(a)$ . In einem isolierten Punkte  $a$  von  $A$  ist  $((f_v))$  dann und nur dann stetig konvergent, wenn  $a$  Konvergenzpunkt von  $((f_v))$  ist.

Machen wir Gebrauch vom Begriff der Hülle einer Funktion (§ 26, 1), so gilt:

**28-9-1.** Ist  $((f_\nu))$  stetig konvergent im Punkte  $a \in A^0$  und ist  $b_\nu \in P_{f_\nu}^0(a)$ , so ist die Folge  $((b_\nu))$  konvergent im  $\bar{R}_1$ , und zwar gilt für jede Folge  $((a_\nu))$  aus  $A$  mit  $a_\nu \rightarrow a$ :  $\lim_{\nu} b_\nu = \lim_{\nu} f_\nu(a_\nu)$ .

Denn nach 26-1-11 gibt es in  $K_a \frac{1}{\nu}$  ein  $a_\nu \in A$  mit  $\|f_\nu(a_\nu) - b_\nu\| < \frac{1}{\nu}$ ; dann ist  $a_\nu \rightarrow a$  und  $\lim_{\nu} b_\nu = \lim_{\nu} f_\nu(a_\nu)$ .

**28-9-11.** Ist  $((f_\nu))$  stetig konvergent im Punkte  $a \in A$  und ist  $b_\nu \in P_{f_\nu}^0(a)$ , so ist  $\lim_{\nu} b_\nu = \lim_{\nu} f_\nu(a)$ .

Dies folgt aus 28-9-1 für  $a_\nu = a$ .

**28-9-2.** Damit die Folge  $((f_\nu))$  stetig konvergent sei im Punkte  $a \in A^0$ , ist notwendig und hinreichend, daß es ein  $b \in \bar{R}_1$ , und zu jedem  $\delta > 0$  eine Umgebung  $U_a$  und ein  $\nu_\delta$  gebe, so daß  $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ .

Notwendig: Ist  $((f_\nu))$  stetig konvergent in  $a$  und  $b_\nu \in P_{f_\nu}^0(a)$ , so existiert nach 28-9-1 der Grenzwert  $b = \lim_{\nu} b_\nu$ . Gäbe es nun nicht zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$  und ein  $\nu_\delta$ , so daß  $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , so gäbe es ein  $\delta > 0$ , eine wachsende Indizesfolge  $((\nu_n))$  und ein  $a'_n \in A \cap K_a \frac{1}{n}$ , so daß  $\|f_{\nu_n}(a'_n) - b\| \geq \delta$ ; für eine Folge  $((a_\nu))$  aus  $A$  mit  $a_\nu \rightarrow a$ , in der  $a_{\nu_n} = a'_n$ , könnte dann nicht  $\lim_{\nu} f_\nu(a_\nu) = b$  sein, entgegen 28-9-1. Hinreichend: Ist  $((a_\nu))$  eine Folge aus  $A$  mit  $a_\nu \rightarrow a$ , so ist  $a_\nu \in A \cap U_a$  für fast alle  $\nu$ , also  $\|f_\nu(a_\nu) - b\| < \delta$  für fast alle  $\nu$ , also  $\lim_{\nu} f_\nu(a_\nu) = b$ .

**28-9-21.** Ist  $a$  ein Konvergenzpunkt von  $((f_\nu))$  und  $\lim_{\nu} f_\nu(a) = b$ , so ist, damit  $((f_\nu))$  in  $a$  stetig konvergent sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$  und ein  $\nu_\delta$  gebe, so daß  $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ .

Der Beweis ist, unter Berufung auf 28-9-11, analog dem von 28-9-2.

Sei  $a \in A^0$ ; wir bezeichnen mit  $\sigma(a)$  das Infimum aller Zahlen  $z$ , zu denen es ein  $U_a$  und ein  $\nu^*$  gibt, so daß die Schwankung  $\omega_\nu(U_a)$  von  $f_\nu$  auf  $A \cap U_a$  (§ 26, 3)  $< z$  ist für alle  $\nu \geq \nu^*$  (solche Zahlen  $z$  gibt es sicher; jedes  $z > 2$  ist eine solche Zahl); wir nennen  $\sigma(a)$  die Grenzschwankung von  $((f_\nu))$  in  $a$ . Es ist  $0 \leq \sigma(a) \leq 2$ ; in jedem Punkte  $a \in A$  ist  $\sigma(a) = 0$ . Ist  $((f_{\nu_i}))$  Teilfolge von  $((f_\nu))$  und ist  $\sigma^*(a)$  die Grenzschwankung von  $((f_{\nu_i}))$  in  $a$ , so ist  $\sigma^*(a) \leq \sigma(a)$ .

**28-9-3.** Damit die Folge  $((f_\nu))$  stetig konvergent sei im Punkte  $a \in A^0$ , ist notwendig und, wenn es in jeder Umgebung von  $a$  einen Konvergenzpunkt von  $((f_\nu))$  gibt, auch hinreichend, daß  $\sigma(a) = 0$  sei.

Notwendig: Sei  $b$  die in 28-9-2 auftretende Zahl; dann gibt es zu jedem  $z > 0$  ein  $U_a$  und ein  $\nu^*$ , so daß  $\|f_\nu(x) - b\| < \frac{z}{3}$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu^*$ ; dann ist  $\|f_\nu(x) - f_\nu(x')\| \leq \|f_\nu(x) - b\| + \|b - f_\nu(x')\| < \frac{2}{3}z$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ,  $x' \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu^*$ ; also ist  $\omega_\nu(U_a) \leq \frac{2}{3}z < z$  für alle  $\nu \geq \nu^*$ ; da hierin  $z > 0$  beliebig war, ist  $\sigma(a) = 0$ . Hinreichend: Nach Annahme gibt es eine Folge  $((a_n))$  von Konvergenzpunkten von  $((f_\nu))$  mit  $a_n \rightarrow a$ . Wegen  $\sigma(a) = 0$  gibt es eine Umgebung  $U_a$  und ein  $\nu^*$ , so daß  $\omega_\nu(U_a) < \delta$  für  $\nu \geq \nu^*$ . Wegen  $a_n \rightarrow a$  gibt es ein  $n^*$ , so daß  $a_n \in U_a$  für  $n \geq n^*$ ; also ist  $\|f_\nu(a_n) - f_\nu(a_{n'})\| < \delta$  für  $n \geq n^*$ ,  $n' \geq n^*$  und  $\nu \geq \nu^*$ ; setzen wir  $\lim_{\nu} f_\nu(a_n) = b_n$ , so folgt daraus  $\|b_n - b_{n'}\| \leq \delta$  für  $n \geq n^*$ ,  $n' \geq n^*$ , also existiert der Grenzwert  $\lim_n b_n = b$ . Wir wählen  $\bar{n}$  so, daß  $a_{\bar{n}} \in U_a$ ,  $\|b_{\bar{n}} - b\| < \delta$ ; sodann wählen wir  $\bar{\nu} \geq \nu^*$  so, daß  $\|f_{\bar{\nu}}(a_{\bar{n}}) - b_{\bar{n}}\| < \delta$  für  $\nu \geq \bar{\nu}$ ; wegen  $\omega_\nu(U_a) < \delta$  für  $\nu \geq \bar{\nu}$  ist dann  $\|f_\nu(x) - f_{\bar{\nu}}(a_{\bar{n}})\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; somit ist für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \bar{\nu}$ :

$$\|f_\nu(x) - b\| \leq \|f_\nu(x) - f_{\bar{\nu}}(a_{\bar{n}})\| + \|f_{\bar{\nu}}(a_{\bar{n}}) - b_{\bar{n}}\| + \|b_{\bar{n}} - b\| < 3\delta,$$

also ist  $((f_\nu))$  stetig konvergent in  $a$  zufolge 28-9-2.

Bezeichnen wir die Schwankung von  $f_\nu$  im Punkte  $a$  (§ 26, 3) mit  $\omega_\nu(a)$ , so gilt:

**28-9-31.** Damit die Folge  $((f_\nu))$  stetig konvergent sei im Punkte  $a \in A^0$ , ist notwendig, daß  $\lim_{\nu} \omega_\nu(a) = 0$  sei.

Nach 28-9-3 ist  $\sigma(a) = 0$ ; also gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$  und ein  $\nu^*$ , so daß  $\omega_\nu(U_a) < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu^*$ ; aus 26-3-1 folgt  $\omega_\nu(a) \leq \omega_\nu(U_a)$ ; also ist auch  $\omega_\nu(a) < \delta$  für alle  $\nu \geq \nu^*$ , d. h. es gilt  $\omega_\nu(a) \rightarrow 0$ .

**28-9-4.** Ist die konvergente Folge  $((f_\nu))$  stetig konvergent im Punkte  $a \in A^0$ , so ist sie auch gleichmäßig konvergent in  $a$ .

Sei  $\lim_{\nu} f_\nu(x) = f(x)$ . Nach 28-9-2 gibt es ein  $b$  und zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$  und ein  $\nu_\delta$ , so daß  $\|f_\nu(x) - b\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ ; daraus folgt durch  $\nu \rightarrow \infty$ :  $\|f(x) - b\| \leq \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ . Also ist  $\|f_\nu(x) - f(x)\| \leq \|f_\nu(x) - b\| + \|b - f(x)\| < 2\delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_\delta$ , d. h.  $((f_\nu))$  ist gleichmäßig konvergent in  $a$ .

**28-9-41.** Ist  $((f_\nu))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$ , und ist  $((f_\nu))$  gleichmäßig konvergent im Punkte  $a \in A^0$ , so ist, damit  $((f_\nu))$  auch stetig konvergent sei in  $a$ , notwendig und hinreichend, daß  $\lim_{\nu} \omega_\nu(a) = 0$  sei.

Notwendig: Dies folgt aus 28-9-31. Hinreichend: Sei  $\lim_{\nu} f_{\nu}(x) = f(x)$ ;

nach Annahme gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\nu_{\delta}$  und ein  $U_a$ , so daß  $\|f_{\nu}(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_{\delta}$ . Ferner gibt es nach Annahme ein  $\nu^* \geq \nu_{\delta}$ , so daß  $\omega_{\nu^*}(a) < \delta$ ; nach 26-3-11 gibt es eine Umgebung  $U_a^*$ , so daß  $\|f_{\nu^*}(x') - f_{\nu^*}(x'')\| < \delta$  für alle  $x' \in A \cap U_a^*$ ,  $x'' \in A \cap U_a^*$ ; dann ist für alle  $x' \in A \cap U_a \cap U_a^*$ ,  $x'' \in A \cap U_a \cap U_a^*$ :  $\|f(x') - f(x'')\| \leq \|f(x') - f_{\nu^*}(x')\| + \|f_{\nu^*}(x') - f_{\nu^*}(x'')\| + \|f_{\nu^*}(x'') - f(x'')\| < 3\delta$ , und mithin für alle  $x' \in A \cap U_a \cap U_a^*$ ,  $x'' \in A \cap U_a \cap U_a^*$  und alle  $\nu \geq \nu_{\delta}$ :  $\|f_{\nu}(x') - f_{\nu}(x'')\| \leq \|f_{\nu}(x') - f(x')\| + \|f(x') - f(x'')\| + \|f(x'') - f_{\nu}(x'')\| < 5\delta$ . Also gilt für die Schwankung  $\omega_{\nu}(U_a \cap U_a^*)$  von  $f_{\nu}$  auf  $A \cap U_a \cap U_a^*$ :  $\omega_{\nu}(U_a \cap U_a^*) \leq 5\delta$  für  $\nu \geq \nu_{\delta}$ . Da hierin  $\delta > 0$  beliebig war, ist  $\sigma(a) = 0$ ; also ist  $((f_{\nu}))$  stetig konvergent in  $a$  nach 28-9-3.

**28-9-5.** Ist  $((f_{\nu}))$  stetig konvergent im Punkte  $a \in A$ , so sind  $\overline{\lim}_{\nu} f_{\nu}$  und  $\underline{\lim}_{\nu} f_{\nu}$  stetig in  $a$ .

Wir setzen:  $\lim_{\nu} f_{\nu}(a) = b$  und  $\overline{\lim}_{\nu} f_{\nu} = \bar{f}$ ; dann ist  $\bar{f}(a) = b$ ; nach 28-9-21 gibt es ein  $U_a$  und ein  $\nu_{\delta}$ , so daß  $\|f_{\nu}(x) - \bar{f}(a)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$  und alle  $\nu \geq \nu_{\delta}$ ; daraus folgt:  $\|\bar{f}(x) - \bar{f}(a)\| \leq \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a$ , d. h.  $\bar{f}$  ist stetig in  $a$ .

In 28-9-5 ist enthalten:

**28-9-51.** Ist  $((f_{\nu}))$  eine konvergente Funktionenfolge auf  $A$ , und ist sie stetig konvergent im Punkte  $a \in A$ , so ist auch  $\lim_{\nu} f_{\nu}$  stetig in  $a$ .

Literatur: C. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929) S. 515.

**10. Der Wertebereich einer Folge stetiger Funktionen.** Sei  $((f_{\nu}))$  eine Folge von Funktionen auf  $A$ ; die Menge der Zahlenfolgen  $((f_{\nu}(a)))$  (für alle  $a \in A$ ) bezeichnen wir als den Wertebereich der Funktionenfolge  $((f_{\nu}))$ .

Seien  $((a_{\nu}))$  und  $((b_{\nu}))$  zwei Zahlenfolgen; wie in § 8, 4 schreiben wir:  $((a_{\nu})) = ((b_{\nu}))$ , bzw.  $((a_{\nu})) > ((b_{\nu}))$ , bzw.  $((a_{\nu})) < ((b_{\nu}))$ , wenn  $a_{\nu} = b_{\nu}$ , bzw.  $a_{\nu} > b_{\nu}$ , bzw.  $a_{\nu} < b_{\nu}$  für fast alle  $\nu$  gilt.

Eine Menge  $M$  von Zahlenfolgen heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn es eine Folge endlicher Zahlen  $((c_{\nu}))$  gibt, so daß  $((a_{\nu})) \leq ((c_{\nu}))$  (bzw.  $((a_{\nu})) \geq ((c_{\nu}))$ ) für alle  $((a_{\nu})) \in M$ ; sie heißt beschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten beschränkt ist.

Eine Menge  $M$  von Zahlenfolgen heißt nach oben (bzw. nach unten) halbbeschränkt, wenn es eine Folge endlicher Zahlen  $((c_{\nu}))$  gibt, so daß für kein  $((a_{\nu})) \in M$  gilt  $((a_{\nu})) > ((c_{\nu}))$  (bzw.  $((a_{\nu})) < ((c_{\nu}))$ ); sie heißt halbbeschränkt, wenn sie sowohl nach oben als auch nach unten halbbe-

beschränkt ist. Jede beschränkte Menge von Zahlenfolgen ist auch halbbeschränkt, aber nicht umgekehrt.

Wir beweisen nun zwei Sätze, die das Analogon von 25.7.22 für Funktionenfolgen darstellen (man beachte dabei, daß in 25.7.22 die Bedingung,  $A$  sei in sich kompakt, zufolge 15.5.11 ersetzt werden kann durch die Bedingung: in jedem Überdeckungssysteme von  $A$  gibt es ein endliches,  $A$  überdeckendes Teilsystem.)

**28.10.1.** *Damit für jede Folge  $((f_v))$  stetiger und endlicher Funktionen auf  $A$  der Wertebereich halbbeschränkt sei, ist hinreichend und, wenn  $A$  separabel ist, auch notwendig, daß es zu jeder Folge  $A$  überdeckender Systeme  $((\mathfrak{B}_v))$  eine Auswahlüberdeckung gebe.*

Notwendig: Beim Beweise können wir offenbar  $A$  durch eine homöomorphe Menge ersetzen; wir können also zufolge 14.2.1, 14.2.41, 14.3.3 annehmen:  $A \subseteq Q_w$ . Sei  $((\mathfrak{B}_v))$  eine Folge  $A$  überdeckender Systeme; da jede Menge  $B \in \mathfrak{B}_v$  offen in  $A$ , kann jeder Menge  $B \in \mathfrak{B}_v$  eine in  $Q_w$  offene Menge  $G$  so zugeordnet werden, daß  $B = A \cap G$ ; das System der so den Mengen von  $\mathfrak{B}_v$  zugeordneten Mengen  $G$  heiße  $\mathfrak{G}_v$ ; die Summe  $G_v$  aller Mengen  $G \in \mathfrak{G}_v$  ist offen in  $Q_w$ , also  $F_v = Q_w - G_v$  abgeschlossen in  $Q_w$ . Setzen wir für  $x \in Q_w$ :  $g_v(x) = x F_v$ , falls  $F_v \supset A$ , und  $g_v(x) = 1$ , falls  $F_v = A$ , so ist nach 25.7.1  $g_v$  eine stetige Funktion auf  $Q_w$ ; da  $\mathfrak{B}_v$  ein Überdeckungssystem von  $A$ , ist  $A \subseteq G_v$ , also  $A F_v = A$ , also nach 10.5.62  $g_v(x) = x F_v > 0$  für alle  $x \in A$ ; setzen wir  $f_v(x) = \frac{1}{g_v(x)}$  für  $x \in A$ , so ist also  $((f_v))$  eine Folge stetiger, endlicher Funktionen auf  $A$ . Nach Annahme ist also der Wertebereich von  $((f_v))$  halbbeschränkt, d. h. es gibt eine Folge  $((c_v))$  positiver endlicher Zahlen, so daß in jedem Punkte  $x \in A$ :  $f_v(x) \leq c_v$  für unendlich viele  $v$ ; bezeichnet also  $C_v$  die Menge aller  $x \in Q_w$  mit  $g_v(x) \geq \frac{1}{c_v}$ , so ist  $A \subseteq \bigcup_v C_v$ , und nach Definition von  $g_v$  ist  $C_v \subseteq G_v$ ; nach 25.8.1 ist  $C_v$  abgeschlossen in  $Q_w$ , und da  $Q_w$  nach 20.2.83 in sich kompakt, ist nach 15.2.3 auch  $C_v$  in sich kompakt. Da  $G_v$  die Summe aller  $G \in \mathfrak{G}_v$  war, ist wegen  $C_v \subseteq G_v$  das System der Mengen  $G \cap C_v$  ( $G \in \mathfrak{G}_v$ ) ein Überdeckungssystem von  $C_v$ ; es gibt also im Systeme der Mengen  $G \cap C_v$  ( $G \in \mathfrak{G}_v$ ) nach 15.5.11 ein endliches  $C_v$  überdeckendes Teilsystem; mithin gibt es in  $\mathfrak{B}_v$  endlich viele Mengen, deren Summe  $B_v \supseteq A \cap C_v$  ist; und wegen  $A \subseteq \bigcup_v C_v$  ist  $B_1, B_2, \dots, B_v, \dots$  eine Auswahlüberdeckung aus  $((\mathfrak{B}_v))$ . Hinreichend: Sei  $((f_v))$  eine Folge stetiger, endlicher Funktionen auf  $A$ , und sei  $B_{v,n}$  die Menge aller  $x \in A$  mit  $f_v < \frac{1}{n}$ ; nach 25.8.1 ist  $B_{v,n}$  offen in  $A$ , und da  $A = \bigcup_n B_{v,n}$  bilden die Mengen  $B_{1,1}, B_{2,1}, \dots, B_{v,n}, \dots$  ein Überdeckungssystem

$\mathfrak{B}$ , von  $A$ . Nach Annahme gibt es zu jeder Folge von Überdeckungssystemen von  $A$  eine Auswahlüberdeckung, also gibt es nach 15·5·21 zur Folge  $((\mathfrak{B}_\nu))$  von Überdeckungssystemen von  $A$  eine Auswahlüberdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_\nu, \dots$ , so daß für jedes  $x \in A$  gilt:  $x \in B_\nu$  für unendlich viele  $\nu$ . Nun ist  $B_\nu$  Summe endlich vieler Mengen aus  $\mathfrak{B}_\nu$ , etwa  $B_\nu = B_{\nu, n_1} + B_{\nu, n_2} + \dots + B_{\nu, n_\nu}$  ( $n_1 < n_2 < \dots < n_\nu$ ); nach Definition von  $B_{\nu, n}$  ist dann  $f_\nu(x) < n_\nu$  für alle  $x \in B_\nu$ ; für jedes  $x \in A$  gilt also  $f_\nu(x) < n_\nu$  für unendlich viele  $\nu$ ; für kein  $x \in A$  ist also  $((f_\nu(x))) > ((n_\nu))$ , d. h. der Wertebereich von  $((f_\nu))$  ist nach oben halbbeschränkt; ebenso zeigt man, daß er nach unten halbbeschränkt.

**28·10·2.** *Damit für jede Folge  $((f_\nu))$  stetiger und endlicher Funktionen auf  $A$  der Wertebereich beschränkt sei, ist hinreichend und, wenn  $A$  separabel ist, auch notwendig, daß es zu jeder Folge  $A$  überdeckender Systeme  $((\mathfrak{B}_\nu))$  eine Auswahlüberdeckung  $B_1, B_2, \dots, B_\nu, \dots$  gebe, so daß für jedes  $x \in A$  gilt:  $x \in B_\nu$  für fast alle  $\nu$ .*

Notwendig: Der Beweis ist analog wie bei 28·10·1; nur kann jetzt die Folge  $((C_\nu))$  so gewählt werden, daß in jedem Punkte  $x \in A$  gilt:  $f_\nu(x) \leq C_\nu$  für fast alle  $\nu$ ; für jeden Punkt  $x \in A$  gilt also  $x \in C_\nu$  für fast alle  $\nu$ ; und da  $A \cap C_\nu \subseteq B_\nu$ , gilt auch  $x \in B_\nu$  für fast alle  $\nu$ . Hinreichend: Der Beweis ist analog wie bei 28·10·1, nur daß hier für jedes  $x \in A$  gilt:  $x \in B_\nu$  für fast alle  $\nu$ , und somit auch  $f_\nu(x) < n_\nu$  für fast alle  $\nu$ , d. h.  $((f_\nu(x))) < ((n_\nu))$ .

Literatur: Der Inhalt dieser Nummer stammt von W. Hurewicz, Fund. Math. 9 (1927) S. 193.

## § 29. Funktionenmengen.

1. Grenzwandlung. Sei  $A$  Punktmenge eines metrischen Raumes und  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Funktionen auf  $A$ . In Analogie zum Begriffe der Grenzwandlung einer Funktionenfolge (§ 28, 9) definieren wir: ist  $a \in A^0$ , so werde mit  $\sigma(a)$  das Infimum aller Zahlen  $z$  bezeichnet, zu denen es ein  $U_a$  gibt, so daß die Schwandlung  $\omega_f(U_a)$  von  $f$  auf  $A \cap U_a$  (§ 26, 3)  $< z$  ist für alle  $f \in \mathfrak{M}$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen; wir nennen  $\sigma(a)$  die Grenzwandlung von  $\mathfrak{M}$  in  $a$ .

Für jedes  $x \in A$  bezeichnen wir mit  $\lim_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  (bzw. mit  $\lim_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$ ) das Supremum (bzw. das Infimum) aller  $z$ , zu denen es unendlich viele  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $f(x) \geq z$  (bzw. mit  $f(x) \leq z$ ) gibt. Wir setzen abkürzend  $\lim_{f \in \mathfrak{M}} f(x) = \bar{f}(x)$ ,  $\lim_{f \in \mathfrak{M}} f(x) = \underline{f}(x)$ ; dann gilt für die Schwandlungsfunktionen (§ 26, 3)  $\omega(x)$  und  $\omega(x)$  von  $\bar{f}(x)$  bzw.  $\underline{f}(x)$ :

**29-1.1.** In jedem Punkte  $a \in A^0$  ist  $\bar{\omega}(a) \leq \sigma(a)$ ,  $\omega(a) \leq \sigma(a)$ .

Es genügt zu zeigen: aus  $y < \bar{\omega}(a)$  folgt  $y \leq \sigma(a)$ . Ist  $y < \bar{\omega}(a)$ , so gibt es nach 26-3.11 in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $a' \in A \setminus U_a$  und ein  $a'' \in A \setminus U_a$ , so daß  $\| \bar{f}(a') - \bar{f}(a'') \| > y$ ; sei etwa  $\bar{f}(a') > \bar{f}(a'')$ ; dann gibt es Zahlen  $y', y''$ , so daß  $\bar{f}(a') > y' > y'' > \bar{f}(a'')$  und  $\| y' - y'' \| > y$ ; nach Definition von  $\bar{f}(a')$  gibt es unendlich viele  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $f(a') \geq y'$ , und nach Definition von  $\bar{f}(a'')$  gibt es höchstens endlich viele  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $f(a'') \geq y''$ ; also gibt es unendlich viele  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $\| f(a') - f(a'') \| \geq \| y' - y'' \| > y$ ; also gibt es unendlich viele  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $\omega_f(U_a) > y$ , also ist  $y \leq \sigma(a)$ , w. z. b. w.

Literatur: Der Begriff der Grenzwertung stammt von C. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929) S. 527.

**2. Gleichgradige Stetigkeit.** Sei wieder  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Funktionen auf  $A$ ; dann heißt  $\mathfrak{M}$  gleichgradig stetig im Punkte  $a \in A$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$  gibt, so daß  $\| f(x) - f(a) \| < \delta$  für alle  $x \in A \setminus U_a$  und alle  $f \in \mathfrak{M}$ . Die Folge  $((f_n))$  von Funktionen auf  $A$  heißt gleichgradig stetig im Punkte  $a \in A$ , wenn es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$  gibt, so daß  $\| f_n(x) - f_n(a) \| < \delta$  für alle  $x \in A \setminus U_a$  und alle  $n$ .

Ist die Funktionenmenge  $\mathfrak{M}$  (die Funktionenfolge  $((f_n))$ ) gleichgradig stetig in  $a$ , so auch jeder Teil von  $\mathfrak{M}$  (jede Teilfolge von  $((f_n))$ ); fügt man zu einer in  $a$  gleichgradig stetigen Funktionenmenge (Funktionenfolge) endlich viele in  $a$  stetige Funktionen hinzu, so bleibt sie gleichgradig stetig in  $a$ . Ist die Funktionenmenge  $\mathfrak{M}$  gleichgradig stetig in  $a$ , so auch jede Funktionenfolge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{M}$ . Ist die Funktionenmenge  $\mathfrak{M}$  (die Funktionenfolge  $((f_n))$ ) gleichgradig stetig in  $a$ , so ist jedes  $f \in \mathfrak{M}$  (jedes  $f_n$ ) stetig in  $a$  — aber nicht umgekehrt.

**29-2.1.** Damit die Funktionenmenge  $\mathfrak{M}$  gleichgradig stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  eine Umgebung  $U_a$  gebe, so daß  $\omega_f(U_a) < \delta$  für alle  $f \in \mathfrak{M}$ .

Notwendig: Ist  $\mathfrak{M}$  gleichgradig stetig in  $a$ , so gibt es ein  $U_a$ , so daß  $\| f(x) - f(a) \| < \frac{\delta}{3}$  für alle  $x \in A \setminus U_a$  und alle  $f \in \mathfrak{M}$ ; für alle  $x \in A \setminus U_a$ ,  $x' \in A \setminus U_a$  und alle  $f \in \mathfrak{M}$  ist dann  $\| f(x) - f(x') \| \leq \| f(x) - f(a) \| + \| f(a) - f(x') \| < \frac{2\delta}{3}$ , also  $\omega_f(U_a) \leq \frac{2\delta}{3} < \delta$ . Hinreichend: Aus  $\omega_f(U_a) < \delta$  folgt  $\| f(x) - f(a) \| < \delta$  für alle  $x \in A \setminus U_a$ .

**29-2.2.** Damit die Menge  $\mathfrak{M}$  (die Folge  $((f_n))$ ) im Punkte  $a \in A$  stetiger Funktionen gleichgradig stetig sei im Punkte  $a$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $\sigma(a) = 0$  sei.



Notwendig: Dies folgt unmittelbar aus 29.2.1. Hinreichend: Ist  $\sigma(a) = 0$ , so gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $U_a$ , so daß  $\omega_f(U_a) < \delta$  für alle  $f \in \mathfrak{M}$  mit höchstens endlich vielen Ausnahmen; seien  $f_1, f_2, \dots, f_n$  diese Ausnahmen. Da die Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  stetig in  $a$ , gibt es eine Umgebung  $U_a^* \subseteq U_a$ , so daß  $\|f_i(x) - f_i(a)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a^*$  und für  $i = 1, 2, \dots, n$ ; da aus  $\omega_f(U_a) < \delta$  folgt:  $\|f(x) - f(a)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a^*$ , so gilt nun  $\|f(x) - f(a)\| < \delta$  für alle  $x \in A \cap U_a^*$  und alle  $f \in \mathfrak{M}$ , d. h.  $\mathfrak{M}$  ist gleichgradig stetig in  $a$ .

**29.2.21.** Ist  $((f_\nu))$  eine im Punkte  $a \in A$  konvergente Folge stetiger Funktionen auf  $A$ , so ist, damit sie gleichgradig stetig sei in  $a$ , notwendig und hinreichend, daß sie stetig konvergent sei in  $a$ .

Dies folgt aus 29.2.2 und 28.9.3.

**29.2.3.** Ist  $\mathfrak{M}$  eine im Punkte  $a \in A$  gleichgradig stetige Menge von Funktionen auf  $A$ , so sind die beiden Funktionen  $\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  und  $\inf_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  stetig in  $a$ .

Wir setzen  $\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x) = f^*(x)$  und bezeichnen die Schwankungsfunktion (§ 26, 3) von  $f^*$  mit  $\omega(x)$ . Nach 26.3.2 ist zu zeigen:  $\omega(a) = 0$ . Wäre  $\omega(a) > 0$ ,  $0 < \delta < \omega(a)$ , so gäbe es in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $a' \in A \cap U_a$  und ein  $a'' \in A \cap U_a$ , so daß  $\|f^*(a') - f^*(a'')\| > \delta$ ; sei etwa  $f^*(a') > f^*(a'')$ ; dann gibt es Zahlen  $y', y''$ , so daß  $f^*(a') > y' > y'' > f^*(a'')$  und  $\|y' - y''\| > \delta$ ; nach Definition von  $f^*(a')$  gibt es ein  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $f(a') > y'$ , und nach Definition von  $f^*(a'')$  ist  $f(a'') < y''$ ; dann aber ist  $\omega_f(U_a) > \|y' - y''\| > \delta$ ; zu jeder Umgebung  $U_a$  gäbe es also ein  $f \in \mathfrak{M}$  mit  $\omega_f(U_a) > \delta$ , im Widerspruche mit 29.2.1.

Aus 29.2.2 und 29.1.1 folgt:

**29.2.4.** Ist  $\mathfrak{M}$  eine im Punkte  $a \in A$  gleichgradig stetige Menge von Funktionen auf  $A$ , so sind die beiden Funktionen  $\lim_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  und  $\lim_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  stetig in  $a$ .

Literatur: Der Begriff der gleichgradigen Stetigkeit stammt von G. Ascoli, Mem. Linc. 18 (1883) S. 545. Satz 29.2.3 stammt von C. Arzelà, Mem. Bol. (5) 5 (1895) S. 225, Satz 29.2.4 von P. Montel, Ann. Éc. Norm. (3) 24 (1907) S. 261.

**3. Der normale Kern.** Sei  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Funktionen (bzw. sei  $((f_\nu))$  eine Folge von Funktionen) auf  $A$ ; ist  $a \in A^0$  und ist die Grenzschwankung (§ 29, 1; § 28, 9)  $\sigma(a) = 0$ , so sagt man:  $\mathfrak{M}$  (bzw.  $((f_\nu))$ ) ist normal in  $a$ ; die Menge aller  $a \in A$ , in denen  $\mathfrak{M}$  (bzw.  $((f_\nu))$ ) normal ist, heißt der (für  $\mathfrak{M}$ , bzw. für  $((f_\nu))$ ) normale Kern von  $A$ .

**29.3.1.** Ist  $((f_\nu))$  eine Funktionenfolge auf  $A$ , ist  $B$  der für  $((f_\nu))$  normale Kern von  $A$  und  $C$  eine separable Menge  $\subseteq B$ , so gibt es in  $((f_\nu))$  eine Teilfolge  $((f_{\nu_i}))$ , die in jedem Punkte  $a \in C$  stetig konvergent ist.

Sei  $\{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\}$  ein abzählbarer in  $C$  dichter Teil von  $C$ . Nach 17-3-581 gibt es, da der  $R_1$  kompakt ist, in  $((f_\nu))$  eine Teilfolge  $((f_\nu^1))$ , für die  $\lim f_\nu^1(a_1)$  existiert, in  $((f_\nu^1))$  gibt es eine Teilfolge, für die  $\lim f_\nu^2(a_2)$  existiert usw.; man erhält so eine Folge von Folgen  $((f_\nu^1)), ((f_\nu^2)), \dots, ((f_\nu^n)), \dots$ , in der  $((f_\nu^{n+1}))$  Teilfolge von  $((f_\nu^n))$  ist, und es existieren die Grenzwerte:  $\lim f_\nu^n(a_1)$ ,  $\lim f_\nu^n(a_2), \dots, \lim f_\nu^n(a_n)$ . Offenbar ist dann  $f_1^1, f_2^2, \dots, f_\nu^n, \dots$  eine Teilfolge von  $((f_\nu))$ , für die in jedem Punkte  $a_n$  der Grenzwert  $\lim f_\nu^n(a_n)$  existiert; es ist also jeder Punkt  $a_n$  Konvergenzpunkt von  $((f_\nu^n))$ . Sei  $a \in C$ ; da  $\sigma(a) = 0$ , gilt auch für die Grenzwertschwankung  $\sigma^*(a)$  der Teilfolge  $((f_\nu^n))$  von  $((f_\nu))$ :  $\sigma^*(a) = 0$ ; weil die Menge der Punkte  $a_n$  dicht in  $C$ , gibt es in jeder Umgebung  $U_a$  einen Punkt  $a_n$ ; also ist  $((f_\nu^n))$  stetig konvergent in  $a$  nach 28-9-3.

**29-3-11.** Ist  $((f_\nu))$  eine Funktionenfolge auf  $A$ , ist  $B$  der für  $((f_\nu))$  normale Kern von  $A$  und  $a \in A - B$ , so gibt es in  $((f_\nu))$  eine Teilfolge  $((f_{\nu_n}))$ , die keine im Punkte  $a$  stetig konvergente Teilfolge enthält.

Wegen  $a \in A - B$  ist  $\sigma(a) > 0$ ; sei  $0 < \delta < \sigma(a)$ ; dann gibt es nach Definition von  $\sigma(a)$  eine wachsende Indizesfolge  $((\nu_n))$ , so daß, wenn  $\omega_\nu(M)$  die Schwankung von  $f_\nu$  auf  $A \setminus M$  bezeichnet:  $\omega_{\nu_n}(K_{a, \frac{1}{n}}) \geq \delta$ ; ist dann  $U_a$  eine beliebige Umgebung von  $a$ , so gilt für fast alle Funktionen der Folge  $((f_{\nu_n}))$ :  $\omega_{\nu_n}(U_a) \geq \delta$ , also kann für keine Teilfolge von  $((f_{\nu_n}))$  die Grenzwertschwankung in  $a$  einen Wert  $< \delta$  haben, also kann nach 28-9-3 keine Teilfolge von  $((f_{\nu_n}))$  stetig konvergent in  $a$  sein.

**29-3-2.** Ist  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Funktionen auf  $A$ , ist  $B$  der für  $\mathfrak{M}$  normale Kern von  $A$  und  $C$  eine separable Menge  $\subseteq B$ , so gibt es in jedem unendlichen Teile  $\mathfrak{M}'$  von  $\mathfrak{M}$  eine aus zu je zweien verschiedenen Funktionen bestehende Folge  $((f_\nu))$ , die in jedem Punkte  $a \in C$  stetig konvergent ist.

Seien  $f^1, f^2, \dots, f^n, \dots$  unendlich viele verschiedene Funktionen aus  $\mathfrak{M}'$  und sei  $B^*$  der normale Kern von  $((f^n))$ ; dann ist offenbar  $B \subseteq B^*$ ; nach 29-3-1 gibt es in  $((f^n))$  eine Teilfolge  $((f^{\nu_\nu}))$ , die in jedem Punkte  $a \in C$  stetig konvergent ist. Setzen wir  $f^{\nu_\nu} = f_\nu$ , so leistet  $((f_\nu))$  das Verlangte.

**29-3-21.** Ist  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Funktionen auf  $A$ , ist  $B$  der für  $\mathfrak{M}$  normale Kern von  $A$  und  $a \in A - B$ , so gibt es in  $\mathfrak{M}$  eine aus zu je zweien verschiedenen Funktionen bestehende Folge  $((f_\nu))$ , die keine im Punkte  $a$  stetig konvergente Teilfolge enthält.

Sei  $f_1$  eine beliebige Funktion aus  $\mathfrak{M}$ ; wir nehmen an, die ersten  $n$  Funktionen  $f_1, f_2, \dots, f_n$  der gesuchten Folge  $((f_\nu))$  seien bekannt, und setzen  $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{M} - \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ . Nach Annahme ist  $\sigma(a) > 0$ ; sei  $0 < \delta < \sigma(a)$ ; nach Definition von  $\sigma(a)$  gibt es eine Funktion  $f_{n+1} \in \mathfrak{M}$ , für deren Schwan-

kung  $\omega_{n-1}(K_n^{-1})$  auf  $A$   $K_n^{-1}$  gilt:  $\omega_{n+1}(K_n^{-1}) \geq \delta$ . Wie bei 29.3.11 sieht man, daß keine Teilfolge der so definierten Folge  $((f_n))$  in  $a$  stetig konvergent sein kann.

Literatur: C. Carathéodory, Math. Ann. 101 (1929) S. 515.

**4. Kompakte Funktionenmengen.** Sei  $\mathfrak{A}$  die Menge aller Funktionen auf  $A$ ; wir machen  $\mathfrak{A}$  zu einem metrischen Raum, indem wir den Abstand  $\overline{fg}$  zweier Funktionen aus  $\mathfrak{A}$  definieren durch:  $\overline{fg} = \sup_{x \in A} \|f(x) - g(x)\|$ ; die metrischen Axiome  $1_m), 2_m)$  (§ 9, 2) sind dann offenbar erfüllt. Jede Funktion auf  $A$  ist nun ein Punkt des metrischen Raumes  $\mathfrak{A}$ , und die Aussage: „die Punktfolge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{A}$  konvergiert gegen den Punkt  $f \in \mathfrak{A}$ “ ist gleichbedeutend mit: „die Funktionenfolge  $((f_n))$  auf  $A$  konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion  $f$ “. Ist  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}$ , so ist also zufolge 17.3.531 die Aussage „ $\mathfrak{M}$  ist kompakt“ gleichbedeutend mit: „in jeder Folge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{M}$  gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge“.

**29.4.1.** Ist  $\mathfrak{M}$  eine Menge stetiger Funktionen auf  $A$ , so ist, damit  $\mathfrak{M}$  kompakt sei, notwendig und, wenn  $A$  in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß  $\mathfrak{M}$  gleichgradig stetig sei in jedem Punkte  $a \in A$ .

Notwendig: Ist  $\mathfrak{M}$  nicht gleichgradig stetig im Punkte  $a \in A$ , dann ist nach 29.2.2  $\sigma(a) > 0$ , d. h.  $a$  gehört nicht zu dem für  $\mathfrak{M}$  normalen Kern von  $A$ ; nach 29.3.21 gibt es also in  $\mathfrak{M}$  eine Folge  $((f_n))$ , die keine in  $a$  stetig konvergente Teilfolge enthält; da  $f_n$  stetig, gilt nach 26.3.2, wenn  $\omega_n$  die Schwankungsfunktion von  $f_n$  bedeutet:  $\omega_n(a) = 0$ ; also kann nach 28.9.41 auch keine Teilfolge von  $((f_n))$  gleichmäßig in  $a$  konvergieren; nach 28.4.2 gibt es also in  $((f_n))$  keine gleichmäßig konvergente Teilfolge, also ist  $\mathfrak{M}$  nicht kompakt. Hinreichend: Sei  $((f_n))$  eine Funktionenfolge aus  $\mathfrak{M}$ ; wir haben zu zeigen:  $((f_n))$  enthält eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Da  $((f_n))$  gleichgradig stetig in jedem Punkte  $a \in A$ , gilt für die Grenzwertschwankung  $\sigma(a)$  von  $((f_n))$  nach 29.2.2:  $\sigma(a) = 0$  für alle  $a \in A$ , d. h. der für  $((f_n))$  normale Kern von  $A$  fällt mit  $A$  zusammen. Da  $A$  nach 15.1.41 separabel ist, gibt es in  $((f_n))$  zufolge 29.3.1 eine Teilfolge  $((f_{n_i}))$ , die in jedem Punkte  $a \in A$  stetig konvergiert; nach 28.9.4 konvergiert dann  $((f_{n_i}))$  auch gleichmäßig in jedem Punkte  $a \in A$ , und mithin ist  $((f_{n_i}))$  nach 28.4.2 gleichmäßig konvergent.

Literatur: Der Inhalt dieser Nummer geht im wesentlichen zurück auf C. Arzelà.

## Viertes Kapitel.

# Borelsche Mengen und Bairesche Funktionen.

### § 30. Die Urbildmengen einer Funktion.

1. Urbildmengen. Sei  $E$  eine ganz beliebige Menge<sup>1)</sup>, die wir als den zugrunde gelegten Bereich bezeichnen, und sei  $f$  eine reelle Funktion auf  $E$  (§ 25, 4). Für jedes  $y \in \bar{R}_1$  betrachten wir die in § 25, 8 eingeführten Urbildmengen  $[f(x) > y]$ ,  $[f(x) < y]$ ,  $[f(x) \geq y]$ ,  $[f(x) \leq y]$ . Die Mengen  $[f(x) > y]$  und  $[f(x) \leq y]$  sind Komplemente voneinander, ebenso die Mengen  $[f(x) < y]$  und  $[f(x) \geq y]$ . Es ist  $[f(x) > +\infty] = \Lambda$ ,  $[f(x) < -\infty] = \Lambda$ ;  $[f(x) \leq +\infty] = E$ ,  $[f(x) \geq -\infty] = E$ . Offenbar gelten die Sätze:

**30-1-1.** Für  $y < z$  ist:

$$\begin{aligned} [f(x) \geq y] &\supseteq [f(x) > y] \supseteq [f(x) \geq z] \supseteq [f(x) > z] \\ [f(x) < y] &\supseteq [f(x) \leq y] \supseteq [f(x) < z] \supseteq [f(x) \leq z] \end{aligned}$$

**30-1-2.** Ist  $M \subseteq \bar{R}_1$  und  $\inf M = y$ ,  $y \sim \varepsilon M$ , so ist:

$$\begin{aligned} [f(x) > y] &= \bigcap_{z \in M} [f(x) > z] = \bigcap_{z \in M} [f(x) \geq z]; \\ [f(x) \leq y] &= \bigcap_{z \in M} [f(x) < z] = \bigcap_{z \in M} [f(x) \leq z]. \end{aligned}$$

**30-1-21.** Ist  $M \subseteq \bar{R}_1$  und  $\sup M = y$ ,  $y \sim \varepsilon M$ , so ist:

$$\begin{aligned} [f(x) < y] &= \bigcup_{z \in M} [f(x) < z] = \bigcup_{z \in M} [f(x) \leq z]; \\ [f(x) \geq y] &= \bigcup_{z \in M} [f(x) \geq z] = \bigcup_{z \in M} [f(x) > z]. \end{aligned}$$

Ist auch  $g$  eine Funktion auf  $E$ , so gilt offenbar:

**30-1-3.** Damit  $f = g$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß für alle  $y \in \bar{R}_1$  gelte:  $[f(x) > y] = [g(x) > y]$  (oder  $[f(x) \geq y] = [g(x) \geq y]$ , oder  $[f(x) < y] = [g(x) < y]$ , oder  $[f(x) \leq y] = [g(x) \leq y]$ ).

---

<sup>1)</sup> Die Menge  $E$  braucht nicht Punktmenge eines (topologischen oder metrischen) Raumes zu sein.

Wegen 30-1-2 und 30-1-21 folgt daraus sofort:

**30-1-31.** Ist  $M \subseteq \bar{R}_1$  und dicht im  $\bar{R}_1$  und gilt für alle  $z \in M$ :  $[f(x) > z] = [g(x) > z]$  (oder  $[f(x) \geq z] = [g(x) \geq z]$ , oder  $[f(x) < z] = [g(x) < z]$ , oder  $[f(x) \leq z] = [g(x) \leq z]$ ), so ist  $f = g$ .

**30-1-4.** Sei jedem  $y \in \bar{R}_1$  eine Menge  $G_y \subseteq E$  zugeordnet; damit es eine Funktion  $f$  auf  $E$  gebe, so daß  $[f(x) > y] = G_y$  (bzw.  $[f(x) < y] = G_y$ ) für alle  $y$ , ist notwendig und hinreichend, daß:  $G_y = \bigcup_{z > y} G_z$  (bzw.  $G_y = \bigcap_{z < y} G_z$ ).

Notwendig: Dies folgt aus 30-1-2. Hinreichend: Wir setzen  $H_y = \bigcap_{z < y} G_z - G_y$  (wobei  $\bigcap_{z < -\infty} G_z = E$  zu setzen ist). Dann ist  $H_y H_{y'} = \Lambda$  für  $y \neq y'$ ; denn ist etwa  $y' < y$ , so ist  $H_y \subseteq G_{y'}$  und  $H_y G_{y'} = \Lambda$ . Ferner ist  $\bigcup_y H_y = E$ ; denn ist  $x \in E$ , so gibt es (da nach Voraussetzung  $G_{y'} \supseteq G_y$  für  $y' < y$ ) genau ein  $y$ , so daß  $x \in G_z$  für  $z < y$  und  $x \notin G_z$  für  $z > y$ ; wegen  $G_y = \bigcup_{z > y} G_z$  ist dann auch  $x \in G_y$  und somit  $x \in H_y$ .

— Wir definieren nun eine Funktion  $f$  auf  $E$  durch:  $f(x) = y$  für  $x \in H_y$  und behaupten: es ist  $[f(x) > y] = G_y$ . Ist in der Tat  $f(x) = v > y$ , so ist  $x \in H_v$ , somit nach Definition von  $H_v$  auch  $x \in G_y$ ; ist umgekehrt  $x \in G_y$ , also auch  $x \in G_u$  für  $u \leq y$ , so ist  $x \notin H_u$  für  $u \leq y$ , somit  $f(x) > y$ .

**30-1-41.** Ist  $M$  eine im  $\bar{R}_1$  dichte Menge endlicher Zahlen, und ist jedem  $y \in M$  eine Menge  $G_y \subseteq E$  so zugeordnet, daß  $G_y = \bigcap_{z > y, z \in M} G_z$  für alle  $y \in M$ , so gibt es genau eine Funktion  $f$  auf  $E$ , so daß  $[f(x) > y] = G_y$  für alle  $y \in M$ .

Setzen wir  $G_y = \bigcap_{z > y, z \in M} G_z$  für  $y \in \bar{R}_1 - M$ , so ist nun  $G_y$  für alle  $y \in \bar{R}_1$  definiert und die  $G_y$  genügen der Bedingung von 30-1-4; also gibt es nach 30-1-4 ein  $f$ , so daß  $[f(x) > y] = G_y$  für alle  $y \in \bar{R}_1$ , insbesondere also auch für alle  $y \in M$ , und nach 30-1-31 kann es nur ein solches  $f$  geben.

Seien  $f_1$  und  $f_2$  Funktionen auf  $E$ ; wir untersuchen die Menge  $[f_1(x) + f_2(x) > y]$  aller  $x \in E$ , in denen  $f_1(x) + f_2(x)$  definiert und  $> y$  ist. Sei zunächst  $y$  endlich; dann ist  $f_1(x) + f_2(x) > y$  gleichbedeutend mit:  $f_1(x) > y - f_2(x)$ , und das ist gleichbedeutend mit der Existenz eines rationalen  $r$ , so daß  $f_1(x) > r > y - f_2(x)$ ; also ist:

$$(1) \quad [f_1(x) + f_2(x) > y] = \bigcup_r [f_1(x) > r] \cdot [f_2(x) > y - r],$$

wo  $r$  alle rationalen Zahlen durchläuft; diese zunächst für endliches  $y$  bewiesene Formel gilt offenbar auch für  $y = +\infty$ ,  $y = -\infty$ . Für  $[f_1(x) + f_2(x) < y]$  gilt eine analoge Formel.

Ganz analog findet man, daß, wenn  $f_1 \geq 0, f_2 \geq 0, y > 0$ , die Ungleichung  $f_1(x) f_2(x) > y$  gleichbedeutend ist mit der Existenz eines positiven

rationalen  $p$ , so daß  $f_1(x) > p > \frac{y}{f_2(x)}$ , und man erhält (wenn  $f_1 \geq 0$ ,  $f_2 \geq 0$ ,  $y > 0$ ):

$$(1.1) \quad [f_1(x)f_2(x) > y] = \bigcap_p [f_1(x) > p] \cdot \left[ f_2(x) > \frac{y}{p} \right],$$

wo  $p$  alle positiven rationalen Zahlen durchläuft. Für  $[f_1(x)f_2(x) < y]$  gilt eine analoge Formel.

Setzen wir:

$$\bar{f}(x) = \max(f_1(x), f_2(x)), \quad \underline{f}(x) = \min(f_1(x), f_2(x)),$$

so gelten die Formeln:

$$(1.2) \quad \begin{aligned} [\bar{f}(x) > y] &= [f_1(x) > y] + [f_2(x) > y], \\ [\bar{f}(x) < y] &= [f_1(x) < y] \cdot [f_2(x) < y], \end{aligned}$$

$$(1.21) \quad \begin{aligned} [f(x) < y] &= [f_1(x) < y] + [f_2(x) < y], \\ [\underline{f}(x) > y] &= [f_1(x) > y] \cdot [f_2(x) > y], \end{aligned}$$

sowie die analogen Formeln mit den Zeichen  $\geq$  bzw.  $\leq$ . Ferner gilt:

$$(1.3) \quad [\sup_n f_n(x) > y] = \bigcap_n [f_n(x) > y]; \quad [\sup_n f_n(x) \leq y] = \bigcap_n [f_n(x) \leq y];$$

$$(1.31) \quad [\inf_n f_n(x) < y] = \bigcap_n [f_n(x) < y]; \quad [\inf_n f_n(x) \geq y] = \bigcap_n [f_n(x) \geq y].$$

**2. Urbildmengen und Funktionensysteme.** Sei nun  $\mathfrak{S}$  irgendein (nicht leeres) System von Funktionen auf  $E$ . Das System der Mengen  $[f(x) > y]$  (für alle  $y \in R_1$  und alle  $f \in \mathfrak{S}$ ) bezeichnen wir mit  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ , die Systeme der Mengen  $[f(x) < y]$ ,  $[f(x) \geq y]$ ,  $[f(x) \leq y]$  mit  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ . Dann besteht  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$  aus den Komplementen der Mengen  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$  und  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$  aus den Komplementen der Mengen  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ .

**30-2.1.** Es gelten die Formeln:

$$\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{S})_\sigma, \quad \mathfrak{G}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{S})_\sigma, \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{S})_\delta, \quad \mathfrak{F}(\mathfrak{S}) \subseteq \mathfrak{G}(\mathfrak{S})_\delta.$$

Denn ist  $y_n > y$ ,  $y_n \rightarrow y$ , so ist nach 30-1.2:

$$[f(x) > y] = \bigcap_n [f(x) \geq y_n], \quad [f(x) \leq y] = \bigcap_n [f(x) < y_n],$$

woraus die erste und letzte Formel folgen; ebenso folgt die zweite und dritte aus 30-1.21.

Setzt man  $y = +\infty$  bzw.  $y = -\infty$ , so sieht man, daß

$$(2) \quad \Lambda \in \mathfrak{G}(\mathfrak{S}), \quad \Lambda \in \mathfrak{G}(\mathfrak{S}), \quad E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{S}), \quad E \in \mathfrak{F}(\mathfrak{S}).$$

**30-2.2.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$  und  $\Lambda \in \mathfrak{M}$ , so gibt es ein System  $\mathfrak{S}$  von Funktionen auf  $E$ , so daß  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$  (bzw.  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ).

Man bilde zu jedem  $M \in \mathfrak{M}$  die Funktion, die  $= 1$  ist auf  $M$  und  $= -\infty$  (bzw.  $= +\infty$ ) auf  $E - M$ . Das System aller dieser Funktionen leistet das Verlangte.

Bilden wir die Summe aller möglichen Funktionensysteme  $\mathfrak{S}$  auf  $E$ , für die  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$  ist, so erhalten wir das umfassendste derartige Funktionensystem; wir bezeichnen es mit  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ; ebenso bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{N})$  das umfassendste Funktionensystem  $\mathfrak{S}$  auf  $E$ , für das  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$  ist. Das System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften: Ist  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ , so gilt für jedes  $y$ :  $[f(x) > y] \in \mathfrak{M}$ ; gilt umgekehrt  $[f(x) > y] \in \mathfrak{M}$  für jedes  $y$ , so ist  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ; zu jedem  $M \in \mathfrak{M}$  gibt es ein  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  und ein  $y$ , so daß  $[f(x) > y] = M$ . Wegen (2) und 30.2.2 existiert zu einem (nicht leeren) Mengensystem  $\mathfrak{N}$  das Funktionensystem  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{N})$ ) dann und nur dann, wenn  $\Lambda \in \mathfrak{N}$ . — Aus der Definition von  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  folgt unmittelbar:

**30.2.21.** Ist  $c$  eine endliche Konstante, so folgt aus  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  auch  $f + c \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ; ist  $S$  die Schränkungs transformation, so folgt aus  $S(f) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  auch  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ , und wenn  $E \in \mathfrak{N}$ , folgt aus  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  auch  $S(f) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ .

Seien nun  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  Systeme von Teilen von  $E$  und sei  $\Lambda \in \mathfrak{M}$ ,  $\Lambda \in \mathfrak{N}$ ; das System der Komplemente der Mengen von  $\mathfrak{M}$  bzw.  $\mathfrak{N}$  zu  $E$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}'$  bzw.  $\mathfrak{N}'$ . Im allgemeinen wird es kein Funktionensystem  $\mathfrak{S}$  auf  $E$  geben, für das  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$  wäre; nach 30.2.1 ist, damit es ein solches Funktionensystem gebe, jedenfalls notwendig, daß

$$(2.1) \quad \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}'_o, \quad \mathfrak{N}' \subseteq \mathfrak{M}_o$$

sei (woraus durch Komplementbildung von selbst  $\mathfrak{M}' \subseteq \mathfrak{N}_o$ ,  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}'_o$  folgt); doch ist das Bestehen von (2.1) keineswegs hinreichend für die Existenz eines solchen Funktionensystems<sup>1)</sup>. Wenn es aber ein solches Funktionensystem gibt, so ist die Summe aller möglichen solchen Funktionensysteme das umfassendste derartige Funktionensystem; wir bezeichnen dieses umfassendste Funktionensystem  $\mathfrak{S}$  auf  $E$ , für das  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$  ist, mit  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  und sehen:

<sup>1)</sup> Beispiel: Sei  $E$  der  $R_1$ ,  $\mathfrak{M}$  das System aller offenen Mengen des  $R_1$  und  $\mathfrak{N}$  das System der Komplemente der abgeschlossenen Intervalle, also  $\mathfrak{N}'$  das System der abgeschlossenen Intervalle; dann ist (2.1) erfüllt, und man erkennt leicht, daß es kein System  $\mathfrak{S}$  mit  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$  gibt; denn der Beweis von 30.2.1 zeigt, daß jede Menge aus  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$  Summe einer monoton wachsenden Mengenfølge aus  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$  ist; es ist aber keineswegs jede offene Menge des  $R_1$  Summe einer monoton wachsenden Folge abgeschlossener Intervalle.

**30-2-22.** Das System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  existiert dann und nur dann, wenn es überhaupt ein Funktionensystem  $\mathfrak{S}$  auf  $E$  mit  $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{U}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$  gibt.

Das System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  ist charakterisiert durch folgende Eigenschaften: Ist  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ , so gilt für jedes  $y$ :  $[f(x) > y] \in \mathfrak{M}$ ,  $[f(x) < y] \in \mathfrak{N}$ ; gilt umgekehrt  $[f(x) > y] \in \mathfrak{M}$ ,  $[f(x) < y] \in \mathfrak{N}$  für jedes  $y$ , so ist  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ; zu jedem  $M \in \mathfrak{M}$ , bzw. zu jedem  $N \in \mathfrak{N}$ , gibt es ein  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  und ein  $y$ , so daß  $[f(x) > y] = M$ , bzw.  $[f(x) < y] = N$ . Ist z. B.  $E$  ein metrischer Raum und  $\mathfrak{O}$  das System der in  $E$  offenen Mengen, so ist, wie aus 25-8-1, 25-8-11, 25-8-14 folgt,  $\mathfrak{S}(\mathfrak{O}, \mathfrak{O})$  das System der stetigen Funktionen auf  $E$ .

**30-2-3.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring und  $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{T} = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$ ), so ist  $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_\delta$  (bzw.  $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_\delta$ ).

Sei  $A \in \mathfrak{M}_\delta$ ; nach 3-5-2 ist  $A = \bigcup_n A_n$  mit  $A_n \in \mathfrak{M}$  und  $A_{n+1} \subseteq A_n$ . Wir definieren eine Funktion  $f$  auf  $E$  durch:  $f(x) = \frac{n}{n+1}$  für  $x \in A_n - A_{n+1}$ ,  $f(x) = 1$  für  $x \in A$ ,  $f(x) = -\infty$  für  $x \in E - A_1$ ; für jedes  $y \in R_1$  ist dann  $[f(x) > y] \in \mathfrak{M}$ , somit ist  $f \in \mathfrak{T}$ , und da  $[f(x) \geq 1] = A$ , ist  $A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{T})$ . Damit ist gezeigt, daß  $\mathfrak{M}_\delta \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{T})$ ; nach 30-2-1 ist aber auch  $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}) \subseteq \mathfrak{M}_\delta$ .

**30-2-31.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $A \in \mathfrak{M}$ , und  $\mathfrak{M}'$  das System der Komplemente der Mengen von  $\mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M}'_A)$ ;  $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M}) = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}'_A, \mathfrak{M})$ .

Denn setzen wir  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{T}$ , so ist nach 30-2-3  $\mathfrak{F}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}_\delta$ , also durch Komplementbildung  $\mathfrak{U}(\mathfrak{T}) = \mathfrak{M}'_A$ .

**3. Autarke Funktionensysteme.** Ein Funktionensystem  $\mathfrak{S}$  auf  $E$  heißt autark, wenn es folgende Eigenschaften hat:

1a) Alle Konstanten kommen in  $\mathfrak{S}$  vor.

2a) Ist  $f \in \mathfrak{S}$  und  $c$  eine endliche Konstante, so ist auch  $f + c \in \mathfrak{S}$ , und wenn  $c > 0$ , auch  $cf \in \mathfrak{S}$ .

3a) Ist  $f \in \mathfrak{S}$  und bedeutet  $S$  die Schränkungstransformation, so ist auch  $S(f) \in \mathfrak{S}$ , und wenn  $|f| \leq 1$ , auch  $S^{-1}(f) \in \mathfrak{S}$ .

4a) Ist  $f_1 \in \mathfrak{S}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{S}$ , so ist auch  $\max(f_1, f_2) \in \mathfrak{S}$ ,  $\min(f_1, f_2) \in \mathfrak{S}$ .

Das System aller Funktionen auf  $E$  ist autark; ist  $E$  ein metrischer Raum, so ist das System aller stetigen Funktionen auf  $E$  autark. —

Ist  $a$  eine Konstante, so setzen wir:

(3)  $f_a(x) = \min(f(x), a)$ ,  $f_a(x) = \max(f(x), a)$ ;

ist auch  $b$  eine Konstante und  $b \geq a$ , so setzen wir:

(3-1)  $f_a^b(x) = \min(f_a(x), b) = \max(f^b(x), a) = (f_a(x))^b = (f^b(x))_a$ .



Aus 1a) und 4a) folgt:

**30.3.1.** Ist  $\mathcal{S}$  autark und  $f \in \mathcal{S}$ , so ist auch  $f^a \in \mathcal{S}$ ,  $f_a \in \mathcal{S}$ ,  $f_a^b \in \mathcal{S}$ .

**30.3.2.** Ist  $\mathcal{S}$  autark, so erhält man das ganze Mengensystem  $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ , indem man für ein beliebiges, festes  $y < +\infty$  und alle  $f \in \mathcal{S}$  die Menge  $[f(x) > y]$  bildet. Analoges gilt für  $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ .

Sei zunächst  $y$  endlich; da neben  $f$  auch  $S(f)$  in  $\mathcal{S}$  vorkommt, erhält man das ganze Mengensystem  $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ , indem man für jedes  $z \in [-1, 1]$  und jedes  $f \in \mathcal{S}$  die Menge  $[f(x) > z]$  bildet; ist also  $A \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ , so gibt es ein  $z^* \in [-1, 1]$  und ein  $f^* \in \mathcal{S}$ , so daß  $A = [f^*(x) > z^*]$ ; setzen wir  $f = f^* + y - z^*$ , so ist nach 2a) auch  $f \in \mathcal{S}$ , und es ist  $A = [f(x) > y]$ . Sei sodann  $y = -\infty$ ; wie eben gezeigt, gibt es, wenn  $A \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ , ein  $\bar{f} \in \mathcal{S}$ , so daß  $A = [\bar{f}(x) > -1]$ ; bilden wir nach (3.1):  $\bar{f} = \bar{f}_{-1}^1$ , so ist auch  $A = [\bar{f}(x) > -1]$ ; setzen wir  $f = S^{-1}(\bar{f})$ , so ist nach 3a) auch  $f \in \mathcal{S}$ , und es ist  $A = [f(x) > -\infty]$ .

**30.3.3.** Ist  $\mathcal{S}$  autark, so ist jedes der Mengensysteme  $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$ ,  $\mathcal{F}(\mathcal{S})$  ein die Mengen  $A$  und  $B$  enthaltender Ring.

Nach (2) gilt  $A \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ , aus 1a) folgt:  $B \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ . Sei  $A \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ ,  $B \in \mathcal{G}(\mathcal{S})$ ; nach 30.3.2 gibt es ein  $f_1 \in \mathcal{S}$  und ein  $f_2 \in \mathcal{S}$ , so daß  $A = [f_1(x) > 0]$ ,  $B = [f_2(x) > 0]$ ; setzen wir  $\bar{f}(x) = \max(f_1(x), f_2(x))$ ,  $\underline{f}(x) = \min(f_1(x), f_2(x))$ , so ist nach 4a)  $\bar{f} \in \mathcal{S}$ ,  $\underline{f} \in \mathcal{S}$ , und nach (1.2), (1.21) ist:  $A + B = [\bar{f}(x) > 0]$ ,  $A B = [\underline{f}(x) > 0]$ ; also ist  $\mathcal{G}(\mathcal{S})$  ein Ring.

**30.3.4.** Damit  $\mathcal{S}(\mathcal{M}, *)$  autark sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\mathcal{M}$  ein Ring und  $A \in \mathcal{M}$ ,  $E \in \mathcal{M}$  sei.

Notwendig: Dies folgt aus 30.3.3. Hinreichend: 1a) ist erfüllt wegen  $A \in \mathcal{M}$ ,  $E \in \mathcal{M}$ ; 2a) wird von jedem System  $\mathcal{S}(\mathcal{M}, *)$  erfüllt, ebenso 3a) (wenn  $E \in \mathcal{M}$ ); daß 4a) erfüllt ist, folgt, wenn  $\mathcal{M}$  ein Ring ist, aus (1.2), (1.21).

**30.3.41.** Existiert das System  $\mathcal{S}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , so ist, damit es autark sei, notwendig und hinreichend, daß  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  ein Ring und  $A \in \mathcal{M} \mathcal{N}$ ,  $E \in \mathcal{M} \mathcal{N}$  sei.

Der Beweis ist derselbe wie für 30.3.4.

Da das System aller Funktionen auf  $E$  autark ist, gibt es zu jedem Funktionensystem  $\mathcal{S}$  auf  $E$  ein autarkes Funktionensystem  $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{S}$ ; und da der Durchschnitt aller  $\mathcal{S}$  umfassenden autarken Systeme von Funktionen auf  $E$  wieder autark ist, so ist er das kleinste autarke System über  $\mathcal{S}$ ; wir bezeichnen es mit  $\mathcal{S}_a$ ; es kann ganz ähnlich gebildet werden, wie in 3.1.1 die Menge  $\mathcal{M}$ .

Sei  $\mathfrak{M}$  ein beliebiges System von Teilen von  $E$ ; nach § 3, 2 gibt es einen kleinsten Ring über  $\mathfrak{M} + \{A, E\}$ ; wir bezeichnen ihn mit  $\mathfrak{M}_R$ ; ist  $\mathfrak{M}_r$  der kleinste Ring über  $\mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{M}_R = \mathfrak{M}_r + \{A, E\}$ .

**30·3·5.** Es ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_a) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})_R$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{C}_a) = \mathfrak{G}(\mathfrak{C})_R$ .

Zufolge von 30·3·3 ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_a)$  ein Ring über  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) + \{A, E\}$ ; also ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})_R \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_a)$ ; bleibt zu beweisen, daß auch  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_a) \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})_R$ . Wir setzen  $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})_R = \mathfrak{M}$ ; dann ist nach 30·3·4  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *)$  autark; und da  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *) \supseteq \mathfrak{C}$ , ist  $\mathfrak{C}_a \subseteq \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *)$ , also  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_a) \subseteq \mathfrak{M}$ , d. h.  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_a) \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})_R$ , w. z. b. w.

**4. Völlig autarke Funktionensysteme.** Wir nennen ein Funktionensystem  $\mathfrak{C}$  auf  $E$  geschlossen, wenn zu jeder gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{C}$  auch  $\lim_n f_n$  in  $\mathfrak{C}$  vorkommt; wir nennen  $\mathfrak{C}$  additiv, wenn neben  $f_1$  und  $f_2$  auch die Funktion  $f_1 + f_2$  in  $\mathfrak{C}$  vorkommt, vorausgesetzt, daß sie auf ganz  $E$  definiert ist; ein autarkes, geschlossenes und additives Funktionensystem nennen wir völlig autark. Ist  $E$  ein metrischer Raum, so ist das System aller stetigen Funktionen auf  $E$  völlig autark.

Da das System aller Funktionen auf  $E$  geschlossen, additiv, völlig autark ist, und da der Durchschnitt aller ein gegebenes Funktionensystem  $\mathfrak{C}$  umfassenden geschlossenen (bzw. additiven, völlig autarken) Funktionensysteme wieder geschlossen (bzw. additiv, völlig autark) ist, gibt es zu jedem Funktionensystem  $\mathfrak{C}$  auf  $E$  ein kleinstes geschlossenes (bzw. additives, völlig autarkes) Funktionensystem über  $\mathfrak{C}$ . Auf die Bildung des kleinsten völlig autarken Funktionensystemes über  $\mathfrak{C}$  kommen wir in 31·3·22 zurück.

**30·4·1.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark und geschlossen, so sind  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$   $\sigma$ -Ringe,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C})$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$   $\delta$ -Ringe.

Wir zeigen etwa, daß  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$  ein  $\sigma$ -Ring ist; daraus folgt dann durch Übergang zu den Komplementen, daß  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C})$  ein  $\delta$ -Ring ist. Da nach 30·3·3  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$  ein Ring ist, bleibt nur zu zeigen: ist  $A_n \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$ , so ist auch  $S A_n \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$ . Nach 30·3·2 gibt es ein  $f_n \in \mathfrak{C}$ , so daß  $A_n = [f_n(x) > 0]$ ; indem wir gemäß (3·1)  $f_n$  ersetzen durch  $(f_n)^{\frac{1}{n}}$ , können wir zufolge 30·3·1 von vornherein annehmen  $0 \leq f_n \leq \frac{1}{n}$ . Wir setzen  $g_n = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$ ; dann ist, da  $\mathfrak{C}$  autark, auch  $g_n \in \mathfrak{C}$ , und  $((g_n))$  konvergiert gleichmäßig

gegen eine Grenzfunktion  $g$ . Weil  $\mathfrak{S}$  geschlossen, ist  $g \in \mathfrak{S}$ ; und weil  $[g(\dot{x}) > 0] = \bigcap_n A_n$ , ist  $\bigcap_n A_n \in \mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ , w. z. b. w.

**30.4.2.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -Ring und  $\Lambda \in \mathfrak{M}$ , so sind  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  und  $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$  additiv. Sind  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$   $\sigma$ -Ringe und existiert das System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ , so ist es additiv.

Dies folgt unmittelbar aus (1).

**30.4.21.** Ist eines der Funktionensysteme  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ,  $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$ ,  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  autark und geschlossen, so ist es völlig autark.

Dies folgt aus 30.4.1, 30.4.2.

**30.4.3.** Damit  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  (oder  $\mathfrak{S}(*, \mathfrak{M})$ ) völlig autark sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -Ring und  $\Lambda \in \mathfrak{M}$ ,  $E \in \mathfrak{M}$  sei.

Notwendig: Dies folgt aus 30.3.4 und 30.4.1. Hinreichend: Nach 30.3.4 ist  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  autark; zufolge 30.4.21 ist also nur mehr zu zeigen:  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  ist geschlossen. Sei  $(f_n)$  eine gleichmäßig konvergente Folge aus  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  und  $f = \lim_n f_n$ ; setzen wir  $\sup_{x \in E} \|f_n(x) - f(x)\| = k_n$ , so gilt also  $k_n \rightarrow 0$ . Aus  $\|f_n - f\| \leq k_n$  folgt aber, wenn  $S$  die Schränkungstransformation bezeichnet:  $S(f_n) - k_n \leq S(f)$ , und mithin wegen  $S(f_n) \rightarrow S(f)$  und  $k_n \rightarrow 0$ :

$$(4) \quad S(f) = \sup_n (S(f_n) - k_n).$$

Nach 30.2.21 ist  $S(f_n) - k_n \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ; wegen (4) und (1.3) ist also auch  $S(f) \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  und somit auch  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$ ; also ist  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, *)$  geschlossen, w. z. b. w.

Analog beweist man:

**30.4.31.** Existiert das System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ , so ist, damit es völlig autark sei, notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  ein  $\sigma$ -Ring und  $\Lambda \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ ,  $E \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$  sei.

**5. Symmetrische Funktionensysteme.** Wir nennen ein Funktionensystem symmetrisch, wenn neben  $f \in \mathfrak{S}$  auch  $-f \in \mathfrak{S}$  gilt. Da  $[f(\dot{x}) < y] = [-f(\dot{x}) > -y]$ , sind bei symmetrischem  $\mathfrak{S}$  die Mengensysteme  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S})$  identisch, ebenso  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S})$ .

**30.5.1.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark und symmetrisch, so gilt neben  $f \in \mathfrak{S}$  auch  $|f| \in \mathfrak{S}$ , und wenn  $c$  eine endliche Konstante bedeutet, auch  $cf \in \mathfrak{S}$ .

Dies folgt wegen  $|f| = \max(f, -f)$  und  $cf = \pm |c| f$  aus Eigenschaft 4a) und 2a) (§ 30, 3) der autarken Systeme.

**30.5.2.** Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch, so auch das kleinste autarke System  $\mathfrak{S}_a$  über  $\mathfrak{S}$ .

Sei  $\mathfrak{S}'_a$  das System, das aus  $\mathfrak{S}_a$  entsteht, indem man jedes  $f \in \mathfrak{S}_a$  durch  $-f$  ersetzt; offenbar ist auch  $\mathfrak{S}'_a$  autark. Da  $\mathfrak{S}$  symmetrisch, ist  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}'_a$ .

d. h.  $\mathfrak{S}'_a$  ist ein autarkes System über  $\mathfrak{S}$ ; also ist  $\mathfrak{S}_a \subseteq \mathfrak{S}'_a$ . Sei nun  $f \in \mathfrak{S}_a$ ; dann ist auch  $f \in \mathfrak{S}'_a$ , also  $-f \in \mathfrak{S}_a$ , d. h.  $\mathfrak{S}_a$  ist symmetrisch.

**30.5.21.** Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch, so auch das kleinste völlig autarke System über  $\mathfrak{S}$ . Der Beweis ist analog dem von 30.5.2.

**30.5.3.** Existiert das System  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ , so ist es symmetrisch.

Sei  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ; dann ist für alle  $y \in R_1$ :  $[f(x) > -y] \in \mathfrak{M}$ ,  $[f(x) < -y] \in \mathfrak{M}$ ; wegen  $[-f(x) > y] = [f(x) < -y]$ ,  $[-f(x) < y] = [f(x) > -y]$  ist also auch  $[-f(x) > y] \in \mathfrak{M}$ ,  $[-f(x) < y] \in \mathfrak{M}$ , also  $-f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ .

**30.5.4.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $f \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$  und  $f \neq 0$  auf  $E$ , so ist auch  $\frac{1}{f} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ .

Denn es ist:  $\left[\frac{1}{f(x)} > y\right] = \left[f(x) < \frac{1}{y}\right] \cdot [f(x) > 0]$ , wenn  $y > 0$ ,  
 $\left[\frac{1}{f(x)} > y\right] = \left[f(x) < \frac{1}{y}\right] + [f(x) > 0]$ , wenn  $y < 0$ , und  $\left[\frac{1}{f(x)} > 0\right]$   
 $= [f(x) > 0] \cdot [f(x) < +\infty]$ , und analoge Formeln gelten für  $\left[\frac{1}{f(x)} < y\right]$ .

**30.5.5.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -Ring,  $A \in \mathfrak{M}$ ,  $E \in \mathfrak{M}$ ,  $f_1 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ,  $f_2 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ , und ist  $f_1 f_2$  (bzw.  $f_1 : f_2$ ) definiert auf  $E$ , so ist auch  $f_1 f_2 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$  (bzw.  $f_1 : f_2 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ).

Wegen 30.5.4 genügt es, die Behauptung für  $f_1 f_2$  nachzuweisen. Sei zunächst  $f_1 \geq 0$ ,  $f_2 \geq 0$ ; es gilt  $[f_1(x) f_2(x) > y] \in \mathfrak{M}$  nach (1.1), wenn  $y > 0$ ; da  $[f_1(x) f_2(x) > y] = E$  für  $y < 0$ , gilt dies auch für  $y < 0$ , und wegen  $[f_1(x) f_2(x) > 0] = [f_1(x) > 0] \cdot [f_2(x) > 0]$  gilt dies auch für  $y = 0$ ; es ist also  $[f_1(x) f_2(x) > y] \in \mathfrak{M}$  für alle  $y$ ; analog zeigt man, daß  $[f_1(x) f_2(x) < y] \in \mathfrak{M}$  für alle  $y$ ; also ist  $f_1 f_2 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ . — Haben  $f_1, f_2$  beliebiges Zeichen, so folgt zunächst aus 30.3.41, daß  $\mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$  autark, sodann aus 30.5.3, 30.5.1, daß  $|f_1| \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ,  $|f_2| \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ; wie eben bewiesen, ist dann auch  $|f_1| |f_2| \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ; wegen

$[f_1(x) f_2(x) > 0] = [f_1(x) > 0] \cdot [f_2(x) > 0] + [f_1(x) < 0] \cdot [f_2(x) < 0]$   
ist  $[f_1(x) f_2(x) > 0] \in \mathfrak{M}$ ; da für  $y > 0$ :

$[f_1(x) f_2(x) > y] = [|f_1(x)| |f_2(x)| > y] \cdot [f_1(x) f_2(x) > 0]$ ,  
und für  $y < 0$ :

$[f_1(x) f_2(x) > y] = [|f_1(x)| |f_2(x)| < |y|] + [f_1(x) f_2(x) > 0]$ ,  
ist also  $[f_1(x) f_2(x) > y] \in \mathfrak{M}$  für alle  $y$ ; ebenso zeigt man, daß  $[f_1(x) f_2(x) < y] \in \mathfrak{M}$ ; also ist  $f_1 f_2 \in \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ .

Literatur zu § 30. Der Gedanke der Charakterisierung von Funktionenklassen durch Urbildmengen stammt von H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 139. Systematische Darstellung zuerst bei F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 5 (1919) S. 292; Mengenlehre § 41.

## § 31. Erweiterung von Mengen- und Funktionensystemen.

1. Die Mengensysteme  $\mathfrak{M}^1$  und  $\mathfrak{M}_1$ . Sei wieder  $E$  eine ganz beliebige Menge,  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$ . Das (in § 3, 4 mit  $\mathfrak{M}_\sigma$  bezeichnete) kleinste  $\sigma$ -System über  $\mathfrak{M}$  bezeichnen wir nun mit  $\mathfrak{M}^1$ , das (in § 3, 4 mit  $\mathfrak{M}_\delta$  bezeichnete) kleinste  $\delta$ -System über  $\mathfrak{M}$  mit  $\mathfrak{M}_1$ . Satz 3-4-11 spricht sich dann so aus:

**31-1-1.** *Damit  $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}$  (bzw.  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$ ) sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System (bzw. ein  $\delta$ -System) sei.*

Und § 3 (4) ergibt:

**31-1-2.** *Bei beliebigem  $\mathfrak{M}$  ist  $(\mathfrak{M}^1)^1 = \mathfrak{M}^1$ ,  $(\mathfrak{M}_1)_1 = \mathfrak{M}_1$ .*

**31-1-3.** *Ist  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}^1$  (bzw.  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_1$ ), so ist  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 = \mathfrak{M}^1$  (bzw.  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_1 = \mathfrak{M}_1$ ).*

Da jedenfalls  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \supseteq \mathfrak{M}^1$ , ist nur zu zeigen:  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \subseteq \mathfrak{M}^1$ . Wegen  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}^1$  ist  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}^1$ , also  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \subseteq (\mathfrak{M}^1)^1$ , also nach 31-1-2  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 \subseteq \mathfrak{M}^1$ , w. z. b. w.

Da  $\mathfrak{M}^1 \subseteq (\mathfrak{M}_1)^1$ ,  $\mathfrak{M}_1 \subseteq (\mathfrak{M}^1)_1$ , folgt aus 31-1-3 insbesondere:

(1)  $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1 = (\mathfrak{M}_1)^1$ ;  $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_1 = (\mathfrak{M}^1)_1$ .

**31-1-4.** *Ist  $\mathfrak{N}$  das System der Komplemente der Mengen aus  $\mathfrak{M}$  zu  $E$ , so ist  $\mathfrak{N}_1$  das System der Komplemente der Mengen aus  $\mathfrak{M}^1$  zu  $E$ .*

Dies folgt leicht aus 3-4-2.

2. Die Funktionensysteme  $\mathfrak{S}^1$  und  $\mathfrak{S}_1$ . Sei  $\mathfrak{S}$  ein Funktionensystem auf  $E$ . Fügen wir zu  $\mathfrak{S}$  die Grenzfunktionen aller monoton wachsenden (bzw. abnehmenden) Funktionenfolgen aus  $\mathfrak{S}$  hinzu, so entstehe das System  $\mathfrak{S}^1$  (bzw.  $\mathfrak{S}_1$ ). Aus der Definition der autarken Systeme folgt ohne weiteres:

**31-2-1.** *Bei autarkem  $\mathfrak{S}$  sind  $\mathfrak{S}^1$  und  $\mathfrak{S}_1$  autark.*

**31-2-2.** *Aus  $f_n \in \mathfrak{S}$  folgt, wenn  $\mathfrak{S}$  autark:  $\sup_n f_n \in \mathfrak{S}^1$ ,  $\inf_n f_n \in \mathfrak{S}_1$ .*

Setzen wir:  $\bar{f}_n = \max(f_1, f_2, \dots, f_n)$ , so ist  $\bar{f}_n \in \mathfrak{S}$ , die Folge  $(\bar{f}_n)$  ist monoton wachsend und  $\lim_n \bar{f}_n = \sup_n f_n$ , also ist  $\sup_n f_n \in \mathfrak{S}^1$ .

**31-2-21.** *Bei autarkem  $\mathfrak{S}$  ist  $(\mathfrak{S}^1)^1 = \mathfrak{S}^1$ ,  $(\mathfrak{S}_1)_1 = \mathfrak{S}_1$ .*

Sei  $f \in (\mathfrak{S}^1)^1$ , d. h.  $f = \lim_n f_n$ , wo  $f_n \in \mathfrak{S}^1$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$ . Wegen  $f_n \in \mathfrak{S}^1$ , ist  $f_n = \lim_i f_{ni}$ , wo  $f_{ni} \in \mathfrak{S}$ ,  $f_{ni} \leq f_{ni+1}$ ; daraus folgt  $f = \sup_{n,i} f_{ni}$ ; also ist nach 31-2-2  $f \in \mathfrak{S}^1$ .

**31-2-3.** *Ist  $\mathfrak{S}$  autark und  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}^1$  (bzw.  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{S}_1$ ), so ist  $(\mathfrak{S} + \mathfrak{X})^1 = \mathfrak{S}^1$  (bzw.  $(\mathfrak{S} + \mathfrak{X})_1 = \mathfrak{S}_1$ ).*

Der Beweis ist analog dem von 31-1-3.

So wie (1) erkennt man nun, daß bei autarkem  $\mathfrak{C}$ :

$$(2) \quad (\mathfrak{C}^1 + \mathfrak{C}_1)^1 = (\mathfrak{C}_1)^1; \quad (\mathfrak{C}^1 + \mathfrak{C}_1)_1 = (\mathfrak{C}_1^1)_1.$$

**31.2.4.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark und  $((f_n))$  eine gleichmäßig konvergente Folge aus  $\mathfrak{C}$ , so ist  $\lim_n f_n \in \mathfrak{C}^1 \mathfrak{C}_1$ .

Sei  $f = \lim_n f_n$ ; dann ist nach § 30 (4):  $S(f) = \sup_n (S(f_n) - k_n)$ ; aus  $f_n \in \mathfrak{C}$  folgt  $S(f_n) - k_n \in \mathfrak{C}$ , also nach 31.2.2  $S(f) \in \mathfrak{C}^1$ , und weil nach 31.2.1  $\mathfrak{C}^1$  autark:  $f \in \mathfrak{C}_1$ . Ebenso zeigt man  $f \in \mathfrak{C}_1$ .

**31.2.41.** Bei autarkem  $\mathfrak{C}$  sind  $\mathfrak{C}^1$  und  $\mathfrak{C}_1$  geschlossen.

Sei  $((f_n))$  eine gleichmäßig konvergente Folge aus  $\mathfrak{C}^1$  und  $f = \lim_n f_n$ ; nach 31.2.4 ist  $f \in (\mathfrak{C}^1)^1$ , also nach 31.2.21:  $f \in \mathfrak{C}_1$ .

**31.2.5.** Ist  $\mathfrak{X}$  ein autarkes Funktionensystem auf  $E$ , so ist:

$$\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^1) = \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1; \quad \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}_1) = \underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1.$$

Sei  $f \in \mathfrak{X}^1$ , d. h.  $f = \lim_n f_n$ , wo  $f_n \in \mathfrak{X}$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$ ; dann ist auch  $f = \sup_n f_n$ , also nach § 30 (1.3):  $[f(x) > y] \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1$ ; damit ist gezeigt:  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^1) \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1$ . Nun ist noch zu zeigen:  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1 \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^1)$ . Sei also  $A \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1$ , d. h.  $A = S A_n$  mit  $A_n \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})$ ; nach 30.3.2 gibt es also ein  $f_n \in \mathfrak{X}$ , so daß  $A_n = [f_n(x) > 0]$ ; setzen wir  $f = \sup_n f_n$ , so ist  $A = [f(x) > 0]$ ; nach 31.2.2 ist aber  $f \in \mathfrak{X}^1$ , also ist  $A \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^1)$ ; aus  $A \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1$  folgt also  $A \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^1)$ , d. h. es ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X})^1 \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^1)$ , w. z. b. w.

Nun verschärfen wir noch 31.2.5 weiter zu:

**31.2.51.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark und  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}$  (bzw.  $\underline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{N}$ ), so ist  $\mathfrak{X}^1 = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{C}(*, \mathfrak{N})$ ).

Wegen 31.2.5 ist nur mehr zu zeigen: ist  $[f(x) > y] \in \mathfrak{M}^1$  für alle  $y \in \overline{R}_1$ , so ist  $f \in \mathfrak{X}^1$ . — Sei zunächst  $f$  eine Funktion, die nur die Werte 0, 1 annimmt; setzen wir  $A = [f(x) = 1] = [f(x) > 0]$ , so ist nach Annahme  $A \in \mathfrak{M}^1$ ; nach 31.2.5, 31.2.1, 30.3.2 gibt es also ein  $g \in \mathfrak{X}^1$ , so daß  $A = [g(x) > 0]$ ; setzen wir  $g'(x) = \max(g(x), 0)$ ,  $g_n(x) = \min(n g'(x), 1)$ , so ist  $g_n \leq g_{n+1}$  und  $f = \lim_n g_n$ ; da aber  $\mathfrak{X}^1$  nach 31.2.1 autark, ist  $g_n \in \mathfrak{X}^1$ , also  $f \in (\mathfrak{X}^1)^1$ , also nach 31.2.21:  $f \in \mathfrak{X}^1$ . — Sei sodann  $f$  eine Funktion, die nur zwei verschiedene, endliche Werte  $a > b$  annimmt; setzen wir  $[f(x) = a] = A$ , und bezeichnen mit  $f^*$  die Funktion, die  $= 1$  ist auf  $A$  und  $= 0$  auf  $E - A$ , so ist, wie eben gezeigt:  $f^* \in \mathfrak{X}^1$ ; und da  $f = b + (a - b)f^*$ , so ist, weil  $\mathfrak{X}^1$  autark, auch  $f \in \mathfrak{X}^1$ . — Sei sodann  $f$  eine Funktion, die nur endlich viele verschiedene, durchweg endliche Werte  $a_0 < a_1 < \dots < a_m$  annimmt;

setzen wir  $[f(x) = a_i] = A_i$ , so ist für  $a_{i-1} \leq y < a_i$ :  $[f(x) > y] = A_i + \dots + A_m$ , also ist nach Annahme  $A_i + \dots + A_m \in \mathfrak{M}^1$ ; bezeichnen wir mit  $f_i$  die Funktion, die  $= a_i$  ist auf  $A_i + \dots + A_m$  und  $= a_0$  auf  $E - (A_i + \dots + A_m)$ , so ist, wie eben gezeigt,  $f_i \in \mathfrak{I}^1$ , und da  $f = \max(f_1, f_2, \dots, f_m)$ , so ist, weil  $\mathfrak{I}^1$  autark, auch  $f \in \mathfrak{I}^1$ . — Unterliegt schließlich  $f$  keiner weiteren Einschränkung, so setzen wir  $y_{ni} = \frac{i-n^2}{n}$  ( $i = 0, 1, \dots, 2n^2$ ) und bezeichnen mit  $f_n$  die Funktion, die  $= y_{n0}$  ( $= -n$ ) ist auf  $[f(x) \leq y_{n0}]$ ,  $= y_{ni}$  auf  $[y_{n(i-1)} < f(x) \leq y_{ni}]$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n^2$ ), und  $= y_{n(2n^2)} (= n)$  auf  $[f(x) > y_{n(2n^2)}]$ ; da für jedes  $y$  die Menge  $[f_n(x) > y]$  entweder mit einer Menge  $[f(x) > z]$  übereinstimmt, oder  $= \Lambda$ , oder  $= E$  ist, und da nach Annahme  $[f(x) > z] \in \mathfrak{M}^1$ , und nach 30.3.3  $\Lambda \in \mathfrak{M}$ ,  $E \in \mathfrak{M}$ , also auch  $\Lambda \in \mathfrak{M}^1$ ,  $E \in \mathfrak{M}^1$  ist, gilt  $[f_n(x) > y] \in \mathfrak{M}^1$  für alle  $y$ ; und da  $f_n$  nur endlich viele verschiedene, durchweg endliche Werte annimmt, ist, wie eben bewiesen,  $f_n \in \mathfrak{I}^1$ ; da  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, ist also nach 31.2.41 auch  $f \in \mathfrak{I}^1$ .

**31.2.511.** Ist  $\mathfrak{I}$  völlig autark und  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{N}$ , so ist  $\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)$ ,  $\mathfrak{I}_1 = \mathfrak{G}(*, \mathfrak{N})$ .

Nach 31.2.51 ist  $\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}^1, *)$ ; nach 30.4.1 ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System, also nach 31.1.1:  $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}$ .

**31.2.512.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark und  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^1$  (bzw.  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_1$ ) und  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}$  (bzw.  $\mathfrak{G}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{N}$ ), so ist  $\mathfrak{I} = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{I} = \mathfrak{G}(*, \mathfrak{N})$ ).

Nach 31.2.5 ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{I}^1) = \mathfrak{M}^1$ , also  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}^1$ , d. h.  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1$ , und nach 31.2.51 ist  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}^1, *) = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)$ .

**31.2.52.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein die Mengen  $\Lambda$  und  $E$  enthaltender Ring, so ist:  $\mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}^1, *)$ ,  $\mathfrak{G}(*, \mathfrak{M})_1 = \mathfrak{G}(*, \mathfrak{M}^1)$ .

Nach 30.3.4 ist  $\mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)$  autark; die Behauptung folgt also aus 31.2.51.

**31.2.521.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein die Mengen  $\Lambda$  und  $E$  enthaltender Ring, so ist, damit  $\mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{G}(*, \mathfrak{M})_1 = \mathfrak{G}(*, \mathfrak{M})$ ) sei, notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System sei.

Dies folgt aus 31.2.52 und 31.1.1.

**31.2.6.** Bei autarkem  $\mathfrak{G}$  sind  $\mathfrak{G}^1$  und  $\mathfrak{G}_1$  völlig autark.

Dies folgt aus 31.2.51 nach 31.2.1, 31.2.41, 30.4.21.

**31.2.7.** Ist  $\mathfrak{G}$  symmetrisch, so ist  $f \in \mathfrak{G}^1$  gleichbedeutend mit  $-f \in \mathfrak{G}_1$ .

Die Aussage  $f \in \mathfrak{G}^1$  bedeutet:  $f = \lim_n f_n$  mit  $f_n \leq f_{n+1}$  und  $f_n \in \mathfrak{G}$ ; das kann auch so geschrieben werden:  $-f = \lim_n (-f_n)$ ,  $-f_n \geq -f_{n+1}$ ,  $-f_n \in \mathfrak{G}$ ; das aber besagt:  $-f \in \mathfrak{G}_1$ .

**3. Das Funktionensystem  $\mathfrak{C}_1^1$ .** Wir setzen nun  $\mathfrak{C}_1^1 = \mathfrak{C}^1 \cdot \mathfrak{C}_1$ . Dann kann 31.2.4 so ausgesprochen werden:

**31.3.1.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark und  $((f_n))$  eine gleichmäßig konvergente Folge aus  $\mathfrak{C}$ , so ist  $\lim_n f_n \in \mathfrak{C}_1^1$ .

**31.3.2.** Bei autarkem  $\mathfrak{C}$  ist  $\mathfrak{C}_1^1$  völlig autark.

Dies folgt aus 31.2.6.

Wir werden nun zeigen, daß  $\mathfrak{C}_1^1$  bei autarkem  $\mathfrak{C}$  das kleinste völlig autarke System über  $\mathfrak{C}$  ist; zu dem Zwecke beweisen wir zunächst zwei Hilfsätze, wobei wir vorübergehend das kleinste völlig autarke System über  $\mathfrak{C}$  mit  $\tilde{\mathfrak{C}}$  bezeichnen.

**31.3.21.** Ist  $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1$  (bzw.  $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1$ ), so gibt es ein  $f \in \tilde{\mathfrak{C}}$ , so daß  $f(x) < +\infty$  für alle  $x \in E$  und  $[f(x) > -\infty] = A$  (bzw.  $f(x) > -\infty$  für alle  $x \in E$  und  $[f(x) < +\infty] = A$ ).

Sei  $A \in \mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1$ ; wegen  $\mathfrak{C} \subseteq \tilde{\mathfrak{C}}$  ist  $\mathfrak{U}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{C}})$ , also auch  $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1 \subseteq \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{C}})^1$ , und da nach 30.4.1, 31.1.1  $\mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{C}})^1 = \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{C}})$  ist, gilt auch  $\mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1 \subseteq \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{C}})$ ; also ist  $A \in \mathfrak{U}(\tilde{\mathfrak{C}})$ . Nach 30.3.2 gibt es also ein  $f \in \tilde{\mathfrak{C}}$ , so daß  $[f(x) > -\infty] = A$ , und nach 30.3.1 kann  $f < +\infty$  angenommen werden.

**31.3.211.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark und  $f \in \mathfrak{C}_1^1$ , so gibt es zu je zwei Zahlen  $a < b$  ein  $\tilde{f} \in \tilde{\mathfrak{C}}$ , so daß  $\tilde{f} = 0$  auf  $[f(x) \leq a]$ ,  $\tilde{f} = 1$  auf  $[f(x) \geq b]$  und  $0 < \tilde{f} < 1$  auf  $[a < f(x) < b]$ .

Nach 31.2.5 ist  $[f(x) > a] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1$ ,  $[f(x) < b] \in \mathfrak{U}(\mathfrak{C})^1$ ; also gibt es nach 31.3.21 ein  $f_1 \in \tilde{\mathfrak{C}}$  und ein  $f_2 \in \tilde{\mathfrak{C}}$ , so daß  $f_1(x) < +\infty$ ,  $f_2(x) > -\infty$  für alle  $x \in E$ , und  $[f_1(x) > -\infty] = [f(x) > a]$ ,  $[f_2(x) < +\infty] = [f(x) < b]$ . Also ist  $[f_1(x) = -\infty] = [f(x) \leq a]$ ,  $[f_2(x) = +\infty] = [f(x) \geq b]$ , also  $f_1 + f_2 = -\infty$  auf  $[f(x) \leq a]$ ,  $f_1 + f_2 = +\infty$  auf  $[f(x) \geq b]$ ,  $-\infty < f_1 + f_2 < +\infty$  auf  $[a < f(x) < b]$ . Die Funktion  $\tilde{f} = \frac{1}{2}(S(f_1 + f_2) + 1)$  leistet das Verlangte.

**31.3.22.** Bei autarkem  $\mathfrak{C}$  ist  $\mathfrak{C}_1^1$  das kleinste völlig autarke System über  $\mathfrak{C}$ .

Sei wieder  $\tilde{\mathfrak{C}}$  das kleinste völlig autarke System über  $\mathfrak{C}$ . Nach 31.3.2 ist  $\tilde{\mathfrak{C}} \subseteq \mathfrak{C}_1^1$ ; bleibt zu zeigen:  $\mathfrak{C}_1^1 \subseteq \tilde{\mathfrak{C}}$ . Sei  $f \in \mathfrak{C}_1^1$ ; wir haben zu zeigen:  $f \in \tilde{\mathfrak{C}}$ . Wegen Eigenschaft 3a) der autarken Systeme (§ 30, 3) genügt es zu zeigen, daß  $S(f) \in \tilde{\mathfrak{C}}$ ; wir können also von vornherein  $f$  als beschränkt annehmen, und wegen Eigenschaft 2a) der autarken Systeme können wir weiter annehmen  $0 \leq f \leq 1$ . Nach 31.3.211 gibt es nun für jedes  $n$  und für



$i = 1, 2, \dots, n$  eine Funktion  $f_{n1} \in \tilde{\mathcal{C}}$ , so daß  $f_{ni} = 0$  auf  $\left[f(x) \leq \frac{i-1}{n}\right]$ ,  $f_{ni} = 1$  auf  $\left[f(x) \geq \frac{i}{n}\right]$ ,  $0 < f_{ni} < 1$  auf  $\left[\frac{i-1}{n} < f(x) < \frac{i}{n}\right]$ . Setzen wir  $f_n = \frac{1}{n}(f_{n1} + f_{n2} + \dots + f_{nn})$ , so ist auch  $f_n \in \tilde{\mathcal{C}}$ , und weil  $((f_n))$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, ist auch  $f \in \tilde{\mathcal{C}}$ , w. z. b. w.

**31.3.23.** Damit das autarke System  $\mathcal{C}$  völlig autark sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $\mathcal{C}_1^1 = \mathcal{C}$ .

Dies ist enthalten in 31.3.22.

**31.3.3.** Bei autarkem  $\mathcal{C}$  ist  $(\mathcal{C}_1^1)^1 = \mathcal{C}_1^1$ ,  $(\mathcal{C}_1^1)_1 = \mathcal{C}_1^1$ .

Wegen  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_1^1$  ist  $\mathcal{C}_1^1 \subseteq (\mathcal{C}_1^1)^1$ ; wegen  $\mathcal{C}_1^1 \subseteq \mathcal{C}_1^1$  ist  $(\mathcal{C}_1^1)^1 \subseteq (\mathcal{C}_1^1)^1$ , also nach 31.2.21 auch  $(\mathcal{C}_1^1)^1 \subseteq \mathcal{C}_1^1$ .

**31.3.31.** Bei autarkem  $\mathcal{C}$  ist  $(\mathcal{C}_1^1)_1^1 = \mathcal{C}_1^1$ .

Dies folgt aus 31.3.2 und 31.3.23, oder aus 31.3.3.

**31.3.4.** Für jedes autarke Funktionensystem  $\mathcal{X}$  auf  $E$  ist  $\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X}_1^1) = \bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X})^1$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{X}_1^1) = \mathcal{G}(\mathcal{X})^1$ .

Wir beweisen etwa die erste dieser beiden Gleichungen. Nach 31.2.5 ist  $\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X}_1^1) \subseteq \bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X})^1$ . Ist umgekehrt  $A \in \bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X})^1$ , so gibt es nach 31.3.21 und 31.3.22 ein  $f \in \mathcal{X}_1^1 (= \tilde{\mathcal{X}})$ , so daß  $[f(x) > -\infty] = A$ ; also ist  $A \in \bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X}_1^1)$ , und mithin ist auch  $\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X})^1 \subseteq \bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X}_1^1)$ .

Nun verschärfen wir noch 31.3.4 weiter zu:

**31.3.41.** Ist  $\mathcal{X}$  autark und  $\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \mathcal{N}$ , so ist  $\mathcal{X}_1^1 = \mathcal{C}(\mathcal{M}^1, \mathcal{N}^1)$ .

Nach 31.3.4 ist nur mehr zu zeigen: ist  $[f(x) > y] \in \mathcal{M}^1$ ,  $[f(x) < y] \in \mathcal{N}^1$  für alle  $y \in \bar{R}_1$ , so ist  $f \in \mathcal{X}_1^1$ ; das aber folgt aus 31.2.51.

**31.3.411.** Ist  $\mathcal{X}$  völlig autark und  $\bar{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{X}) = \mathcal{N}$ , so ist  $\mathcal{X} = \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ .

Dies folgt, da nach 31.3.23  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_1^1$  ist, aus 31.3.41 und 30.4.1.

**31.3.42.** Existiert das System  $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ , und sind  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  die Mengen  $A$  und  $E$  enthaltende Ringe, so ist  $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_1^1 = \mathcal{C}(\mathcal{M}^1, \mathcal{N}^1)$ .

Nach 30.3.41 ist  $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  autark, die Behauptung folgt also aus 31.3.11.

**31.3.421.** Existiert  $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  und sind  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$  die Mengen  $A$  und  $E$  enthaltende Ringe, so ist, damit  $\mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})_1^1 = \mathcal{C}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $\mathcal{M}$  und  $\mathcal{N}$   $\sigma$ -Systeme seien.

Dies folgt aus 31.3.42 und 31.1.1.

**31.3.5.** Ist  $\mathcal{X}$  symmetrisch und völlig autark, ist  $f_1 \in \mathcal{X}$ ,  $f_2 \in \mathcal{X}$ , und ist  $f_1 f_2$  (bzw.  $f_1 : f_2$ ) definiert auf  $E$ , so ist auch  $f_1 f_2 \in \mathcal{X}$  (bzw.  $f_1 : f_2 \in \mathcal{X}$ ).

Setzen wir  $\bar{\mathcal{G}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}$ , so ist, weil  $\mathfrak{I}$  symmetrisch, auch  $\mathcal{G}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}$ , und nach 31.3.411 ist  $\mathfrak{I} = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}, \mathfrak{M})$ ; nach 30.4.31 ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -Ring und  $A \in \mathfrak{M}$ ,  $E \in \mathfrak{M}$ ; die Behauptung folgt also aus 30.5.5.

**31.3.6.** Ist  $\mathfrak{I}$  symmetrisch und autark, ist  $\varphi(z)$  eine stetige Funktion im Intervall  $[a, b]$  des  $\bar{R}_1$  und  $f$  eine der Ungleichung  $a \leq f \leq b$  genügende Funktion aus  $\mathfrak{I}$ , so ist  $\varphi(f) \in \mathfrak{I}_1^1$ .

Indem wir  $\varphi(z) = \varphi(a)$  für  $z \leq a$ ,  $\varphi(z) = \varphi(b)$  für  $z \geq b$  setzen, können wir annehmen,  $\varphi$  sei stetig im  $\bar{R}_1$ . Nach 25.8.1 ist die Menge  $[\varphi(\hat{z}) > y]$  eine offene Menge des  $\bar{R}_1$ , also, wie aus 16.5.4 folgt, Summe abzählbar vieler Intervalle  $(a_n, b_n)$  und höchstens zweier offener Halbgeraden  $z > a'$  und  $z < b'$  des  $\bar{R}_1$ ; demnach ist  $[\varphi(f(\hat{x})) > y]$  Summe abzählbar vieler Mengen  $[a_n < f(\hat{x}) < b_n]$  und höchstens zweier Mengen  $[f(\hat{x}) > a']$ ,  $[f(\hat{x}) < b']$ . Setzen wir  $\bar{\mathcal{G}}(\mathfrak{I}) = \mathcal{G}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}$ , so ist  $[f(\hat{x}) > a'] \in \mathfrak{M}$ ,  $[f(\hat{x}) < b'] \in \mathfrak{M}$ ; und wegen  $[a_n < f(\hat{x}) < b_n] = [f(\hat{x}) > a_n] \cdot [f(\hat{x}) < b_n]$  ist, da  $\mathfrak{M}$  nach 30.3.3 ein Ring, auch  $[a_n < f(\hat{x}) < b_n] \in \mathfrak{M}$ . Mithin ist  $[\varphi(f(\hat{x})) > y] \in \mathfrak{M}^1$ ; ebenso ist  $[\varphi(f(\hat{x})) < y] \in \mathfrak{M}^1$ ; also ist, da nach 31.3.41  $\mathfrak{I}_1^1 = \mathfrak{S}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^1)$  ist:  $\varphi(f) \in \mathfrak{I}_1^1$ .

**31.3.7.** Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch, so ist auch  $\mathfrak{S}_1^1$  symmetrisch.

Dies folgt aus 31.2.7.

**4. Das Funktionensystem  $\mathfrak{S}^*$ .** Sei wieder  $\mathfrak{S}$  ein Funktionensystem auf  $E$ ; wir fügen zu  $\mathfrak{S}$  die Grenzfunktionen aller konvergenten Funktionenfolgen aus  $\mathfrak{S}$  hinzu; das so entstehende Funktionensystem bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}^*$ . Es ist  $\mathfrak{S}^1 + \mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}^*$ .

**31.4.1.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark, so ist  $\mathfrak{S}^*$  autark und geschlossen.

Da  $\mathfrak{S}^*$  offenbar autark, bleibt nur zu zeigen, daß  $\mathfrak{S}^*$  geschlossen ist. Sei  $((f_n))$  eine gleichmäßig konvergente Folge aus  $\mathfrak{S}^*$  und  $f = \lim_n f_n$ ; wir haben zu zeigen:  $f \in \mathfrak{S}^*$ . Indem wir zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen:  $\|f_n - f\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ ; dann ist

$$(4) \quad \|f_{n+1} - f_n\| \leq \|f_{n+1} - f\| + \|f - f_n\| < \frac{1}{2^n}.$$

Da  $f_n \in \mathfrak{S}^*$ , gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine Folge  $f_{n_1}, f_{n_2}, \dots, f_{n_r}, \dots$  mit  $\lim_r f_{n_r} = f_n$ .

Wir bestimmen  $f'_{2r}$  und  $f''_{2r}$  aus  $S(f'_{2r}) = \min \left( S(f_{2r}), S(f_{1r}) + \frac{1}{2} \right)$ ,  $S(f''_{2r}) = \max \left( S(f'_{2r}), S(f_{1r}) - \frac{1}{2} \right)$ ; dann ist  $\|f''_{2r} - f_{1r}\| \leq \frac{1}{2}$ ; und da nach (4):

$\|f_2 - f_1\| < \frac{1}{2}$ , ist für jedes einzelne  $x$ :  $\|f_{2\nu}(x) - f_{1\nu}(x)\| < \frac{1}{2}$  für fast alle  $\nu$ ; somit  $f_{2\nu}'(x) = f_{2\nu}(x)$  für fast alle  $\nu$ , also auch  $\lim f_{2\nu}' = f_2$ ; da  $f_{2\nu}' \in \mathfrak{S}$ , können wir die Folge  $((f_{2\nu}))$  ersetzen durch  $((f_{2\nu}'))$ ; wir können also von vornherein annehmen:  $\|f_{2\nu} - f_{1\nu}\| \leq \frac{1}{2}$ . Ganz ebenso können wir annehmen:  $\|f_{3\nu} - f_{2\nu}\| \leq \frac{1}{2^2}$ , und allgemein:  $\|f_{n+1\nu} - f_{n\nu}\| \leq \frac{1}{2^n}$ . Dann ist:

$$(4.1) \quad \|f_{n+k\nu} - f_{n\nu}\| \leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+k-1}} < \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Nun zeigen wir, daß  $f = \lim f_{\nu}$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben; wir wählen  $n$  gemäß  $\frac{1}{2^{n-1}} < \frac{\varepsilon}{3}$ . Wegen (4.1) und weil  $\|f_n - f\| < \frac{1}{2^{n-1}}$  war, gilt für  $\nu > n$ :

$$\begin{aligned} \|f_{\nu} - f\| &\leq \|f_{\nu} - f_{n\nu}\| + \|f_{n\nu} - f_n\| + \|f_n - f\| \\ &< \frac{1}{2^{n-1}} + \|f_{n\nu} - f_n\| + \frac{1}{2^{n-1}} < \|f_{n\nu} - f_n\| + \frac{2\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Da  $\lim f_{n\nu} = f_n$ , gibt es zu jedem  $x$  ein  $\nu_x > n$ , so daß  $\|f_{n\nu}(x) - f_n(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$  für  $\nu \geq \nu_x$ ; also ist  $\|f_{\nu}(x) - f(x)\| < \varepsilon$  für  $\nu \geq \nu_x$ , d. h. es ist  $\lim f_{\nu} = f$ , wie behauptet. Da  $f_{\nu} \in \mathfrak{S}$  war, ist also  $f \in \mathfrak{S}^*$ , w. z. b. w.

**31.4.11.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark und additiv, so ist  $\mathfrak{S}^*$  völlig autark.

Ist  $\mathfrak{S}$  autark und additiv, so ist offenbar auch  $\mathfrak{S}^*$  additiv; die Behauptung folgt also aus 31.4.1.

Wir führen nun folgende abkürzende Bezeichnungsweise ein (auf die wir in §§ 33, 34 zurückkommen): ist  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$ ,  $\mathfrak{S}$  ein System von Funktionen auf  $E$ , so setzen wir:

$$(\mathfrak{M}^1)_1 = \mathfrak{M}_2, (\mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2; (\mathfrak{S}^1)_1 = \mathfrak{S}_2, (\mathfrak{S}_1)^1 = \mathfrak{S}^2.$$

**31.4.2.** Bei autarkem  $\mathfrak{S}$  ist  $\mathfrak{S}^* \subseteq \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$ .

Sei  $f \in \mathfrak{S}^*$ , d. h.  $f = \lim f_n$ ,  $f_n \in \mathfrak{S}$ . Wir setzen  $g_n = \inf f_n$ ; nach 31.2.2 ist  $g_n \in \mathfrak{S}_1$ ; nun ist  $f = \lim_{\nu \geq n} g_n$ ,  $g_n \leq g_{n+1}$ , also  $f \in (\mathfrak{S}_1)^1$ , d. h.  $f \in \mathfrak{S}^2$ . Ebenso zeigt man:  $f \in \mathfrak{S}_2$ .

**31.4.21.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark, so ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X})^2$ ,  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}_2) = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X})^2$ .

Nach 31.2.51 ist, wenn  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{N}$  gesetzt wird:  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{N}^1)$ , und da nach 30.3.3  $\mathfrak{N}$  ein Ring, also nach 3.5.1 auch  $\mathfrak{N}^1$  ein Ring, ist nach 30.2.3:

$$(4.2) \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}_1) = (\mathfrak{N}^1)_1 = \mathfrak{N}_2.$$

Setzen wir  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$ , so besteht  $\mathfrak{P}$  aus den Komplementen der Mengen von  $\mathfrak{N}$ , und aus (4.2) folgt durch Übergang zu den Komplementen:

$$(4.21) \quad \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}_1) = (\mathfrak{P}_1)^1 = \mathfrak{P}^2.$$

Nach 31.2.1 ist  $\mathfrak{X}_1$  autark, wegen  $\mathfrak{X}^2 = (\mathfrak{X}_1)^1$  ist also nach 31.2.5  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^2) = (\mathfrak{P}^2)^1$ , und somit nach 31.1.2:  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^2) = \mathfrak{P}^2$ .

**31.4.22.** Ist  $\mathfrak{X}$  völlig autark, so ist  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^2) = \overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X})^1$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}_2) = \overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X})^1$ .

Nach 30.4.1 ist  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$  ein  $\delta$ -Ring, also  $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ , also  $\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1 = \mathfrak{P}^1$ ; die Behauptung folgt also aus 31.4.21.

**31.4.3.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark und additiv, und ist  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \Omega$ , so ist  $\mathfrak{X}^* = \mathcal{C}(\mathfrak{P}^2, \Omega^2)$ .

Wegen 31.4.11, 31.3.411 genügt es zu zeigen:  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) = \mathfrak{P}^2$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) = \Omega^2$ . Wir beweisen etwa die erste dieser Gleichungen. Nach 31.4.2 ist  $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{X}^2$ , also  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) \subseteq \overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^2)$ , also nach 31.4.21  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) \subseteq \mathfrak{P}^2$ . Wegen  $\mathfrak{X}^* \supseteq \mathfrak{X}_1$  ist umgekehrt  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) \supseteq \overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}_1)$ , d. h. nach (4.21):  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) \supseteq \mathfrak{P}^2$ . Also ist  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}^*) = \mathfrak{P}^2$ , w. z. b. w.

**31.4.31.** Ist  $\mathfrak{X}$  völlig autark und  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \Omega$ , so ist  $\mathfrak{X}^* = \mathcal{C}(\mathfrak{P}^1, \Omega^1)$ .

Nach 30.4.1 ist  $\mathfrak{P}$  ein  $\delta$ -Ring, also  $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1 = \mathfrak{P}^1$ ; ebenso ist  $\Omega^2 = \Omega^1$ ; die Behauptung folgt also aus 31.4.3.

**31.4.4.** Bei autarkem, additivem  $\mathfrak{X}$  ist  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}^2$ .

Nach 31.4.2 ist nur mehr zu zeigen  $\mathfrak{X}_2 \mathfrak{X}^2 \subseteq \mathfrak{X}^*$ . Dies folgt unmittelbar aus 31.4.21, 31.4.3.

**31.4.41.** Bei autarkem, additivem  $\mathfrak{X}$  ist  $\mathfrak{X}^* = (\mathfrak{X}^1 + \mathfrak{X}_1)^1$ .

Nach (2) ist  $(\mathfrak{X}^1 + \mathfrak{X}_1)^1 = \mathfrak{X}^2$ ,  $(\mathfrak{X}^1 + \mathfrak{X}_1)_1 = \mathfrak{X}_2$ , also  $(\mathfrak{X}^1 + \mathfrak{X}_1)_1^1 = \mathfrak{X}^2 \mathfrak{X}_2$ , und die Behauptung folgt aus 31.4.4.

**31.4.5.** Bei autarkem, additivem  $\mathfrak{X}$  ist  $(\mathfrak{X}_1^1)^* = \mathfrak{X}^*$ .

Setzen wir  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{N}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \Omega$ , so ist nach 31.3.4  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}_1^1) = \mathfrak{M}^1$ , also nach 31.1.4:  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}_1^1) = \Omega_1$ , ebenso  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}_1^1) = \mathfrak{P}_1$ . Nach 31.3.2 ist  $\mathfrak{X}_1^1$  völlig autark, also ist nach 31.4.31  $(\mathfrak{X}_1^1)^* = \mathcal{C}(\mathfrak{P}^2, \Omega^2)$ , somit nach 31.4.3  $(\mathfrak{X}_1^1)^* = \mathfrak{X}^*$ .

**31.4.6.** Damit  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$  sei, ist notwendig und bei autarkem  $\mathfrak{X}$  hinreichend, daß  $\mathfrak{X} = \mathfrak{X}^1 = \mathfrak{X}_1$  sei.

Notwendig: Dies folgt aus  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^1 \subseteq \mathfrak{X}^*$ ,  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}_1 \subseteq \mathfrak{X}^*$ . Hinreichend: Ist  $\mathfrak{X}^1 = \mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}_1 = \mathfrak{X}$ , so auch  $\mathfrak{X}_2 = \mathfrak{X}$ ,  $\mathfrak{X}^2 = \mathfrak{X}$ ; also ist nach 31.4.2  $\mathfrak{X}^* \subseteq \mathfrak{X}$ , und da gewiß  $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}^*$ , ist  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$ .

**31.4.61.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark und additiv und  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{X}$ , so ist  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X})^1$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X})^1$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X})_1$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathfrak{X}) = \overline{\mathcal{G}}(\mathfrak{X})_1$ .

Nach 31.4.11 ist  $\mathfrak{I}^*$ , also auch  $\mathfrak{I}$  völlig autark, also ist nach 31.4.31  $\mathfrak{I} = \mathfrak{I}^* = \mathfrak{C}(\mathfrak{P}^1, \mathfrak{Q}^1)$ , also  $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{P}^1 = \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I})^1$ , und durch Übergang zu den Komplementen folgt:  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I}) = \overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{I})_1$ .

**31.4.62.** Ist  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  autark und additiv, so ist, damit  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^* = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  sei, notwendig und hinreichend, daß sowohl  $\mathfrak{M}$  als  $\mathfrak{N}$  ein die Mengen  $A$  und  $E$  enthaltender  $\sigma$ - und  $\delta$ -Ring sei.

Notwendig: Nach 31.4.11 ist  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  völlig autark, also ist nach 30.4.31  $\mathfrak{M}$  ein die Mengen  $A$  und  $E$  enthaltender  $\sigma$ -Ring. Bleibt zu beweisen, daß  $\mathfrak{M}$  ein  $\delta$ -System ist. Setzen wir  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{I}$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{P}$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{Q}$ , so ist nach 31.4.61  $\mathfrak{M} = \mathfrak{P}^1$ ,  $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1$ , also  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^2$ ; wegen  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}^2$  ist also  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$ , also  $\mathfrak{M}$  ein  $\delta$ -System, w. z. b. w. Hinreichend: Ist  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{N}$  ein die Mengen  $E$  und  $A$  enthaltender  $\sigma$ - und  $\delta$ -Ring, so durch Übergang zu den Komplementen auch  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{Q}$ . Wegen  $\mathfrak{P}^1 = \mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}$  folgt aus 30.2.1  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}$ , also  $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$ , und weil  $\mathfrak{M}$ , also auch  $\mathfrak{P}$  ein  $\delta$ - und  $\sigma$ -System:  $\mathfrak{M} = \mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}^2$ , und ebenso  $\mathfrak{N} = \mathfrak{Q}^2$ ; also ist  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{P}^2, \mathfrak{Q}^2)$  und nach 31.4.3  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N}) = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})^*$ .

**31.4.7.** Ist  $\mathfrak{I}$  symmetrisch, so ist auch  $\mathfrak{I}^*$  symmetrisch.

Denn ist  $f = \lim_n f_n$ ,  $f_n \in \mathfrak{I}$ , so  $-f = \lim_n (-f_n)$ ,  $-f_n \in \mathfrak{I}$ .

**5. Das Mengensystem  $\mathfrak{M}_1^1$ .** In Analogie zur Definition des Funktionensystemes  $\mathfrak{C}_1^1$  setzen wir, wenn  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$  bedeutet:  $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{M}^1$ .  $\mathfrak{M}_1^1$ . Aus 3.5.1 folgt:

**31.5.1.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist auch  $\mathfrak{M}_1^1$  ein Ring.

**31.5.11.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so ist auch  $\mathfrak{M}_1^1$  ein Körper.

Da  $\mathfrak{M}_1^1$  nach 31.5.1 ein Ring, ist nur zu zeigen: aus  $A \in \mathfrak{M}_1^1$ ,  $B \in \mathfrak{M}_1^1$  folgt  $A - B \in \mathfrak{M}_1^1$ . Ist  $A \in \mathfrak{M}_1^1$ , so ist  $A \in \mathfrak{M}^1$  und  $A \in \mathfrak{M}_1$ , also  $A = S A'_m = D A''_m$  mit  $A'_m \in \mathfrak{M}$ ,  $A''_m \in \mathfrak{M}$ ; ebenso  $B = D B'_n = S B''_n$  mit  $B'_n \in \mathfrak{M}$ ,  $B''_n \in \mathfrak{M}$ ; mithin ist  $A - B = S A'_m - D B'_n = S (A'_m - B'_n)$ , und auch  $A - B = D A''_m - S B''_n = D (A''_m - B''_n)$ ; da  $\mathfrak{M}$  ein Körper, ist  $A'_m - B'_n \in \mathfrak{M}$ ,  $A''_m - B''_n \in \mathfrak{M}$ , also  $A - B \in \mathfrak{M}^1$  und  $A - B \in \mathfrak{M}_1$ , d. h.  $A - B \in \mathfrak{M}_1^1$ , w. z. b. w.

Wir bezeichnen nun ein Mengensystem  $\mathfrak{M}$ , für das  $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{M}$  ist, als ein  $\mu$ -System.

**31.5.2.** Der Durchschnitt zweier  $\mu$ -Systeme  $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$  ist ein  $\mu$ -System.

Es ist  $(\mathfrak{M} \mathfrak{N})_1^1 \subseteq \mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{M}$ , ebenso  $(\mathfrak{M} \mathfrak{N})_1^1 \subseteq \mathfrak{N}$ , also  $(\mathfrak{M} \mathfrak{N})_1^1 \subseteq \mathfrak{M} \mathfrak{N}$ ; und da auch  $\mathfrak{M} \mathfrak{N} \subseteq (\mathfrak{M} \mathfrak{N})_1^1$ , ist  $\mathfrak{M} \mathfrak{N} = (\mathfrak{M} \mathfrak{N})_1^1$ .

**31.5.3.** Bei beliebigem  $\mathfrak{M}$  sind  $\mathfrak{M}^1$  und  $\mathfrak{M}_1 \mu$ -Systeme.

Nach 31.1.2 ist  $(\mathfrak{M}^1)^1 = \mathfrak{M}^1$ ; wegen  $(\mathfrak{M}^1)_1 \supseteq \mathfrak{M}^1$  ist also  $(\mathfrak{M}^1)_1^1 = (\mathfrak{M}^1)^1 (\mathfrak{M}^1)_1 = \mathfrak{M}^1$ .

**31.5.4.**  $\mathfrak{M}_1^1$  ist das kleinste  $\mu$ -System über  $\mathfrak{M}$ .

Nach 31.5.2 und 31.5.3 ist  $\mathfrak{M}_1^1$  ein  $\mu$ -System. Sei  $\mathfrak{N}$  ein  $\mu$ -System über  $\mathfrak{M}$ , d. h.  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1^1$ ; aus  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$  folgt  $\mathfrak{M}_1^1 \subseteq \mathfrak{N}_1^1$ , also  $\mathfrak{M}_1^1 \subseteq \mathfrak{N}$ .

**31.5.5.** Bei beliebigem  $\mathfrak{M}$  ist  $(\mathfrak{M}_1^1)^1 = \mathfrak{M}^1$ ,  $(\mathfrak{M}_1^1)_1 = \mathfrak{M}_1$ .

Der Beweis ist derselbe wie für 31.3.3.

**31.5.51.** Bei beliebigem  $\mathfrak{M}$  ist  $(\mathfrak{M}_1^1)_1^1 = \mathfrak{M}_1^1$ .

Dies folgt aus 31.5.4 oder aus 31.5.5.

**6. Das Mengensystem  $\mathfrak{M}^*$ .** Wir fügen zu  $\mathfrak{M}$  alle in der Form  $M = \lim_n M_n$  ( $M_n \in \mathfrak{M}$ ) darstellbaren Mengen hinzu; das so entstehende Mengensystem bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}^*$ . Nach 3.5.2, 3.7.3 ist, wenn  $\mathfrak{M}$  ein Ring:  $\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}^*$ .

**31.6.1.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$ .

Aus 3.7.4 folgt:  $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$ . Bleibt zu zeigen:  $\mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2 \subseteq \mathfrak{M}^*$ , d. h.: ist  $A \in \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$ , so ist auch  $A \in \mathfrak{M}^*$ . Dies ist richtig, wenn  $A = A$ ; denn wegen  $A \in \mathfrak{M}^2$  ist  $A = \bigcup_n B_n$  mit  $B_n \in \mathfrak{M}_1$ ; wegen  $A = A$  ist aber auch  $B_n = A$ , also  $A \in \mathfrak{M}_1$ , und somit  $A \in \mathfrak{M}^*$ , wie behauptet. Analog beweist man die Behauptung, wenn  $A = E$ . Sei also  $A \subset A \subset E$ . Wir setzen  $\tilde{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} + \{A, E\}$  und bezeichnen mit  $\tilde{\mathfrak{M}}$  das System der Komplemente der Mengen von  $\tilde{\mathfrak{M}}$  bzgl.  $E$ ; nach 31.1.4 ist dann  $\tilde{\mathfrak{M}}^2$  bzw.  $\tilde{\mathfrak{M}}_2$  das System der Komplemente der Mengen von  $\tilde{\mathfrak{M}}_2$ , bzw.  $\tilde{\mathfrak{M}}^2$ . Sei  $\mathfrak{X}$  das System aller Funktionen, die nur endlich viele verschiedene Werte annehmen, und für die jede Menge  $[f(x) \geq y] \in \tilde{\mathfrak{M}}$  ist; dann ist  $\tilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = \tilde{\mathfrak{M}}$ , und da die Funktionen aus  $\mathfrak{X}$  nur endlich viele Werte annehmen:  $\tilde{\mathfrak{X}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{X}) = \tilde{\mathfrak{M}}$ ; und weil  $\tilde{\mathfrak{M}}$  ein die Mengen  $A$  und  $E$  enthaltender Ring, ist offenbar  $\mathfrak{X}$  autark und additiv. Sei nun  $A \in \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$ ; dann ist auch  $A \in \tilde{\mathfrak{M}}_2 \tilde{\mathfrak{M}}^2$ , also  $E - A \in \tilde{\mathfrak{M}}_2 \tilde{\mathfrak{M}}^2$ ; und sei  $g = 1$  auf  $A$ ,  $g = 0$  auf  $E - A$ ; dann ist  $[g(x) > y] \in \tilde{\mathfrak{M}}^2$ ,  $[g(x) < y] \in \tilde{\mathfrak{M}}^2$  für alle  $y \in \mathbb{R}_1$ , also ist nach 31.4.3  $g \in \mathfrak{X}^*$ , d. h. es gibt in  $\mathfrak{X}$  eine Folge  $((f_n))$  mit  $\lim_n f_n = g$ . Da  $g$  nur die Werte 0, 1 annimmt, ist  $[g(x) = 1] = \lim_n [f_n(x) \geq \frac{1}{2}]$ , d. h. wenn  $[f_n(x) \geq \frac{1}{2}] = A_n$  gesetzt wird:  $A = \lim_n A_n$ , und wegen  $f_n \in \mathfrak{X}$  ist  $A_n \in \tilde{\mathfrak{M}}$ . Da  $A \subset A \subset E$ , ist auch  $A \subset A_n \subset E$  für fast alle  $n$ , und unter Weglassung endlich vieler  $A_n$  können wir annehmen, dies gelte für alle  $n$ ; dann aber folgt aus  $A_n \in \tilde{\mathfrak{M}}$  auch  $A_n \in \mathfrak{M}$ , und somit  $A \in \mathfrak{M}^*$ , w. z. b. w.

**31.6.11.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{M}^* = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1$ .

Nach (1) ist  $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2$ ,  $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_1 = \mathfrak{M}_2$ , und die Behauptung folgt aus 31.6.1.

**31.6.12.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring und  $\mathfrak{R}$  der kleinste Ring über  $\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1$ , so ist  $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{R}_1^1$ .

Da  $\mathfrak{M}^2$  nach 3.5.1 ein Ring, folgt aus  $\mathfrak{M}^2 \supseteq \mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1$  auch  $\mathfrak{M}^2 \supseteq \mathfrak{R}$ , und da nach 31.1.2  $(\mathfrak{M}^2)^1 = \mathfrak{M}^2$  ist, folgt daraus  $\mathfrak{M}^2 \supseteq \mathfrak{R}^1$ ; andererseits ist wegen (1):  $\mathfrak{R}^1 \supseteq (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2$ ; also ist  $\mathfrak{M}^2 = \mathfrak{R}^1$ . Ebenso zeigt man  $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{R}_1$ . Die Behauptung folgt also aus 31.6.1.

**31.6.2.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{M}^*$  ein  $\mu$ -System.

Dies folgt aus 31.6.11, 31.5.4.

**31.6.21.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist auch  $\mathfrak{M}^*$  ein Ring; ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so ist auch  $\mathfrak{M}^*$  ein Körper.

Sei  $A \in \mathfrak{M}^*$ ,  $B \in \mathfrak{M}^*$ , also  $A = \lim_n A_n$ ,  $B = \lim_n B_n$  mit  $A_n \in \mathfrak{M}$ ,  $B_n \in \mathfrak{M}$ . Nach § 3 (7.7) ist dann  $A + B = \lim_n (A_n + B_n)$ ,  $A B = \lim_n A_n B_n$ ,  $A - B = \lim_n (A_n - B_n)$ , woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

**31.6.3.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $(\mathfrak{M}_1^1)^* = \mathfrak{M}^*$ .

Da  $(\mathfrak{M}_1^1)^* \supseteq \mathfrak{M}^*$ , ist nur zu zeigen  $(\mathfrak{M}_1^1)^* \subseteq \mathfrak{M}^*$ . Setzen wir  $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{R}$ , so ist  $\mathfrak{R}^1 \subseteq (\mathfrak{M}_1^1)^1 = \mathfrak{M}^1$ , also  $\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{M}_2$ , ebenso  $\mathfrak{R}^2 \subseteq \mathfrak{M}^2$ , also  $\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}^2 \subseteq \mathfrak{M}_2 \mathfrak{M}^2$ , d. h. nach 31.5.1 und 31.6.1  $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{M}^*$ , w. z. b. w.

Ein System  $\mathfrak{M}$ , für das  $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$  ist, haben wir in § 3, 8 als  $\lambda$ -System bezeichnet.

**31.6.4.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist, damit  $\mathfrak{M}$  ein  $\lambda$ -System sei, notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^1 = \mathfrak{M}_1$  sei.

Der Beweis ist analog dem von 31.4.6.

Literatur zu § 31: F. Hausdorff, Mengenlehre § 41; W. Sierpiński, Fund. math. 18 (1932) S. 1.

## § 32. Einschreibungs- und Erweiterungssätze.

**1. Einschreibungssatz für Mengen.** Sei wieder  $E$  eine ganz beliebige Menge,  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$ .

**32.1.1.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $B \in \mathfrak{M}_1$ ,  $C \in \mathfrak{M}^1$  und  $B \subseteq C$ , so gibt es ein  $A \in \mathfrak{M}_1^1$ , so daß  $B \subseteq A \subseteq C$ .

Nach 3.5.2 ist  $B = \lim_n B_n$ ,  $C = \lim_n C_n$ , wo  $B_n \in \mathfrak{M}$ ,  $C_n \in \mathfrak{M}$ ,  $B_n \supseteq B_{n+1}$ ,  $C_n \subseteq C_{n+1}$ . Wir definieren zwei Mengenfolgen  $((P_n))$ ,  $((Q_n))$  aus  $\mathfrak{M}$  durch:

(1)  $P_1 = B_1$ ,  $Q_1 = B_1 C_1$ ;  $P_{n+1} = Q_n + B_{n+1}$ ,  $Q_{n+1} = P_{n+1} C_{n+1}$ .

Dann ist:

$$(1.1) \quad P_n \supseteq B_n, \quad Q_n \subseteq C_n; \quad P_{n+1} \supseteq Q_n, \quad Q_n \subseteq P_n.$$

Aus (1.1) folgt  $Q_n \subseteq P_n$ ,  $B_{n+1} \subseteq B_n \subseteq P_n$ ;  $Q_n \subseteq P_{n+1}$ ,  $Q_n \subseteq C_n \subseteq C_{n+1}$ ; also folgt aus (1):

$$(1.2) \quad P_{n+1} \subseteq P_n, \quad Q_n \subseteq Q_{n+1}.$$

Wir setzen nun  $\bigcap_n P_n = P$ ,  $\bigcap_n Q_n = Q$ ; dann ist  $P \in \mathfrak{M}_1$ ,  $Q \in \mathfrak{M}_1$ , und wegen (1.1) ist  $P \supseteq B$ ,  $Q \subseteq C$ . Wir werden nun zeigen, daß  $P = Q$ , womit dann 32.1.1 bewiesen sein wird. — Da nach (1.1)  $Q_n \subseteq P_n$ , und nach (1.2) und 3.7.3  $\lim_n P_n = P$ ,  $\lim_n Q_n = Q$ , ist nach 3.7.1  $Q \subseteq P$ . Es bleibt also nur zu zeigen:  $Q \supseteq P$ , d. h.  $P - Q = \Lambda$ . Gäbe es ein  $a \in P - Q$ , so wäre  $a \in P_n - Q_n$  und  $a \in P_{n+1} - Q_n$  für alle  $n$ ; nach (1) ist aber  $P_n - Q_n \subseteq E - C_n$ ,  $P_{n+1} - Q_n \subseteq B_{n+1} \subseteq B_n$ ; es wäre also  $a \sim_\varepsilon C_n$ ,  $a \in B_n$  für alle  $n$ , mithin  $a \sim_\varepsilon C$ ,  $a \in B$ , entgegen der Annahme  $B \subseteq C$ ; es gibt also kein  $a \in P - Q$ , d. h.  $P - Q = \Lambda$ , w. z. b. w.

**32.1.11.** Ist der Ring  $\mathfrak{M}$  ein  $\mu$ -System,  $B \in \mathfrak{M}_1$ ,  $C \in \mathfrak{M}_1$  und  $B \subseteq C$ , so gibt es ein  $A \in \mathfrak{M}$ , so daß  $B \subseteq A \subseteq C$ .

Dies folgt nach Definition der  $\mu$ -Systeme (§ 31, 5) unmittelbar aus 32.1.1.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 1.

**2. Einschiebungssatz für Funktionen.** Sei nun  $\mathfrak{S}$  irgendein System von Funktionen auf  $E$ .

**32.2.1.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark,  $g \in \mathfrak{S}_1$ ,  $h \in \mathfrak{S}^1$  und  $g \leq h$ , so gibt es ein  $f \in \mathfrak{S}_1^1$ , so daß  $g \leq f \leq h$ .

Nach § 31, 2 ist  $g = \lim_n g_n$ ,  $h = \lim_n h_n$ , wo  $g_n \in \mathfrak{S}$ ,  $h_n \in \mathfrak{S}$ ,  $g_n \geq g_{n+1}$ ,  $h_n \leq h_{n+1}$ . Wir definieren zwei Funktionenfolgen  $((\varphi_n))$ ,  $((\psi_n))$  aus  $\mathfrak{S}$  durch:

$$(2) \quad \varphi_1 = g_1, \quad \psi_1 = \min(g_1, h_1); \quad \varphi_{n+1} = \max(\psi_n, g_{n+1}), \quad \psi_{n+1} = \min(\varphi_{n+1}, h_{n+1}).$$

Dann ist:

$$(2.1) \quad \varphi_n \geq g_n, \quad \psi_n \leq h_n; \quad \varphi_{n+1} \geq \varphi_n, \quad \psi_n \leq \varphi_n.$$

Aus (2.1) folgt  $\varphi_n \leq \varphi_n$ ,  $g_{n+1} \leq g_n \leq \varphi_n$ ;  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ,  $\psi_n \leq h_n \leq h_{n+1}$ ; also folgt aus (2):

$$(2.2) \quad \varphi_{n+1} \leq \varphi_n, \quad \psi_n \leq \psi_{n+1}.$$

Wir setzen nun  $\lim_n \varphi_n = \varphi$ ,  $\lim_n \psi_n = \psi$ ; da  $\mathfrak{S}$  autark, ist  $\varphi_n \in \mathfrak{S}$ ,  $\psi_n \in \mathfrak{S}$ , also  $\varphi \in \mathfrak{S}_1$ ,  $\psi \in \mathfrak{S}^1$ , und wegen (2.1) ist  $\varphi \geq g$ ,  $\psi \leq h$ . Wir werden nun zeigen, daß  $\varphi = \psi$ , womit dann 32.2.1 bewiesen sein wird. — Da nach (2.1)  $\varphi_n \leq \varphi_n$ , ist auch  $\psi \leq \varphi$ . Es bleibt also nur zu zeigen:  $\varphi \geq \psi$ . Gäbe es ein  $x \in E$  mit  $\psi(x) < \varphi(x)$ , so wäre auch  $\varphi_n(x) < \varphi_n(x)$ ,  $\psi_n(x) < \varphi_{n+1}(x)$



für alle  $n$ ; dann aber wäre nach (2):  $\varphi_n(x) = h_n(x)$ ,  $\varphi_{n+1}(x) = g_{n+1}(x)$  für alle  $n$ , also  $\varphi(x) = h(x)$ ,  $\varphi(x) = g(x)$ , also  $h(x) < g(x)$  entgegen der Voraussetzung  $g \leq h$ ; es gibt also kein  $x$  mit  $\varphi(x) < \varphi(x)$ , d. h. es ist  $\varphi \leq \varphi$ , w. z. b. w.

**32.2.11.** Ist  $\mathfrak{C}$  völlig autark,  $g \in \mathfrak{C}_1$ ,  $h \in \mathfrak{C}^1$  und  $g \leq h$ , so gibt es ein  $f \in \mathfrak{C}$ , so daß  $g \leq f \leq h$ .

Nach 31.3.23 ist  $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1^1$ , die Behauptung folgt also aus 32.2.1.

Literatur: H. Hahn, Wien. Ber. 126 (1917) S. 103; F. Hausdorff, Math. Zeitschr. 5 (1919) S. 292; Mengenlehre S. 243.

**3. Erweiterungssätze für Mengen.** Sei wieder  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$  und sei  $E' \subseteq E$ ; das System der Durchschnitte  $E' \cap M$  für alle  $M \in \mathfrak{M}$  bezeichnen wir mit  $E' \cap \mathfrak{M}$ ; ebenso bedeutet  $E' \cap \mathfrak{M}^1$  das System der Mengen  $E' \cap M$  für alle  $M \in \mathfrak{M}^1$  usf. Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so auch  $E' \cap \mathfrak{M}$ . Bedeutet  $\mathfrak{M}_r$  den kleinsten Ring über dem Mengensystem  $\mathfrak{M}$ , so gilt:

**32.3.1.** Bei beliebigem  $\mathfrak{M}$  ist  $(E' \cap \mathfrak{M})_r = E' \cap \mathfrak{M}_r$ .

Nach § 3, 2 besteht  $\mathfrak{M}_r$  aus allen Mengen der Gestalt:  $A_1 + A_2 + \dots + A_n$ , wo  $A_i = A_{i1} A_{i2} \dots A_{ik_i}$  und  $A_{ij} \in \mathfrak{M}$ ; setzen wir  $E' A_i = A'_i$ ,  $E' A_{ij} = A'_{ij}$ , so besteht also  $E' \cap \mathfrak{M}_r$  aus allen Mengen der Gestalt  $A'_1 + A'_2 + \dots + A'_n$ , wo  $A'_i = A'_{i1} A'_{i2} \dots A'_{ik_i}$  und  $A'_{ij} \in E' \cap \mathfrak{M}$ ; also ist nach § 3, 2  $E' \cap \mathfrak{M}_r$  der kleinste Ring über  $E' \cap \mathfrak{M}$ , d. h.  $E' \cap \mathfrak{M}_r = (E' \cap \mathfrak{M})_r$ .

**32.3.2.** Bei beliebigem  $E' \subseteq E$  ist  $(E' \cap \mathfrak{M})^1 = E' \cap \mathfrak{M}^1$ ,  $(E' \cap \mathfrak{M})_1 = E' \cap \mathfrak{M}_1$ .

$\mathfrak{M}^1$  besteht aus allen Mengen der Gestalt  $\bigcap_n A_n$ , wo  $A_n \in \mathfrak{M}$ ; setzen wir  $E' A_n = A'_n$ , so besteht also  $E' \cap \mathfrak{M}^1$  aus allen Mengen der Gestalt  $\bigcap_n A'_n$ , wo  $A'_n \in E' \cap \mathfrak{M}$ , also ist  $E' \cap \mathfrak{M}^1 = (E' \cap \mathfrak{M})^1$ .

**32.3.3.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $E' \in \mathfrak{M}_1$ , so ist  $(E' \cap \mathfrak{M})_1^1 = E' \cap \mathfrak{M}_1^1$ .

Nach 32.3.2 ist  $(E' \cap \mathfrak{M})_1^1 = (E' \cap \mathfrak{M})^1$ .  $(E' \cap \mathfrak{M})_1 = E' \cap \mathfrak{M}_1$ ,  $E' \cap \mathfrak{M}_1$ ; und da  $\mathfrak{M}_1^1 \subseteq \mathfrak{M}^1$ ,  $\mathfrak{M}_1^1 \subseteq \mathfrak{M}_1$ , also  $E' \cap \mathfrak{M}_1^1 \subseteq E' \cap \mathfrak{M}^1$ .  $E' \cap \mathfrak{M}_1$  ist  $E' \cap \mathfrak{M}_1^1 \subseteq (E' \cap \mathfrak{M})_1^1$ . Bleibt zu zeigen:  $(E' \cap \mathfrak{M})_1^1 \subseteq E' \cap \mathfrak{M}_1^1$ , d. h. aus  $A \in (E' \cap \mathfrak{M})_1^1$  folgt  $A \in E' \cap \mathfrak{M}_1^1$ . Sei also  $A \in (E' \cap \mathfrak{M})_1^1$ ; dann ist  $A \in (E' \cap \mathfrak{M})^1$  und  $A \in (E' \cap \mathfrak{M})_1$ , also nach 32.3.2:  $A \in E' \cap \mathfrak{M}^1$  und  $A \in E' \cap \mathfrak{M}_1$ ; es ist also:  $A = E' \cap P = E' \cap Q$ , wo  $P \in \mathfrak{M}^1$ ,  $Q \in \mathfrak{M}_1$ ; da nach 3.5.1  $\mathfrak{M}_1$  ein Ring, folgt aus  $E' \in \mathfrak{M}_1$ ,  $Q \in \mathfrak{M}_1$  auch  $E' \cap Q \in \mathfrak{M}_1$ , d. h.  $A \in \mathfrak{M}_1$ ; wegen  $A = E' \cap P$  ist  $A \subseteq P$ ; da  $A \in \mathfrak{M}_1$ ,  $P \in \mathfrak{M}^1$ , gibt es nach 32.1.1 ein  $B \in \mathfrak{M}_1^1$ , so daß  $A \subseteq B \subseteq P$ ; dann ist auch  $A = E' \cap A \subseteq E' \cap B \subseteq E' \cap P = A$ , also  $A = E' \cap B$ , d. h.  $A \in E' \cap \mathfrak{M}_1^1$ , w. z. b. w.

**32.3.4.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $E' \in \mathfrak{M}_2$ , so ist  $(E' \cap \mathfrak{M})^* = E' \cap \mathfrak{M}^*$ .

Wir setzen, wenn wieder  $\mathfrak{M}_r$  den kleinsten Ring über  $\mathfrak{M}$  bedeutet:  $(\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{M}_1)_r = \mathfrak{R}$ ,  $((E' \cap \mathfrak{M})^1 + (E' \cap \mathfrak{M})_1)_r = \mathfrak{R}'$ . Da nach 32.3.2:  $(E' \cap \mathfrak{M})^1$

$+(E' \mid \mathfrak{M})_1 = E' \mid \mathfrak{M} + E' \mid \mathfrak{M}_1 = E' \mid (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1)$ , ist  $\mathfrak{R}' = (E' \mid (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1))_r$ , also nach 32.3.1:  $\mathfrak{R}' = E' \mid \mathfrak{R}$ . Nach 31.6.12 ist daher  $(E' \mid \mathfrak{M})^* = \mathfrak{R}'_1 = (E' \mid \mathfrak{R})_1^*$ ; da nach § 31 (1):  $\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M} + \mathfrak{M}_1)_1$ , ist  $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{R}_1$ ; wegen  $E' \varepsilon \mathfrak{M}_2$  ist also  $E' \varepsilon \mathfrak{R}_1$ ; also ist nach 32.3.3:  $(E' \mid \mathfrak{M})^* = E' \mid \mathfrak{R}_1^*$ , also nach 31.6.12:  $(E' \mid \mathfrak{M})^* = E' \mid \mathfrak{M}^*$ .

Wir haben die Sätze dieser Nummer als „Erweiterungssätze“ bezeichnet, weil z. B. in 32.3.2 die Aussage enthalten ist: Ist  $A \varepsilon (E' \mid \mathfrak{M})^1$ , so ist  $A = E' \mid P$  mit  $P \varepsilon \mathfrak{M}^1$ , d. h.  $A$  kann durch Hinzufügung nicht zu  $E'$  gehöriger Elemente zu einer Menge aus  $\mathfrak{M}^1$  erweitert werden.

**4. Erweiterungssätze für Funktionen.** Sei  $\mathcal{C}$  ein System von Funktionen auf  $E$  und  $E' \subseteq E$ . Das System der auf  $E'$  eingeschränkten (§ 25, 4) Funktionen  $E' \mid f$  ( $f \varepsilon \mathcal{C}$ ) bezeichnen wir mit  $E' \mid \mathcal{C}$ . Ist  $\mathcal{C}$  autark, so auch  $E' \mid \mathcal{C}$ . Offenbar gilt:

$$(4) \quad \begin{aligned} \overline{\mathcal{G}}(E' \mid \mathcal{C}) &= E' \mid \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{C}), & \mathcal{G}(E' \mid \mathcal{C}) &= E' \mid \mathcal{G}(\mathcal{C}), \\ \overline{\mathcal{F}}(E' \mid \mathcal{C}) &= E' \mid \overline{\mathcal{F}}(\mathcal{C}), & \mathcal{F}(E' \mid \mathcal{C}) &= E' \mid \mathcal{F}(\mathcal{C}). \end{aligned}$$

**32.4.1.** Ist  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(*, \mathfrak{M})$ , bzw.  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ ), so ist  $E' \mid \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $E' \mid \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{C}(*, E' \mid \mathfrak{M})$ , bzw.  $E' \mid \mathfrak{X} \subseteq \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, E' \mid \mathfrak{N})$ ).

Dies folgt ohne weiteres aus (4); man beachte dabei, daß im Falle  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  wegen  $\overline{\mathcal{G}}(E' \mid \mathfrak{X}) = E' \mid \mathfrak{M}$ ,  $\mathcal{G}(E' \mid \mathfrak{X}) = E' \mid \mathfrak{N}$  die Existenz des Systems  $\mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, E' \mid \mathfrak{N})$  aus 30.2.22 folgt.

**32.4.11.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System und  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(*, \mathfrak{M})$ ), so ist  $E' \mid \mathfrak{X} = \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $E' \mid \mathfrak{X} = \mathcal{C}(*, E' \mid \mathfrak{M})$ ).

Wegen 32.4.1 ist nur zu zeigen:  $\mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *) \subseteq E' \mid \mathfrak{X}$ , d. h.: ist  $\varphi \varepsilon \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$ , so ist auch  $\varphi \varepsilon E' \mid \mathfrak{X}$ . Sei also  $\varphi \varepsilon \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$ ; für jedes  $y \varepsilon \overline{R}_1$  ist dann  $[\varphi(\dot{x}) > y] \varepsilon E' \mid \mathfrak{M}$ , also  $[\varphi(\dot{x}) > y] = E' \mid M_y$ , wo  $M_y \varepsilon \mathfrak{M}$ . Wir setzen nun  $G_y = \bigcup_{r > y} S M_r$ , wo  $r$  alle rationalen Zahlen  $> y$  durchläuft; dann gibt es nach 30.1.4 eine Funktion  $f$  auf  $E$ , so daß  $[f(\dot{x}) > y] = G_y$ ; da  $M_r \varepsilon \mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -System, ist auch  $G_y \varepsilon \mathfrak{M}$ , also  $f \varepsilon \mathcal{C}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{X}$ . Setzen wir  $E' \mid f = \psi$ , so ist  $[\psi(\dot{x}) > y] = E' \mid [f(\dot{x}) > y] = E' \mid G_y = \bigcup_{r > y} E' \mid M_r = \bigcup_{r > y} S [\varphi(\dot{x}) > r]$ , also nach 30.1.2:  $[\psi(\dot{x}) > y] = [\varphi(\dot{x}) > y]$ ; nach 30.1.3 ist somit  $\varphi = \psi = E' \mid f$ , und da  $f \varepsilon \mathfrak{X}$  war, ist  $\varphi \varepsilon E' \mid \mathfrak{X}$ , w. z. b. w.

**32.4.12.** Ist das System  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(\mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $\mathfrak{X} = \mathcal{C}(*, \mathfrak{M})$ ) autark, und ist  $E - E' \varepsilon \mathfrak{M}$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{X} = \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$  (bzw.  $E' \mid \mathfrak{X} = \mathcal{C}(*, E' \mid \mathfrak{M})$ ).

Wegen 32.4.1 ist auch hier nur zu zeigen: ist  $\varphi \varepsilon \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$ , so ist auch  $\varphi \varepsilon E' \mid \mathfrak{X}$ . Sei also  $\varphi \varepsilon \mathcal{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$ . Sei  $\mathfrak{M}'$  das System der

Komplemente der Mengen von  $\mathfrak{M}$  bzgl.  $E$ ; da  $\mathfrak{M}$  nach 30.3.4 ein Ring, ist auch  $\mathfrak{M}'$  ein Ring, und wegen  $E - E' \in \mathfrak{M}$  ist  $E' \in \mathfrak{M}'$ . Wir definieren eine Funktion  $h$  auf  $E$  durch:

$$(4.1) \quad h = \varphi \text{ auf } E', \quad h = +\infty \text{ auf } E - E';$$

für jedes  $y < +\infty$  ist dann  $[h(x) \leq y] = [\varphi(x) \leq y]$ ; wegen  $\varphi \in \mathfrak{C}(E' \mid \mathfrak{M}, *)$  ist  $[\varphi(x) > y] \in E' \mid \mathfrak{M}$ , also  $[\varphi(x) \leq y] \in E' \mid \mathfrak{M}'$ , also auch  $[h(x) \leq y] \in E' \mid \mathfrak{M}'$ , und mithin, da  $E' \in \mathfrak{M}'$  und  $\mathfrak{M}'$  ein Ring:  $[h(x) \leq y] \in \mathfrak{M}'$ , also  $[h(x) > y] \in \mathfrak{M}$ ; da nach 30.3.4 auch  $h[(x) > +\infty] = \Lambda \in \mathfrak{M}$ , ist  $h \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *) = \mathfrak{X}$ , und da  $\varphi = E' \mid h$ , ist  $\varphi \in E' \mid \mathfrak{X}$ , w. z. b. w.

**32.4.13.** Ist das System  $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  völlig autark, und ist  $E - E' \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{X} = \mathfrak{C}(E' \mid \mathfrak{M}, E' \mid \mathfrak{N})$ .

Wegen 32.4.1 ist auch hier nur zu zeigen: ist  $\varphi \in \mathfrak{C}(E' \mid \mathfrak{M}, E' \mid \mathfrak{N})$ , so ist auch  $\varphi \in E' \mid \mathfrak{X}$ . Wir definieren wieder  $h$  durch (4.1) und  $g$  durch:  $g = \varphi$  auf  $E'$ ,  $g = -\infty$  auf  $E - E'$ . Wie beim Beweise von 32.4.12 gezeigt, ist  $h \in \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *)$ , und analog zeigt man:  $g \in \mathfrak{C}(*, \mathfrak{N})$ ; nach 31.2.511 ist also  $g \in \mathfrak{X}_1$ ,  $h \in \mathfrak{X}^1$ , und da  $g \leq h$ , gibt es nach 32.2.11 ein  $f \in \mathfrak{X}$ , so daß  $g \leq f \leq h$ . Da auf  $E'$ :  $g = h = \varphi$ , ist nun  $\varphi = E' \mid f$ , also  $\varphi \in E' \mid \mathfrak{X}$ , w. z. b. w.

Sei speziell  $E$  ein metrischer Raum, und sei  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$  das System der in  $E$  offenen Mengen; dann ist (§ 30, 2)  $\mathfrak{X} = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  das System der stetigen Funktionen auf  $E$  und  $E' \mid \mathfrak{M} = E' \mid \mathfrak{N}$  das System der in  $E'$  offenen Mengen, also  $\mathfrak{C}(E' \mid \mathfrak{M}, E' \mid \mathfrak{N})$  das System der stetigen Funktionen auf  $E'$ , und die Voraussetzung  $E - E' \in \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$  besagt:  $E'$  ist abgeschlossen in  $E$ . Während nun die Formel  $E' \mid \mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{C}(E' \mid \mathfrak{M}, E' \mid \mathfrak{N})$  von 32.4.1 nur die triviale Tatsache ausdrückt, daß, wenn  $f$  stetig auf  $E$ , die Funktion  $E' \mid f$  stetig auf  $E'$  ist, so entnehmen wir aus 32.4.13:

**32.4.131.** Ist  $E$  ein metrischer Raum und  $E'$  abgeschlossen in  $E$ , so gibt es zu jeder stetigen Funktion  $\varphi$  auf  $E'$  eine stetige Funktion  $f$  auf  $E$ , so daß  $\varphi = E' \mid f$ .

Für ein beliebiges Funktionensystem  $\mathfrak{X}$  auf  $E$  gelten die Sätze:

**32.4.2.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark und  $E' \subseteq E$ , so ist  $(E' \mid \mathfrak{X})^1 = E' \mid \mathfrak{X}^1$ ,  $(E' \mid \mathfrak{X})_1 = E' \mid \mathfrak{X}_1$ .

Setzen wir  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}$ , so ist nach 31.2.51  $\mathfrak{X}^1 = \mathfrak{C}(\mathfrak{M}^1, *)$ ; nach 3.4.1 ist  $\mathfrak{M}^1$  ein  $\sigma$ -System, also nach 32.4.11  $E' \mid \mathfrak{X}^1 = \mathfrak{C}(E' \mid \mathfrak{M}^1, *)$ ; und somit nach 32.3.2  $E' \mid \mathfrak{X}^1 = \mathfrak{C}((E' \mid \mathfrak{M})^1, *)$ ; nun ist nach (4):  $\mathfrak{G}(E' \mid \mathfrak{X}) = E' \mid \mathfrak{M}$ , also nach 31.2.51  $\mathfrak{C}((E' \mid \mathfrak{M})^1, *) = (E' \mid \mathfrak{X})^1$ , d. h.  $E' \mid \mathfrak{X}^1 = (E' \mid \mathfrak{X})^1$ .

**32.4.21.** Ist  $E' \subseteq E$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{X}_1^1 \subseteq (E' \mid \mathfrak{X})_1^1$ .

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

**32.4.211.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark,  $E' \varepsilon \mathfrak{F}(\mathfrak{X})_1 \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X})_1$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{X}_1^1 = (E' \mid \mathfrak{X}_1^1)_1$ .

Nach 31.3.41 ist, wenn  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{N}$  gesetzt wird:  $\mathfrak{X}_1^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{N}^1)$ ; nach 31.3.2 ist  $\mathfrak{X}_1^1$  völlig autark; aus  $E' \varepsilon \mathfrak{F}(\mathfrak{X})_1 \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X})_1$  folgt nach 31.1.4  $E - E' \varepsilon \mathfrak{M}^1 \mathfrak{N}^1$ ; nach 32.4.13 ist also  $E' \mid \mathfrak{X}_1^1 = \mathfrak{G}(E' \mid \mathfrak{M}^1, E' \mid \mathfrak{N}^1)$ , somit nach 32.3.2:  $E' \mid \mathfrak{X}_1^1 = \mathfrak{G}((E' \mid \mathfrak{M})^1, (E' \mid \mathfrak{N})^1)$ ; da aber nach (4):  $\overline{\mathfrak{G}}(E' \mid \mathfrak{X}) = E' \mid \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{G}(E' \mid \mathfrak{X}) = E' \mid \mathfrak{N}$ , ist nach 31.3.41  $\mathfrak{G}((E' \mid \mathfrak{M})^1, (E' \mid \mathfrak{N})^1) = (E' \mid \mathfrak{X})_1^1$ , und wir haben:  $E' \mid \mathfrak{X}_1^1 = (E' \mid \mathfrak{X}_1^1)_1$ .

**32.4.22.** Ist  $E' \subseteq E$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{X}^* \subseteq (E' \mid \mathfrak{X})^*$ .

Dies folgt unmittelbar aus den Definitionen.

**32.4.221.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark, sind  $\mathfrak{X}$  und  $E' \mid \mathfrak{X}$  additiv, und ist  $E' \varepsilon \mathfrak{G}(\mathfrak{X})_2 \mathfrak{G}(\mathfrak{X})_2$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{X}^* = (E' \mid \mathfrak{X})^*$ .

Nach 31.4.3 haben wir, wenn  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Q}$  gesetzt wird:  $\mathfrak{X}^* = \mathfrak{G}(\mathfrak{P}^2, \mathfrak{Q}^2)$ ; nach 31.4.11 ist  $\mathfrak{X}^*$  völlig autark; aus  $E' \varepsilon \mathfrak{G}(\mathfrak{X})_2 \mathfrak{G}(\mathfrak{X})_2$  folgt nach 31.1.4  $E - E' \varepsilon \mathfrak{P}^2 \mathfrak{Q}^2$ ; nach 32.4.13 ist also  $E' \mid \mathfrak{X}^* = \mathfrak{G}(E' \mid \mathfrak{P}^2, E' \mid \mathfrak{Q}^2)$ ; durch zweimalige Anwendung von 32.3.2 erhält man:  $E' \mid \mathfrak{P}^2 = (E' \mid \mathfrak{P})^2$ ,  $E' \mid \mathfrak{Q}^2 = (E' \mid \mathfrak{Q})^2$ , also  $E' \mid \mathfrak{X}^* = \mathfrak{G}((E' \mid \mathfrak{P})^2, (E' \mid \mathfrak{Q})^2)$ ; nach (4) ist  $E' \mid \mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{F}}(E' \mid \mathfrak{X})$ ,  $E' \mid \mathfrak{Q} = \mathfrak{F}(E' \mid \mathfrak{X})$ , also nach 31.4.3:  $\mathfrak{G}((E' \mid \mathfrak{P})^2, (E' \mid \mathfrak{Q})^2) = (E' \mid \mathfrak{X})^*$ , und wir haben  $E' \mid \mathfrak{X}^* = (E' \mid \mathfrak{X})^*$ .

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 244. Satz 32.4.131 wurde zuerst bewiesen von H. Tietze, J. f. Math. 145 (1914) S. 9.

**5. Treppenfunktionen.** Als Treppenfunktion bezeichnen wir eine Funktion auf  $E$ , die nur endlich viele verschiedene, durchweg endliche Werte annimmt.

**32.5.1.** Ist  $A \varepsilon \mathfrak{M}$ ,  $E \varepsilon \mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}, *)$  (oder  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}(*, \mathfrak{M})$ ) so gibt es in  $\mathfrak{X}$  zu jedem  $f \varepsilon \mathfrak{X}$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen.

Sei  $f_n = -n$  auf  $[f(x) \leq -n]$ ,  $f_n = n$  auf  $[f(x) > n]$ ,  $f_n = \frac{i}{n}$  auf  $\left[\frac{i-1}{n} < f(x) \leq \frac{i}{n}\right]$  für  $-n^2 < i \leq n^2$ . Dann ist  $f_n$  eine Treppenfunktion und  $(f_n)$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ . Bleibt zu zeigen, daß  $f_n \varepsilon \mathfrak{X}$ , d. h. daß  $[f_n(x) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$  für alle  $y \varepsilon R_1$ . Für  $y < -n$  ist  $[f_n(x) > y] = E$ , also  $[f_n(x) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$  nach Voraussetzung; für  $y \geq n$  ist  $[f_n(x) > y] = A$ , also wieder  $[f_n(x) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$  nach Voraussetzung; für  $\frac{i-1}{n} \leq y < \frac{i}{n}$  ( $-n^2 < i \leq n^2$ ) ist  $[f_n(x) > y] = \left[f(x) > \frac{i-1}{n}\right]$ , also wieder  $[f_n(x) > y] \varepsilon \mathfrak{M}$ .

Für ein beliebiges Funktionensystem  $\mathfrak{X}$  auf  $E$  gelten die Sätze:

**32-5-2.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark, so gibt es in  $\mathfrak{X}^1$  (bzw. in  $\mathfrak{X}_1$ ) zu jedem  $f \in \mathfrak{X}^1$  (bzw. zu jedem  $f \in \mathfrak{X}_1$ ) eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen.

Ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}$ , so ist nach 31-2-51  $\mathfrak{X}^1 = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}^1, *)$ , und nach 30-3-3 ist  $A \in \mathfrak{M}$ ,  $E \in \mathfrak{M}$ , also auch  $A \in \mathfrak{M}^1$ ,  $E \in \mathfrak{M}^1$ . Die Behauptung folgt also aus 32-5-1.

**32-5-3.** Ist  $\mathfrak{X}$  völlig autark, und gibt es ein Mengensystem  $\mathfrak{M}$ , so daß  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}^1$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}_1$ , so gibt es in  $\mathfrak{X}$  zu jedem  $f \in \mathfrak{X}$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen.

Sei  $\mathfrak{N}$  der kleinste Ring über  $\mathfrak{M}$ ; da nach 30-3-3  $\mathfrak{M}^1$  ein Ring, ist  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}^1$ , also  $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{N}^1 \subseteq (\mathfrak{M}^1)^1$ , also wegen 31-1-2  $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{N}^1$ ; ebenso ist  $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{N}_1$ , also auch  $\mathfrak{M}_1^1 = \mathfrak{N}_1^1$ . Ist  $a < b$ , so ist  $[f(x) > a] \supseteq [f(x) \geq b]$ ; und da  $[f(x) > a] \in \mathfrak{M}^1 (= \mathfrak{N}^1)$ ,  $[f(x) \geq b] \in \mathfrak{M}_1 (= \mathfrak{N}_1)$ , gibt es nach 32-1-1 ein  $A \in \mathfrak{M}_1^1 (= \mathfrak{N}_1^1)$ , so daß  $[f(x) \geq b] \subseteq A \subseteq [f(x) > a]$ . Es gibt also ein  $A_i \in \mathfrak{M}_1^1$ , so daß  $\left[ f(x) \geq \frac{i}{n} \right] \subseteq A_i \subseteq \left[ f(x) > \frac{i-1}{n} \right]$ ; offenbar ist  $A_{i+1} \subseteq A_i$ .

Sei  $f_n = \frac{i}{n}$  auf  $A_i - A_{i+1}$  für  $-n^2 < i < n^2$ ,  $f_n = -n$  auf  $E - A_{-n^2+1}$ ,  $f_n = n$  auf  $A_{n^2}$ ; dann ist  $f_n$  eine Treppenfunktion und  $((f_n))$  konvergiert gleichmäßig gegen  $f$ . Bleibt nur zu zeigen, daß  $f_n \in \mathfrak{X}$ . Aus  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}_1$  folgt, wenn  $\mathfrak{N}$  das System der Komplemente der Mengen von  $\mathfrak{M}$  bedeutet, durch Komplementbildung:  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}^1$ ; nach 31-3-411 ist also  $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}(\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}_1^1)$ ; um zu zeigen, daß  $f_n \in \mathfrak{X}$ , genügt es also, zu zeigen: für jedes  $y \in \overline{R}_1$  ist  $[f_n(x) > y] \in \mathfrak{M}^1$ ,  $[f_n(x) < y] \in \mathfrak{M}^1$ . Nun ist jede Menge  $[f_n(x) > y]$  und jede Menge  $[f_n(x) \geq y]$  eine der Mengen  $A_i$ , oder  $= A$ , oder  $= E$ , gehört also (bei Beachtung von 30-3-3) zu  $\mathfrak{M}_1^1$ ; wegen  $\mathfrak{M}_1^1 \subseteq \mathfrak{M}^1$ ,  $\mathfrak{M}_1^1 \subseteq \mathfrak{M}_1$  ist also  $[f_n(x) > y] \in \mathfrak{M}^1$ ,  $[f_n(x) \geq y] \in \mathfrak{M}_1$ , und durch Komplementbildung:  $[f_n(x) < y] \in \mathfrak{M}^1$ .

**32-5-31.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark und additiv, so gibt es in  $\mathfrak{X}^*$  zu jedem  $f \in \mathfrak{X}^*$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen.

Wir setzen  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{P}$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{Q}$ ,  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}) = \mathfrak{M}$ . Nach 31-4-3 ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^*) = \mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1$ ; da nach 30-2-1  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{P}^1$ , also nach 31-1-2  $\mathfrak{M}^1 \subseteq (\mathfrak{P}^1)^1 = \mathfrak{P}^1 \subseteq (\mathfrak{P}_1)^1$ , ist hierin nach 31-1-3  $\mathfrak{P}^2 = (\mathfrak{P}_1)^1 = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)^1$ , und wir haben:

$$(5) \quad \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^*) = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)^1.$$

Nach 31-4-3 ist auch  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{X}^*) = \mathfrak{Q}^2 = (\mathfrak{Q}_1)^1$ , also durch Übergang zu den Komplementen  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{X}^*) = (\mathfrak{M}^1)_1$ ; da nach 30-2-1  $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{M}_1$ , also  $\mathfrak{P}_1 \subseteq (\mathfrak{M}_1)_1$

$= \mathfrak{M}_1 \subseteq (\mathfrak{M}^1)_1$ , ist hierin nach 31.1.3  $(\mathfrak{M}^1)_1 = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)_1$ , und wir haben:

$$(5.1) \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I}^*) = (\mathfrak{M}^1 + \mathfrak{P}_1)_1.$$

Da nach 31.4.11  $\mathfrak{I}^*$  völlig autark ist, folgt wegen (5), (5.1) die Behauptung aus 32.5.3.

**32.5.4.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark, additiv und symmetrisch, so gibt es zu jeder Treppenfunktion  $f \in \mathfrak{I}^*$  ein  $g \in \mathfrak{I}^1$  und ein  $h \in \mathfrak{I}_1$ , so daß  $f = g + h$ .

Wir setzen  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{M}$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{I}) = \mathfrak{P}$ . Seien  $c_1, c_2, \dots, c_m$  die endlich vielen Werte, die  $f$  annimmt, und sei  $A_i = [f(x) = c_i]$ . Ist dann  $y' < c_i < y''$  und sind  $y', y''$  hinlänglich wenig verschieden von  $c_i$ , so ist  $A_i = [f(x) > y'] \cdot [f(x) < y'']$ ; nach 31.4.3 ist  $[f(x) > y'] \in \mathfrak{P}^2$ ,  $[f(x) < y''] \in \mathfrak{P}^2$ , und da nach 30.3.3 und 3.5.1  $\mathfrak{P}^2$  ein Ring, ist  $A_i \in \mathfrak{P}^2$ , also  $A_i = \bigcup_n A_{in}$  mit  $A_{in} \in \mathfrak{P}_1$ ; und da  $\mathfrak{P}_1$  nach 30.3.3 und 3.5.1 ein Ring, kann nach 3.5.2 angenommen werden  $A_{in-1} \subseteq A_{in}$ . Wir definieren nun  $g$  und  $h$  durch:  $g = c_i + n$ ,  $h = -n$  auf  $A_{in} - A_{in-1}$  (wo  $A_{i0} = A$ ). Dann ist  $g + h = f$ . Jede Menge  $[g(x) \leq y]$  ist Summe endlich vieler  $A_{in}$ , also  $[g(x) \leq y] \in \mathfrak{P}_1$ , und durch Übergang zu den Komplementen  $[g(x) > y] \in \mathfrak{M}^1$ ; also ist  $g \in \mathfrak{I}^1$  nach 31.2.51. Ebenso ist jede Menge  $[h(x) \geq y]$  Summe endlich vieler  $A_{in}$ , also  $[h(x) \geq y] \in \mathfrak{P}_1$ , also  $[h(x) < y] \in \mathfrak{M}^1$  und somit  $h \in \mathfrak{I}_1$ .

Literatur zu Satz 32.5.31: Ch. J. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensembles, classes de Baire, Paris 1916, S. 118; zu Satz 32.5.4: W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 37.

### § 33. Die Borelschen Mengen.

**1. Die Borelschen Mengen über  $\mathfrak{M}$ .** Wir legen wieder als Bereich eine beliebige Menge  $E$  zugrunde und bezeichnen mit  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$ . Wir haben in § 31, 1 mit  $\mathfrak{M}^1$  bzw.  $\mathfrak{M}_1$  die Mengensysteme  $\mathfrak{M}_\sigma$  bzw.  $\mathfrak{M}_\delta$  bezeichnet, und definieren nun für jede Ordinalzahl  $\xi > 1$  durch Induktion die Mengensysteme  $\mathfrak{M}^\xi$  und  $\mathfrak{M}_\xi$  vermöge der Formeln:

$$(1) \quad \mathfrak{M}^\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) \right)^1, \quad \mathfrak{M}_\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) \right)_1.$$

Die Mengen aus  $\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi$  heißen die Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung über  $\mathfrak{M}$ . Die Definition (1) besagt also: Ist  $\mathfrak{N}$  das System der Borelschen Mengen über  $\mathfrak{M}$  von kleinerer als  $\xi$ -ter Ordnung ( $\xi > 1$ ), so ist  $\mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{N}^1$ ,  $\mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{N}_1$ .

**33.1.1.** Für  $\xi < \xi'$  ist  $\mathfrak{M}^\xi \subseteq \mathfrak{M}^{\xi'}$ ,  $\mathfrak{M}^\xi \subseteq \mathfrak{M}_{\xi'}$ ,  $\mathfrak{M}_\xi \subseteq \mathfrak{M}^{\xi'}$ ,  $\mathfrak{M}_\xi \subseteq \mathfrak{M}_{\xi'}$ . Dies folgt unmittelbar aus (1).

**33-1-11.** Ist  $\xi$  eine isolierte Zahl  $> 1$ , so ist:

$$(1-1) \quad S_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) = \mathfrak{M}^{\xi-1} + \mathfrak{M}_{\xi-1};$$

ist  $\xi$  eine Grenzzahl, so ist:

$$(1-11) \quad S_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) = S_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^\eta = S_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_\eta.$$

Dies folgt unmittelbar aus 33-1-1.

**33-1-2.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $(\mathfrak{M}^\xi)^1 = \mathfrak{M}^\xi$ ,  $(\mathfrak{M}_\xi)_1 = \mathfrak{M}_\xi$ .

Dies folgt aus (1) wegen 31-1-2.

**33-1-21.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist<sup>1)</sup>:

$$\mathfrak{M}^{\xi+1} = (\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)^1 = (\mathfrak{M}_\xi^1)^1; \quad \mathfrak{M}_{\xi+1} = (\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)_1 = (\mathfrak{M}_\xi)_1.$$

Wegen (1) und (1-1) ist  $\mathfrak{M}^{\xi+1} = (\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)^1$ ; hierin ist nach (1) und 33-1-1:  $\mathfrak{M}^\xi = (S_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 \subseteq (\mathfrak{M}_\xi^1)^1$ , also ist nach 31-1-3:  $(\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi)^1 = (\mathfrak{M}_\xi^1)^1$ .

**33-1-22.** Für jedes  $\xi > 1$  ist:

$$\mathfrak{M}^\xi = (S_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_\eta)^1, \quad \mathfrak{M}_\xi = (S_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^\eta)_1.$$

Dies folgt aus 33-1-1, 33-1-11 und 33-1-21.

**33-1-3.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist sowohl  $\mathfrak{M}^\xi$  als  $\mathfrak{M}_\xi$  ein  $\mu$ -System.

Dies folgt aus (1) und 31-5-3.

**33-1-4.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{M}^\xi$  und  $\mathfrak{M}_\xi$  ein Ring.

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion nach 7-4-12. Für  $\xi = 1$  ist die Behauptung richtig nach 3-5-1. Angenommen die Behauptung sei richtig für alle  $\eta < \xi$ . Ist dann  $\xi$  isoliert, so sind nach Annahme  $\mathfrak{M}^{\xi-1}$  und  $\mathfrak{M}_{\xi-1}$  Ringe, also nach 33-1-21 und 3-5-1 auch  $\mathfrak{M}^\xi$  und  $\mathfrak{M}_\xi$ . Sei sodann  $\xi$  Grenzzahl; wegen (1) und 3-5-1 genügt es nachzuweisen, daß dann das System  $\mathfrak{N} = S_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)$  ein Ring ist. Sei also  $A \in \mathfrak{N}$ ,  $B \in \mathfrak{N}$ ; wir haben zu zeigen, daß dann auch  $A + B \in \mathfrak{N}$ ,  $A B \in \mathfrak{N}$ . Wegen  $A \in \mathfrak{N}$ ,  $B \in \mathfrak{N}$  gibt es ein  $\eta' < \xi$  und ein  $\eta'' < \xi$ , so daß  $A \in \mathfrak{M}^{\eta'} + \mathfrak{M}_{\eta'}$ ,  $B \in \mathfrak{M}^{\eta''} + \mathfrak{M}_{\eta''}$ ; da  $\xi$  Grenzzahl, gibt es ein  $\eta < \xi$ , so daß  $\eta > \eta'$ ,  $\eta > \eta''$ ; nach 33-1-1 ist  $A \in \mathfrak{M}^\eta$ ,  $B \in \mathfrak{M}^\eta$ , also, da nach Annahme  $\mathfrak{M}^\eta$  ein Ring, auch  $A + B \in \mathfrak{M}^\eta$ ,  $A B \in \mathfrak{M}^\eta$ ; also ist auch  $A + B \in \mathfrak{N}$ ,  $A B \in \mathfrak{N}$ , w. z. b. w.

**33-1-41.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring und  $\xi$  Grenzzahl, so ist das System (1-11) ein Ring.

Der Beweis wurde soeben geführt.

Bezeichnet  $\omega_1$  die Anfangszahl der Zahlklasse  $Z_1$  (§ 8, 3), so setzen wir unter Beachtung von (1-11):

<sup>1)</sup> Hieraus folgt insbesondere:  $\mathfrak{M}^2 = (\mathfrak{M}_1)^1$ ,  $\mathfrak{M}_2 = (\mathfrak{M}^1)_1$ , in Übereinstimmung mit § 31, 4.

$$(1.2) \quad \mathfrak{M}_B = \bigcup_{\eta < \omega_1} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}^\eta = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}_\eta.$$

**33-1.5.** Bei beliebigem  $\mathfrak{M}$  ist  $\mathfrak{M}_B$  ein  $\sigma$ -System und ein  $\delta$ -System, und mithin ein Ring.

Sei  $A_n \in \mathfrak{M}_B$ , also  $A_n \in \mathfrak{M}^{\eta_n}$  ( $\eta_n < \omega_1$ ). Nach 8-4-1 gibt es ein  $\eta < \omega_1$ , so daß alle  $\eta_n < \eta$ ; nach 33-1.1 ist dann  $A_n \in \mathfrak{M}^\eta \mathfrak{M}_\eta$  für alle  $n$ ; nach 33-1.2 folgt daraus:  $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{M}^\eta$ ,  $\bigcap_n A_n \in \mathfrak{M}_\eta$ , also auch  $\bigcup_n A_n \in \mathfrak{M}_B$ ,  $\bigcap_n A_n \in \mathfrak{M}_B$ , d. h.  $\mathfrak{M}_B$  ist ein  $\sigma$ -System und ein  $\delta$ -System.

**33-1.51.** Für  $\xi \geq \omega_1$  ist  $\mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_B$ .

Nach 33-1.5 und 31-1.1 ist  $(\mathfrak{M}_B)^1 = (\mathfrak{M}_B)_1 = \mathfrak{M}_B$ , also nach (1) und (1-2):  $\mathfrak{M}^{\omega_1} = \mathfrak{M}_{\omega_1} = \mathfrak{M}_B$ . Von hier aus beweist man die Behauptung durch transfinite Induktion nach 7-4-12.

Es kommen also die Borelschen Mengen aller Ordnungen über  $\mathfrak{M}$  bereits unter den Borelschen Mengen von kleinerer als  $\omega_1$ -ter Ordnung vor, d. h.  $\mathfrak{M}_B$  ist das System aller Borelschen Mengen über  $\mathfrak{M}$ ; wir nennen es: das Borelsche System über  $\mathfrak{M}$ .

**33-1.52.**  $\mathfrak{M}_B$  ist das kleinste System über  $\mathfrak{M}$ , das sowohl ein  $\sigma$ -System als auch ein  $\delta$ -System ist.

Wegen 33-1.5 ist nur zu zeigen: Ist  $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ , und ist  $\mathfrak{N}$  sowohl  $\sigma$ -System als  $\delta$ -System (d. h. nach 31-1.1:  $\mathfrak{N}^1 = \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}$ ), so ist  $\mathfrak{M}_B \subseteq \mathfrak{N}$ , d. h.  $\mathfrak{M}^\xi \subseteq \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{M}_\xi \subseteq \mathfrak{N}$  für alle  $\xi$ . Wir zeigen dies durch transfinite Induktion. Die Behauptung ist richtig für  $\xi = 1$ , denn aus  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}$  folgt  $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{N}^1 = \mathfrak{N}$  und ebenso  $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{N}$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ , d. h.  $\mathfrak{M}^\eta \subseteq \mathfrak{N}$ ,  $\mathfrak{M}_\eta \subseteq \mathfrak{N}$  für  $\eta < \xi$ ; dann ist  $\bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) \subseteq \mathfrak{N}$ , also  $\mathfrak{M}^\xi = (\bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^1 \subseteq \mathfrak{N}^1 = \mathfrak{N}$ , somit  $\mathfrak{M}^\xi \subseteq \mathfrak{N}$ , und ebenso  $\mathfrak{M}_\xi \subseteq \mathfrak{N}$ .

Nach 33-1.5 und 33-1.52 ist  $\mathfrak{M}_B$  auch das kleinste System über  $\mathfrak{M}$ , das sowohl ein  $\sigma$ -Ring als auch ein  $\delta$ -Ring ist.

**33-1.521.** Es ist  $(\mathfrak{M}_B)_B = \mathfrak{M}_B$ .

Denn da  $\mathfrak{M}_B$  nach 33-1.5 sowohl ein  $\sigma$ - als ein  $\delta$ -System ist, ist  $\mathfrak{M}_B$  das kleinste System über  $\mathfrak{M}_B$ , das sowohl ein  $\sigma$ - als ein  $\delta$ -System ist, also ist nach 33-1.52  $\mathfrak{M}_B = (\mathfrak{M}_B)_B$ .

**33-1.6.** Ist  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}^1$  und  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}_1$ , so gilt für alle endlichen  $n$ :

$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^{2n-1} = \mathfrak{M}^{2n-1}, \quad (\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_{2n-1} = \mathfrak{M}_{2n-1},$$

$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^{2n} = \mathfrak{M}^{2n}, \quad (\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_{2n} = \mathfrak{M}_{2n}.$$

Für  $n = 1$  gilt nach 31-1.3:  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^1 = \mathfrak{M}^1$ ,  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_1 = \mathfrak{M}_1$ . Daher ist  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^2 = ((\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_1)^1 = (\mathfrak{M}_1)^1 = \mathfrak{M}^2$ , und ebenso  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_2 = \mathfrak{M}_2$ . Daher ist weiter  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^3 = ((\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_2)^1 = (\mathfrak{M}_2)^1 = \mathfrak{M}^3$ , und ebenso  $(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_3 = \mathfrak{M}_3$  usw.



**33-1-61.** Ist  $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}^1$  und  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{N}_1$ , so gilt für  $\xi \geq \omega$ :

$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^\xi = \mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{N}^\xi, \quad (\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_\xi = \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{N}_\xi.$$

Wegen 33-1-1 und 33-1-6 folgt aus (1-11) für  $\xi = \omega$ :

$$S(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^\omega = S(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_\omega = S\mathfrak{M}^\omega = S\mathfrak{M}_\omega = S\mathfrak{N}^\omega = S\mathfrak{N}_\omega,$$

somit nach 33-1-22:

$$(\mathfrak{M} + \mathfrak{N})^\omega = \mathfrak{M}^\omega = \mathfrak{N}^\omega, \quad (\mathfrak{M} + \mathfrak{N})_\omega = \mathfrak{M}_\omega = \mathfrak{N}_\omega.$$

Von da aus beweist man die Behauptung durch transfinite Induktion.

**33-1-7.** Ist  $\mathfrak{N}$  das System der Komplemente der Mengen aus  $\mathfrak{M}$  zu  $E$ , so ist  $\mathfrak{N}_\xi$  das System der Komplemente der Mengen aus  $\mathfrak{M}^\xi$  zu  $E$ .

Für  $\xi = 1$  ist die Behauptung richtig nach 31-1-4; von da aus beweist man sie durch transfinite Induktion.

**33-1-71.** Gilt neben  $M \varepsilon \mathfrak{M}$  auch  $E - M \varepsilon \mathfrak{M}$ , so ist  $\mathfrak{M}_\xi$  das System der Komplemente der Mengen aus  $\mathfrak{M}^\xi$  zu  $E$ .

Dies folgt aus 33-1-7 für  $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}$ .

Literatur: É. Borel, Leçons sur la théorie des fonctions (Paris 1898) S. 46; F. Hausdorff, Mengenlehre S. 82.

**2. Ambige Borelsche Mengen.** In Analogie zur Definition von  $\mathfrak{M}_1^1$  (§ 31, 5) setzen wir nun  $\mathfrak{M}_\xi^\xi = \mathfrak{M}^\xi \cdot \mathfrak{M}_\xi$ . Die Mengen aus  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  heißen die ambigen Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung über  $\mathfrak{M}$ .

**33-2-1.** Für  $\xi < \xi'$  ist  $\mathfrak{M}^\xi + \mathfrak{M}_\xi \subseteq \mathfrak{M}_\xi^{\xi'}$ ,  $\mathfrak{M}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{M}_\xi^{\xi'}$ .

Dies folgt unmittelbar aus 33-1-1.

**33-2-11.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{M}^\xi$ ,  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{M}_\xi$ .

Dies folgt wegen (1) aus 31-5-5, indem man dort  $\mathfrak{M}$  ersetzt durch  $S(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)$ .

**33-2-12.** Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $S\mathfrak{M}_\eta^\eta = S(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta)$ .

Dies folgt aus der Definition von  $\mathfrak{M}_\eta^\eta$  nach 33-2-1.

**33-2-13.** Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $\mathfrak{M}_\xi^\xi = (S\mathfrak{M}_\eta^\eta)_1$ .

Nach 33-2-12 ist:

$$(S\mathfrak{M}_\eta^\eta)_1 = (S(\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))_1 = \mathfrak{M}^\xi \cdot \mathfrak{M}_\xi = \mathfrak{M}_\xi^\xi.$$

**33-2-2.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  ein  $\mu$ -System.

Dies folgt wegen 31-5-2 aus 33-1-3.

**33-2-3.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  ein Ring.

Dies folgt aus 33-1-4.

**33-2-4.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$ :  $\mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1} = (\mathfrak{M}_\xi^\xi)^*$ .

Nach 33.2.3 ist  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  ein Ring, also nach 31.6.1  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^* = (\mathfrak{M}_\xi^\xi)^2 (\mathfrak{M}_\xi^\xi)_2$ ; hierin ist nach 33.2.11  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^2 = (\mathfrak{M}_\xi^\xi)_1 = (\mathfrak{M}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{M}_\xi^{\xi+1}$ , und ebenso  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_2 = \mathfrak{M}_{\xi+1}$ ; also ist  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^* = \mathfrak{M}_\xi^{\xi+1} \mathfrak{M}_{\xi+1} = \mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1}$ .

**33.2.5.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  ein Körper.

Für  $\xi = 1$  ist die Behauptung richtig nach 31.5.11. Angenommen, sie sei richtig, für alle  $\eta < \xi$ . Ist dann  $\xi$  isoliert, so ist nach Annahme  $\mathfrak{M}_{\xi-1}^{\xi-1}$  ein Körper, also nach 33.2.4 und 31.6.21 auch  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$ . Sei sodann  $\xi$  eine Grenzzahl; wegen 33.2.13 und 31.5.11 genügt es, nachzuweisen, daß dann das System  $\mathfrak{N} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_\eta^\eta$  ein Körper ist. Da  $\mathfrak{N}$  nach 33.2.12 und 33.1.41 ein Ring ist, ist nur zu zeigen: aus  $A \in \mathfrak{N}$  und  $B \in \mathfrak{N}$  folgt  $A - B \in \mathfrak{N}$ . Wegen  $A \in \mathfrak{N}$ ,  $B \in \mathfrak{N}$  gibt es ein  $\eta' < \xi$  und ein  $\eta'' < \xi$ , so daß  $A \in \mathfrak{M}_{\eta'}^{\eta'}$ ,  $B \in \mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$ ; ist etwa  $\eta'' \geq \eta'$ , so ist  $A \in \mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$ ,  $B \in \mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$ , also, da nach Annahme  $\mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$  ein Körper, auch  $A - B \in \mathfrak{M}_{\eta''}^{\eta''}$ , also auch  $A - B \in \mathfrak{N}$ , w. z. b. w.

**33.2.51.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so ist für jedes  $\xi > 1$  auch  $\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_\eta^\eta$  ein Körper. Der Beweis wurde soeben geführt.

**33.2.6.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Körper, so ist  $\mathfrak{M}_B$  der kleinste  $\sigma$ -Körper über  $\mathfrak{M}$ .

Nach (1.2) und 33.2.12 ist  $\mathfrak{M}_B = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}_\eta^\eta$ , also ist  $\mathfrak{M}_B$  nach 33.2.51 ein Körper. Und da nach 3.6.1 jeder  $\sigma$ -Körper auch ein  $\delta$ -System ist, folgt aus 33.1.52, daß  $\mathfrak{M}_B$  der kleinste  $\sigma$ -Körper über  $\mathfrak{M}$  ist.

Man erhält also zu einem beliebigen Mengensysteme  $\mathfrak{M}$  den kleinsten  $\sigma$ -Körper über  $\mathfrak{M}$ , indem man zunächst den kleinsten Körper  $\mathfrak{M}_k$  über  $\mathfrak{M}$ , und dann  $(\mathfrak{M}_k)_B$  bildet.

**33.2.61.** Damit  $\mathfrak{M}_B$  der kleinste  $\sigma$ -Körper über  $\mathfrak{M}$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß aus  $A \in \mathfrak{M}$ ,  $B \in \mathfrak{M}$  folge  $A - B \in \mathfrak{M}_B$ .

Notwendig: Dies folgt aus  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_B$ . Hinreichend: Ist  $\mathfrak{M}_k$  der kleinste Körper über  $\mathfrak{M}$ , so genügt es, zu zeigen, daß  $\mathfrak{M}_k \subseteq \mathfrak{M}_B$ , denn aus  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_k \subseteq \mathfrak{M}_B$  folgt:  $\mathfrak{M}_B \subseteq (\mathfrak{M}_k)_B \subseteq (\mathfrak{M}_B)_B$ , also wegen 33.1.521:  $(\mathfrak{M}_k)_B = \mathfrak{M}_B$ , und, wie wir eben sahen, ist  $(\mathfrak{M}_k)_B$  der kleinste  $\sigma$ -Körper über  $\mathfrak{M}$ . Nach § 3, 3 ist jede Menge aus  $\mathfrak{M}_k$  Summe endlich vieler Mengen der Gestalt:  $C = A_1 A_2 \dots A_m (E - B_1) (E - B_2) \dots (E - B_n)$ , wo  $A_i \in \mathfrak{M}$ ,  $B_j \in \mathfrak{M}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) und  $m > 0$ . Nach 33.1.5 genügt es also zu zeigen:  $C \in \mathfrak{M}_B$ . Nun kann man schreiben:  $C = (A_1 - B_1) (A_1 - B_2) \dots (A_1 - B_n) A_2 \dots A_m$ . Nach Voraussetzung ist hierin  $A_1 - B_j \in \mathfrak{M}_B$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ); wegen  $A_i \in \mathfrak{M}_B$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) ist also nach 33.1.5 auch  $C \in \mathfrak{M}_B$ , w. z. b. w.

**33.2.7.** Gilt neben  $M \in \mathfrak{M}$  auch  $E - M \in \mathfrak{M}$ , und ist  $A \in \mathfrak{M}_\xi^\xi$  (bzw.  $A \in \mathfrak{M}_\xi$ ), so ist, damit  $A \in \mathfrak{M}_\xi^\xi$  sei, notwendig und hinreichend, daß auch  $E - A \in \mathfrak{M}_\xi^\xi$  (bzw.  $E - A \in \mathfrak{M}_\xi$ ) sei.

Dies folgt aus 33.1.71.

Wir setzen nun  $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}^*$  und definieren für  $\xi > 1$  durch Induktion:  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)})^*$ ; da für  $\xi < \xi'$  offenbar  $\mathfrak{M}^{(\xi)} \subseteq \mathfrak{M}^{(\xi')}$ , ist für isolierte  $\xi > 1$ :  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\mathfrak{M}^{(\xi-1)})^*$ . Wir setzen ferner  $\mathfrak{M}_{B^*} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}^{(\eta)}$ .

**33-2-8.**  $\mathfrak{M}_{B^*}$  ist das kleinste  $\lambda$ -System über  $\mathfrak{M}$ .

Sei  $A = \lim_n A_n$  und  $A_n \in \mathfrak{M}_{B^*}$ , also  $A_n \in \mathfrak{M}^{(\eta_n)}$  ( $\eta_n < \omega_1$ ); nach 8-4-1 gibt es ein  $\xi < \omega_1$ , so daß alle  $\eta_n < \xi$ ; dann ist  $A \in (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)})^*$ , also  $A \in \mathfrak{M}^{(\xi)}$  ( $\xi < \omega_1$ ), also  $A \in \mathfrak{M}_{B^*}$ ; aus  $A = \lim_n A_n$ ,  $A_n \in \mathfrak{M}_{B^*}$  folgt also  $A \in \mathfrak{M}_{B^*}$ , d. h.  $\mathfrak{M}_{B^*}$  ist ein  $\lambda$ -System. Sei sodann  $\mathfrak{N}$  ein  $\lambda$ -System über  $\mathfrak{M}$ ; dann ist  $\mathfrak{M}^{(1)} \subseteq \mathfrak{N}$ ; angenommen, es sei  $\mathfrak{M}^{(\eta)} \subseteq \mathfrak{N}$  für  $\eta < \xi$ , so ist auch  $\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)} \subseteq \mathfrak{N}$ , also, weil  $\mathfrak{N}$  ein  $\lambda$ -System, auch  $(\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)})^* = \mathfrak{M}^{(\xi)} \subseteq \mathfrak{N}$ ; nach 7-4-12 ist also  $\mathfrak{M}^{(\xi)} \subseteq \mathfrak{N}$  für alle  $\xi$ , also  $\mathfrak{M}_{B^*} \subseteq \mathfrak{N}$ ; also ist  $\mathfrak{M}_{B^*}$  das kleinste  $\lambda$ -System über  $\mathfrak{M}$ .

**33-2-81.** Für  $\xi \geq \omega_1$  ist  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = \mathfrak{M}_{B^*}$ .

Nach Definition ist  $\mathfrak{M}^{(\omega_1)} = (\bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}^{(\eta)})^* = (\mathfrak{M}_{B^*})^*$ , also, da nach 33-2-8  $\mathfrak{M}_{B^*}$  ein  $\lambda$ -System:  $\mathfrak{M}^{(\omega_1)} = \mathfrak{M}_{B^*}$ . Von hier aus schließt man weiter durch transfinite Induktion.

**33-2-9.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = \mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1}$ .

Die Behauptung ist nach 31-6-1 richtig für  $\xi = 1$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; ist dann  $\xi$  isoliert, so ist  $\mathfrak{M}^{(\xi-1)} = \mathfrak{M}_{\xi}^{\xi}$ , also  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\mathfrak{M}^{(\xi-1)})^* = (\mathfrak{M}_{\xi}^{\xi})^* = \mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1}$  nach 33-2-4; ist hingegen  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)})^*$ ; hierin ist nach 33-2-12  $\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_{\eta+1}^{\eta+1} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_{\eta}^{\eta} = \mathfrak{M}_{\xi}^{\xi}$ , also nach 33-1-41 ein Ring; also nach 31-6-3 und 33-2-13  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}^{(\eta)})^* = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_{\eta}^{\eta})^* = ((\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{M}_{\eta+1}^{\eta+1}))^* = (\mathfrak{M}_{\xi}^{\xi})^*$ , also nach 33-2-4 wieder  $\mathfrak{M}^{(\xi)} = \mathfrak{M}_{\xi+1}^{\xi+1}$ .

**33-2-91.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{M}_{B^*} = \mathfrak{M}_B$ .

Denn nach 33-2-9 ist  $\mathfrak{M}_{B^*} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}^{(\eta)} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}_{\eta+1}^{\eta+1} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{M}_{\eta}^{\eta}$ , also nach 33-2-12  $\mathfrak{M}_{B^*} = \bigcup_{\eta < \omega_1} (\mathfrak{M}_{\eta}^{\eta} + \mathfrak{M}_{\eta}) = \mathfrak{M}_B$ .

Literatur: Der Begriff der ambigen Borelschen Menge stammt von Ch. J. de la Vallée-Poussin, *Intégrales de Lebesgue, fonctions d'ensemble, classes de Baire*, S. 135. Zu Satz 33-2-61: W. Sierpiński, *Ann. soc. math. Pol.* 6 (1927) S. 50.

**3. Einschiebung, Erweiterung.** In Verallgemeinerung der Einschiebungssätze von § 32, 1 beweisen wir:

**33-3-1.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $B \in \mathfrak{M}_{\xi}$ ,  $C \in \mathfrak{M}^{\xi}$  und  $B \subseteq C$ , so gibt es ein  $A \in \mathfrak{M}_{\xi}^{\xi}$ , so daß  $B \subseteq A \subseteq C$ .

Nach 33.2.3 ist  $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  ein Ring und nach 33.2.2 ein  $\mu$ -System; nach 33.2.11 ist  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{M}^\xi$ ,  $(\mathfrak{M}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{M}_\xi$ ; die Behauptung folgt also aus 32.1.11.

**33.3.2.** Ist  $E' \subseteq E$ , so ist  $(E' \cap \mathfrak{M})^\xi = E' \cap \mathfrak{M}^\xi$ ,  $(E' \cap \mathfrak{M})_\xi = E' \cap \mathfrak{M}_\xi$ .

Die Behauptung ist richtig für  $\xi = 1$  nach 32.3.2. Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; dann ist unter Benützung von 32.3.2  $E' \cap \mathfrak{M}^\xi = E' \cap (S_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^\xi = (E' \cap S_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta))^\xi = (S_{\eta < \xi} (E' \cap \mathfrak{M}^\eta + E' \cap \mathfrak{M}_\eta))^\xi$ , also nach Annahme:  $E' \cap \mathfrak{M}^\xi = (S_{\eta < \xi} ((E' \cap \mathfrak{M})^\eta + (E' \cap \mathfrak{M})_\eta))^\xi$ , d. h.  $E' \cap \mathfrak{M}^\xi = (E' \cap \mathfrak{M})^\xi$ .

**33.3.3.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring,  $E' \in \mathfrak{M}_\xi$ , so ist  $(E' \cap \mathfrak{M})_\xi^\xi = E' \cap \mathfrak{M}_\xi^\xi$ .

Der Beweis ist, unter Berufung auf 33.3.2 und 33.3.1, völlig analog dem von 32.3.3.

**4. Die Borelschen Mengen eines metrischen Raumes.** Sei nun insbesondere  $E$  ein metrischer Raum,  $\mathfrak{F}$  das System der in  $E$  abgeschlossenen,  $\mathfrak{G}$  das System der in  $E$  offenen Mengen. Wir bezeichnen dann die Borelschen Mengen über  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$  als die Borelschen Mengen in  $E$ , die Mengen aus  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\xi$  und  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi$  als die Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ , die Mengen aus  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi^\xi$  als die ambigen Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ . Wir setzen noch (für  $\xi \geq 1$ ):

$$(4) \quad \mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{F}, \quad \mathfrak{B}^{1+\xi} = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\xi, \quad \mathfrak{B}_{1+\xi} = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi;$$

$$(4.1) \quad \mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{B}^\xi \cdot \mathfrak{B}_\xi.$$

Da die Mengen  $\mathfrak{A}$  und  $E$  zu  $\mathfrak{F}$  und  $\mathfrak{G}$  gehören, so auch (für jedes  $\xi$ ) zu  $\mathfrak{B}^\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ .

Die Mengen aus  $\mathfrak{B}^\xi$  (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ) bezeichnen wir auch als  $\mathfrak{B}^\xi$ -Mengen (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Mengen).

**33.4.1.** Für jedes endliche  $n \geq 1$  gilt (wenn  $\mathfrak{G}^0 = \mathfrak{G}$ ,  $\mathfrak{F}_0 = \mathfrak{F}$  gesetzt wird):

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}^{2n-1} &= \mathfrak{G}^{2n-1} = \mathfrak{G}^{2n-2}, \quad \mathfrak{B}_{2n-1} = \mathfrak{F}_{2n-1} = \mathfrak{F}_{2n-2}; \\ \mathfrak{B}^{2n} &= \mathfrak{F}^{2n} = \mathfrak{F}^{2n-1}, \quad \mathfrak{B}_{2n} = \mathfrak{G}_{2n} = \mathfrak{G}_{2n-1}. \end{aligned}$$

Da nach 10.1.2  $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$ , ist auch  $\mathfrak{G}_2 = \mathfrak{G}_1$ ,  $\mathfrak{G}^3 = \mathfrak{G}^2$  usf.; und da nach 10.2.2  $\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}$ , ist auch  $\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}^1$ ,  $\mathfrak{F}_3 = \mathfrak{F}_2$  usf. Da nach 10.7.41  $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}^1$ ,  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{G}_1$ , folgt nun die Behauptung aus 33.1.6.

**33.4.11.** Für  $\xi \geq \omega$  ist  $\mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{G}^\xi = \mathfrak{F}^\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{G}_\xi = \mathfrak{F}_\xi$ .

Für  $\xi \geq \omega$  ist (§ 6, 3)  $1 + \xi = \xi$ ; die Behauptung folgt also wegen 10.7.41 aus 33.1.61.

Es ist also  $\mathfrak{B}^1$  das System der offenen,  $\mathfrak{B}_1$  das der abgeschlossenen Mengen des Raumes  $E$ ,  $\mathfrak{B}^2$  das System der  $F_\sigma$ ,  $\mathfrak{B}_2$  das der  $G_\delta$  usf.;  $\mathfrak{B}_1^\xi$  besteht aus den

Mengen, die zugleich offen und abgeschlossen sind (also, wenn  $E$  zusammenhängend, nur aus den Mengen  $A$  und  $E$ ),  $\mathfrak{B}_2^2$  ist das System der Mengen, die zugleich  $F_\sigma$  und  $G_\delta$  sind usw.

**33-4-2.** Es ist  $\mathfrak{B}_\xi$  das System der Komplemente der Mengen aus  $\mathfrak{B}^\xi$  zu  $E$ .

Da die abgeschlossenen Mengen die Komplemente der offenen sind, ist neben  $M \varepsilon \mathfrak{F} + \mathfrak{G}$  auch  $E - M \varepsilon \mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ , und die Behauptung folgt aus 33-1-71.

**33-4-21.** Ist  $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$ , so auch  $E - A$ .

Dies folgt aus 33-4-2.

Aus 33-1-1 und 33-2-1 entnehmen wir, daß für  $\xi < \xi'$ :

$$(4-2) \quad \mathfrak{B}_\xi^\xi + \mathfrak{B}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{B}^{\xi'}, \quad \mathfrak{B}_\xi^\xi + \mathfrak{B}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{B}_{\xi'}^\xi, \quad \mathfrak{B}_\xi^\xi + \mathfrak{B}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{B}_{\xi'}^{\xi'}, \quad \mathfrak{B}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{B}_{\xi'}^{\xi'}.$$

Aus 33-1-11, 33-2-12 entnehmen wir: für jede Grenzzahl  $\xi$  ist:

$$(4-21) \quad S_{\eta < \xi} (\mathfrak{B}^\eta + \mathfrak{B}_\eta) = S_{\eta < \xi} \mathfrak{B}^\eta = S_{\eta < \xi} \mathfrak{B}_\eta = S_{\eta < \xi} \mathfrak{B}_\eta^\eta.$$

Aus 33-1-2, 33-1-21, 33-2-11 entnehmen wir:

$$(4-3) \quad (\mathfrak{B}^\xi)^1 = \mathfrak{B}^\xi, \quad (\mathfrak{B}_\xi)_1 = \mathfrak{B}_\xi, \quad (\mathfrak{B}^\xi)_1 = \mathfrak{B}_{\xi+1}, \quad (\mathfrak{B}_\xi)^1 = \mathfrak{B}^{\xi+1},$$

und für  $\xi > 1$ :

$$(4-31) \quad (\mathfrak{B}_\xi^1)^1 = \mathfrak{B}_\xi^1, \quad (\mathfrak{B}_\xi^1)_1 = \mathfrak{B}_\xi^1.$$

**33-4-3.** Für jedes  $\xi \geq 1$  sind  $\mathfrak{B}^\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi \mu$ -Systeme.

Für  $\xi > 1$  folgt dies aus 33-1-3, 33-2-2. Für  $\xi = 1$  ist  $\mathfrak{B}^1 = \mathfrak{G}$ , und wegen  $\mathfrak{G}^1 = \mathfrak{G}$  auch  $\mathfrak{G}_1^1 = \mathfrak{G}$ , d. h.  $\mathfrak{B}^1$  ist ein  $\mu$ -System; analog auch  $\mathfrak{B}_1$ , und somit auch  $\mathfrak{B}_1^1$ .

**33-4-31.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist sowohl  $\mathfrak{B}^\xi$  als  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$  und, wenn  $\xi$  Grenzzahl ist, auch das System (4-21) ein Ring.

Dies folgt, da nach 10-1-21 und 10-2-21 sowohl  $\mathfrak{F}$  als  $\mathfrak{G}$  ein Ring, wegen 33-1-4, 33-1-41 aus 33-4-1, 33-4-11.

**33-4-32.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$  und, wenn  $\xi$  Grenzzahl ist, auch das System (4-21) ein Körper.

Nach 33-4-31 ist  $\mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{B}^\xi \mathfrak{B}_\xi^\xi$  ein Ring; und da wegen  $E \varepsilon \mathfrak{F} \mathfrak{G}$  auch  $E \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^\xi$ , folgt die Behauptung nach 3-3-1 aus 33-4-21.

In Ergänzung zu (4) erkennen wir nun:

**33-4-33.** Bedeutet  $\mathfrak{R}$  den kleinsten Ring über  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ , so ist (für  $\xi \geq 1$ ):

$$\mathfrak{R}^{1+\xi} = \mathfrak{R}^\xi, \quad \mathfrak{R}_{1+\xi} = \mathfrak{R}_\xi, \quad \mathfrak{R}_{1+\xi}^{1+\xi} = \mathfrak{R}_\xi^\xi.$$

Wegen (4) genügt es, zu zeigen:  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\xi = \mathfrak{R}^\xi$ ,  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_\xi = \mathfrak{R}_\xi$ . Da nach 33-4-31  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1 = \mathfrak{B}^2$  ein Ring, ist  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{R} \subseteq (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1$ , also auch  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1 \subseteq \mathfrak{R}^1 \subseteq ((\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1)^1$ , also nach 31-1-2:  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^1 = \mathfrak{R}^1$ . Ebenso zeigt man:  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_1 = \mathfrak{R}_1$ . Von da aus beweist man die Behauptung durch transfinite Induktion.

Ist  $\xi > 1$ , so können wir schreiben  $\xi = 1 + \eta$  ( $\eta \geq 1$ ), und erhalten aus 33.2.4:  $(\mathfrak{R}_\eta^*)^* = \mathfrak{R}_{\eta+1}^{\eta+1}$ ; also gilt für  $\xi > 1$ :

$$(4.32) \quad (\mathfrak{B}_\xi^*)^* = \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi+1}.$$

Setzen wir (unter Berufung auf (4.21)):

$$(4.4) \quad \mathfrak{B}_B = \bigcup_{\eta < \omega_1} (\mathfrak{B}^\eta + \mathfrak{B}_\eta) = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{B}^\eta = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{B}_\eta = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{B}_\eta^\eta,$$

so ist (bei Beachtung von 33.4.11):

$$(4.41) \quad \mathfrak{B}_B = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_B = \mathfrak{F}_B = \mathfrak{G}_B,$$

und aus 33.1.51 entnehmen wir:

$$(4.42) \quad \mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{B}_B \text{ für } \xi \geq \omega_1,$$

was auch so ausgesprochen werden kann:

**33.4.4.**  $\mathfrak{B}_B$  ist das System aller Borelschen Mengen in  $E$ .

**33.4.41.**  $\mathfrak{B}_B$  ist das kleinste System, das alle in  $E$  abgeschlossenen (oder offenen) Mengen enthält, und sowohl ein  $\sigma$ - als ein  $\delta$ -System ist.

Wegen (4.41) folgt dies aus 33.1.52.

**33.4.42.**  $\mathfrak{B}_B$  ist der kleinste  $\sigma$ -Körper, der alle in  $E$  abgeschlossenen (oder offenen) Mengen enthält.

Der Beweis ist (unter Berufung auf 33.4.32) analog dem von 33.2.6.

**33.4.43.**  $\mathfrak{B}_B$  ist das kleinste  $\lambda$ -System, das alle in  $E$  abgeschlossenen (oder offenen) Mengen enthält.

Dies folgt wegen (4.41) aus 33.2.91 und 33.2.8.

**33.4.5.** Jede abzählbare Menge  $A \subseteq E$  ist eine  $\mathfrak{B}^2$ -Menge.

Denn jede abzählbare Punktmenge ist ein  $F_\sigma$ .

**33.4.51.** Ist  $\xi \geq 3$  und  $A \in \mathfrak{B}^\xi$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi$ ,  $A \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$ ), so ist, wenn  $A'$ ,  $A''$  abzählbar, auch  $(A - A') + A'' \in \mathfrak{B}^\xi$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi$ , bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi$ ).

Nach 33.4.5 ist  $A' \in \mathfrak{B}^2$ ,  $A'' \in \mathfrak{B}^2$ , somit nach 33.4.2  $(E - A') \in \mathfrak{B}_2$ , also nach (4.2)  $A'' \in \mathfrak{B}^\xi$ ,  $E - A' \in \mathfrak{B}^\xi$ , also, wenn  $A \in \mathfrak{B}^\xi$ , nach 33.4.31 auch  $(A - A') + A'' = A(E - A') + A'' \in \mathfrak{B}^\xi$ .

**33.4.6.** Ist  $\xi \geq 2$ ,  $B \in \mathfrak{B}_\xi$ ,  $C \in \mathfrak{B}^\xi$  und  $B \subseteq C$ , so gibt es ein  $A \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$ , so daß  $B \subseteq A \subseteq C$ .

Wegen  $\xi \geq 2$  hat  $\xi$  die Gestalt  $\xi = 1 + \eta$ , also ist nach 33.4.33:  $\mathfrak{B}^\xi = \mathfrak{R}^\eta$ ,  $\mathfrak{B}_\xi = \mathfrak{R}_\eta$ ,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi = \mathfrak{R}_\eta^\eta$ , und die Behauptung folgt aus 33.3.1.

Wir nennen zwei Mengen  $M$ ,  $M'$   $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -trennbar, wenn es zwei fremde Mengen  $A \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$ ,  $A' \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$  gibt, so daß  $M \subseteq A$ ,  $M' \subseteq A'$ . Wegen 33.4.21 ist dies gleichbedeutend mit: es gibt ein  $A' \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$ , so daß  $M \subseteq A$ ,  $M' \subseteq E - A$ . Die Mengen  $M_1, M_2, \dots, M_n$  heißen  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -trennbar, wenn es disjunkte Mengen  $A_i \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$  gibt, so daß  $M_i \subseteq A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

**33-4-61.** Je zwei fremde  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen  $B, B'$  ( $\xi \geq 2$ ) sind  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbar.

Nach 33-4-2 ist  $E - B' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ ; wegen  $B \subseteq E - B'$  gibt es nach 33-4-6 ein  $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ , so daß  $B \subseteq A \subseteq E - B'$ ; dann ist  $B \subseteq A, B' \subseteq E - A$ .

**33-4-611.** Sind  $B_1, B_2, \dots, B_n$  fremde  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen ( $\xi \geq 2$ ), so sind sie  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbar.

Nach 33-4-61 gibt es zwei fremde  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -Mengen  $A_{ij}, A_{ji}$ , so daß  $B_i \subseteq A_{ij}, B_j \subseteq A_{ji}$ . Bezeichnen wir mit  $A_i$  den Durchschnitt der  $n-1$  Mengen  $A_{ij}$ , ( $j = 1, 2, \dots, n, j \neq i$ ), so sind die Mengen  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) disjunkt, es ist  $B_i \subseteq A_i$  und nach 33-4-32 ist  $A_i \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ .

Wir werden in Nr. 8 ein Beispiel fremder  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -Mengen angeben, die nicht  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbar sind.

Nennen wir zwei Mengen  $M, M'$   $\mathfrak{B}_\xi$ -trennbar (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbar), wenn es zwei fremde Mengen  $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi, A' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$  (bzw.  $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t, A' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ ) gibt, so daß  $M \subseteq A, M' \subseteq A'$ , so folgt aus 33-4-61, daß (für  $\xi \geq 2$ ) die Begriffe „ $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbar“ und „ $\mathfrak{B}_\xi$ -trennbar“ gleichbedeutend sind. Hingegen liefert jedes Paar fremder, nicht  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbarer  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen ein Beispiel  $\mathfrak{B}_\xi$ -trennbarer, aber nicht  $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbarer Mengen. Wegen einer späteren Anwendung führen wir den Satz an:

**33-4-62.** Ist  $B \varepsilon \mathfrak{B}_\xi, B' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi$ , so sind  $B - B'$  und  $B' - B$   $\mathfrak{B}_\xi^t$ -trennbar.

Sei zunächst  $\xi = 1$ , also  $B$  und  $B'$  abgeschlossen; dann ist  $(B - B')^0 \subseteq B^0 = B$ , also  $(B - B')^0 (B' - B) = A$ , und ebenso  $(B' - B)^0 (B - B') = A$ ;  $B - B'$  und  $B' - B$  sind also abgesondert, und die Behauptung folgt aus 14-2-4. — Sei sodann  $\xi \geq 2$ ; nach (4-31) ist  $B = \bigcup_n B_n, B' = \bigcup_n B'_n$  mit  $B_n \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t, B'_n \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ , wobei nach 3-2-11 angenommen werden kann  $B_n \supseteq B_{n-1}, B'_n \supseteq B'_{n-1}$ . Wir setzen  $A = \bigcup_n (B_n B'_{n-1} - B'_n), A' = \bigcup_n (B'_n B_{n-1} - B_n) (B_0 = B'_0 = E)$ ; nach 33-4-32 ist  $B_n B'_{n-1} - B'_n \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ , also nach (4-31):  $A \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ , ebenso  $A' \varepsilon \mathfrak{B}_\xi^t$ ; offenbar ist  $A A' = A$ ; bleibt nur zu zeigen, daß  $B - B' \subseteq A, B' - B \subseteq A'$ . Ist  $b \varepsilon B - B'$ , so ist  $b \varepsilon B_n$  für alle  $n$ , und es gibt ein  $n^*$ , so daß  $b \varepsilon B'_{n^*-1}, b \sim \varepsilon B'_{n^*}$ ; dann ist  $b \varepsilon B_{n^*} B'_{n^*-1} - B'_{n^*}$ , also  $b \varepsilon A$ ; also ist  $B - B' \subseteq A$ ; ebenso zeigt man, daß  $B' - B \subseteq A'$ .

Ist es erforderlich, den bei Bildung der Systeme  $\mathfrak{B}_\xi^t, \mathfrak{B}_\xi, \mathfrak{B}_\xi^t, \mathfrak{B}_B$  zugrunde gelegten Raum  $E$  in Evidenz zu setzen, so schreiben wir ausführlicher  $\mathfrak{B}_\xi^t(E), \mathfrak{B}_\xi(E), \mathfrak{B}_\xi^t(E), \mathfrak{B}_B(E)$ .

**33-4-7.** Ist  $E' \subseteq E$ , so ist  $\mathfrak{B}_\xi^t(E') = E' \cap \mathfrak{B}_\xi^t(E), \mathfrak{B}_\xi(E') = E' \cap \mathfrak{B}_\xi(E), \mathfrak{B}_B(E') = E' \cap \mathfrak{B}_B(E)$ .

Für  $\xi = 1$  reduziert sich die Behauptung auf 10-8-1. Sei also  $\xi > 1$ , d. h.  $\xi = 1 + \eta$ ; bezeichnet  $\mathfrak{F}$  bzw.  $\mathfrak{G}$  das System der in  $E$  abgeschlossenen bzw. offenen Mengen,  $\mathfrak{F}'$  bzw.  $\mathfrak{G}'$  das System der in  $E'$  abgeschlossenen bzw. offenen Mengen, so ist  $\mathfrak{B}^{1+\eta}(E) = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})^\eta, \mathfrak{B}^{1+\eta}(E') = (\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}')^\eta$ ;

nach 10-8-1 ist  $\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}' = E' \cap (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})$ , die Behauptung folgt also für  $\xi > 1$  aus 33-3-2.

**33-4-71.** Ist  $\xi \geq 2$  und  $E' \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , so ist  $\mathfrak{B}_\xi(E') = E' \cap \mathfrak{B}_\xi(E)$ .

Wir setzen wieder  $\xi = 1 + \eta$  und bezeichnen mit  $\mathfrak{F}, \mathfrak{F}'$  das System der in  $E$ , bzw. in  $E'$  abgeschlossenen, mit  $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$  das System der in  $E$ , bzw. in  $E'$  offenen Mengen, ferner mit  $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}'$  den kleinsten Ring über  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G}$ , bzw. über  $\mathfrak{F}' + \mathfrak{G}'$ ; dann ist nach 32-3-1:  $\mathfrak{R}' = E' \cap \mathfrak{R}$ ; nach 33-4-33 ist:  $\mathfrak{B}_\xi(E) = \mathfrak{R}_\eta, \mathfrak{B}_\xi(E') = \mathfrak{R}'_\eta, \mathfrak{B}_\xi(E') = (E' \cap \mathfrak{R})'_\eta$ ; also folgt die Behauptung aus 33-3-3.

**33-4-72.** Ist  $A \subseteq E' \subseteq E$  und  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ ,  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$ ,  $A \in \mathfrak{B}_B(E)$ ), so ist auch  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E')$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$ ,  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$ ,  $A \in \mathfrak{B}_B(E')$ ).

Dies folgt unmittelbar aus 33-4-7.

**33-4-73.** Ist  $A \subseteq E' \subseteq E$  und  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E')$ ,  $E' \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$ ,  $E' \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$ ,  $E' \in \mathfrak{B}_B(E)$ ), so ist auch  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}_B(E)$ ).

Nach 33-4-7 ist  $A = E' \cap A'$  mit  $A' \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ ; da auch  $E' \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  und  $\mathfrak{B}^\xi(E)$  nach 33-4-31 ein Ring, ist auch  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ .

Literatur: Wie zu Nr. 1; ferner W. Sierpiński, Fund. math. 10 (1927) S. 320. Die Sätze 33-4-61, 33-4-611, 33-4-62 stammen von N. Lusin, Leçons sur les ensembles analytiques (Paris 1930) S. 66ff., Fund. math. 16 (1930) S. 66.

**5. Absolut Borelsche Mengen.** Ist  $A \subseteq E' \subseteq E$  und ist  $A$  eine Borelsche Menge in  $E$ , so ist nach 33-4-72  $A$  auch eine Borelsche Menge in  $E'$ ; selbstverständlich kann aber  $A$  eine Borelsche Menge in  $E'$  sein, ohne eine Borelsche Menge in  $E$  zu sein; z. B. ist  $E'$  stets eine Borelsche Menge in  $E'$ , nicht aber notwendigerweise auch in  $E$ . Hingegen gilt:

**33-5-1.** Ist  $E'$  vollständig,  $A \subseteq E'$ ,  $A \subseteq E$  und  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$  ( $\xi \geq 1$ ), bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E')$  ( $\xi \geq 2$ ), bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$  ( $\xi \geq 2$ ), bzw.  $A \in \mathfrak{B}_B(E')$ , so ist auch  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}_B(E)$ .

Sei  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E')$  ( $\xi \geq 1$ ), bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E')$  ( $\xi \geq 2$ ). Nach 18-4-6 gibt es einen vollständigen Raum  $\bar{E} \supseteq E$ ; nach 33-4-72 genügt es zu zeigen:  $A \in \mathfrak{B}_\xi(\bar{E})$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(\bar{E})$ ; wir können also von vornherein annehmen,  $E$  sei vollständig. Die abgeschlossene Hülle von  $A$  in  $E$ , bzw. in  $E'$  bezeichnen wir mit  $A^0$ , bzw. mit  $A'$ ; nach 18-4-71 sind  $A^0$  und  $A'$  isometrisch. Nach 33-4-72 ist  $A \in \mathfrak{B}_\xi(A')$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(A')$ , also, da  $A'$  und  $A^0$  isometrisch, auch  $A \in \mathfrak{B}_\xi(A^0)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(A^0)$ . Da  $A^0$  abgeschlossen in  $E$ , ist  $A^0 \in \mathfrak{B}_\xi(E)$  für  $\xi \geq 1$ , bzw.  $A^0 \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  für  $\xi \geq 2$ , daher nach 33-4-73:  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$ , bzw.  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ , w. z. b. w.



Ist also  $A$  eine Borelsche Menge, eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge ( $\xi \geq 1$ ), eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge ( $\xi \geq 2$ ), eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge ( $\xi \geq 2$ ) in einem vollständigen Raume  $E'$ , so auch in jedem Raume  $E \supseteq A$ ; wir nennen deshalb eine solche Menge eine absolut Borelsche Menge (bzw. eine absolute  $\mathfrak{B}_\xi$ -,  $\mathfrak{B}^\xi$ -,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge). Spezialfälle haben wir schon in § 18, 5 und § 19, 1 kennen gelernt.

**33-5-2.** Ist  $B$  eine absolut Borelsche Menge und  $A$  eine Borelsche Menge in  $B$ , so ist auch  $A$  eine absolut Borelsche Menge.

Sei  $E$  ein vollständiger Raum  $\supseteq B$ ; dann ist  $B$  eine Borelsche Menge in  $E$ , also nach 33-4-73 auch  $A$ .

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 179, 208.

**6. Abbildung Borelscher Mengen.** In Verallgemeinerung der Sätze von § 23, 2 gilt:

**33-6-1.** Ist  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , und ist  $C$  eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -, eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge) in  $B$ , so ist  $P^{-1}(C)$  eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -, eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge) in  $A$ .

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Nach 23-2-1 und 23-2-11 ist die Behauptung richtig für  $\xi = 1$ . Angenommen, sie gelte für alle  $\eta < \xi$ ; wir zeigen, daß sie dann auch für  $\xi$  gilt. Sei  $C \in \mathfrak{B}_\xi(B)$ ; dann ist  $C = \bigcup_n C_n$ , wo  $C_n \in \mathfrak{B}^{\eta_n}(B)$  ( $\eta_n < \xi$ ); nach 2-1-3 ist  $P^{-1}(C) = \bigcup_n (P^{-1}(C_n))$ ; da hierin nach Annahme  $P^{-1}(C_n) \in \mathfrak{B}^{\eta_n}(A)$ , ist  $P^{-1}(C) \in \mathfrak{B}_\xi(A)$ .

**33-6-2.** Ist  $Q$  eine homöomorphe Abbildung von  $B$  auf  $A$ , und ist  $M$  eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -, eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge) in  $B$ , so ist  $Q(M)$  eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -, eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge) in  $A$ .

Da  $Q$  homöomorph, ist  $Q^{-1}$  stetig; die Behauptung folgt also aus 33-6-1 für  $P = Q^{-1}$ .

Satz 24-4-1 besagt: Jede mit einer absoluten  $\mathfrak{B}_2$ -Menge homöomorphe Menge ist eine absolute  $\mathfrak{B}_2$ -Menge. Für  $\mathfrak{B}^2$ -Mengen gilt ein solcher Satz nicht; denn nach 24-4-3 ist z. B. die Menge aller irrationalen Punkte des  $\mathfrak{R}_1$ , die ein absolutes  $G_\delta$ , d. h. eine absolute  $\mathfrak{B}_2$ -Menge, aber (§ 19, 2) kein  $F_\sigma$  im  $\mathfrak{R}_1$ , also keine absolute  $\mathfrak{B}^2$ -Menge ist, homöomorph einer vollständigen Menge, die nach 18-5-2 eine absolute  $\mathfrak{B}_1$ -Menge, also auch eine absolute  $\mathfrak{B}^2$ -Menge ist. Wohl aber gilt:

**33-6-3.** Für  $\xi \geq 3$  ist jede mit einer absoluten  $\mathfrak{B}_\xi$ - (bzw.  $\mathfrak{B}^\xi$ -, bzw.  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -) Menge  $A$  homöomorphe Menge  $B$  eine absolute  $\mathfrak{B}_\xi$ - (bzw.  $\mathfrak{B}^\xi$ -, bzw.  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -) Menge.

Nach Voraussetzung ist  $A \in \mathfrak{B}_\xi(X)$ , wo  $X$  vollständig. Sei  $P$  eine homöomorphe Abbildung von  $A$  auf  $B$ ; nach 18-1-6 gibt es einen voll-

ständigen Raum  $Y \supseteq B$ . Nach 24.3.1 erweitern wir  $P$  zu einer homöomorphen Abbildung einer Youngschen Menge  $A^\times \supseteq A$  auf eine Youngsche Menge  $B^\times \supseteq B$ . Als absolute  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge ist  $A \in \mathfrak{B}_\xi(A^\times)$ ; somit ist nach 33.6.2  $B \in \mathfrak{B}_\xi(B^\times)$ . Als Youngsche Menge ist  $B^\times$  eine absolute  $\mathfrak{B}_2$ -Menge, also  $B^\times \in \mathfrak{B}_2(Y)$ , also auch  $B^\times \in \mathfrak{B}_\xi(Y)$ , also ist nach 33.4.73 auch  $B \in \mathfrak{B}_\xi(Y)$ .

Wir kommen auf die Abbildung Borelscher Mengen in § 42, 3 zurück.

**7. Borelsche Mengen in Produkträumen.** In Verallgemeinerung von 20.4.1, 20.4.2 gilt:

**33.7.1.** Ist  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ), so gilt für jede Schicht:  $A_y^{(1)} \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(1)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(1)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(1)})$ ).

Die Behauptung ist richtig für  $\xi = 1$  nach 20.4.1. Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ . Ist  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ , so ist  $A = \bigcup_n A_n$  mit  $A_n \in \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)} \times E^{(2)})$  ( $\eta_n < \xi$ ). Nun ist offenbar  $A_y^{(1)} = \bigcup_n A_{ny}^{(1)}$ , und da nach Annahme  $A_{ny}^{(1)} \in \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)})$ , ist  $A_y^{(1)} \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)})$ .

In Verallgemeinerung von 20.2.13 gilt:

**33.7.2.** Ist  $A_1 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(1)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(1)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(1)})$ ) und  $A_2 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(2)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(2)})$ ), so ist  $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ).

Die Behauptung ist richtig für  $\xi=1$  nach 20.2.11 (bzw. 20.2.1). Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ . Ist  $A_1 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)})$ ,  $A_2 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(2)})$ , so ist  $A_1 = \bigcup_n A'_n$ ,  $A_2 = \bigcup_n A''_n$ , wo  $A'_n \in \mathfrak{B}_{\eta'_n}(E^{(1)})$ ,  $A''_n \in \mathfrak{B}_{\eta''_n}(E^{(2)})$  ( $\eta'_n < \xi$ ,  $\eta''_n < \xi$ ); nach 33.4.31 und 3.5.2 kann angenommen werden:  $A'_n \subseteq A'_{n+1}$ ,  $A''_n \subseteq A''_{n+1}$ . Bezeichnen wir mit  $\eta_n$  die größere der beiden Ordinalzahlen  $\eta'_n$ ,  $\eta''_n$ , so ist auch  $\eta_n < \xi$  und nach (4.2):  $A'_n \in \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)})$ ,  $A''_n \in \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(2)})$ ; nach Annahme ist dann  $A'_n \times A''_n \in \mathfrak{B}_{\eta_n}(E^{(1)} \times E^{(2)})$ , und da  $A_1 \times A_2 = \bigcup_n A'_n \times A''_n$ , ist  $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ .

Umgekehrt gilt in Verallgemeinerung von 20.4.3:

**33.7.21.** Ist  $A_1 \times A_2 \supset A$  und ist  $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(1)} \times E^{(2)})$ ), so ist  $A_1 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(1)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(1)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(1)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(1)})$ ) und  $A_2 \in \mathfrak{B}^\xi(E^{(2)})$  (bzw.  $\in \mathfrak{B}_\xi(E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E^{(2)})$ ,  $\in \mathfrak{B}_B(E^{(2)})$ ).

Wir setzen  $A_1 \times A_2 = A$ ; für jedes  $y \in A_2$  ist dann  $A_y^{(1)} = A_1$ , und für jedes  $x \in A_1$  ist  $A_x^{(2)} = A_2$ . Die Behauptung folgt also aus 33.7.1.

**33.7.3.** Sind  $A_1$  und  $A_2$  absolut Borelsche Mengen, so ist auch  $A_1 \times A_2$  eine absolut Borelsche Menge.

Sei  $E^{(1)}$  ein vollständiger Raum  $\supseteq A_1$  und  $E^{(2)}$  ein vollständiger Raum  $\supseteq A_2$ ; dann ist nach 20·2·7  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  ein vollständiger Raum  $\supseteq A_1 \times A_2$ , und nach 33·7·2 ist  $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{B}_B(E^{(1)} \times E^{(2)})$ .

**8. Universalismen.** In den folgenden Erörterungen spielt eine wichtige Rolle der Raum  $R_0$  (§ 9, 3), dessen Punkte  $a$  die Folgen  $((k_v))$  natürlicher Zahlen sind. Wir bezeichnen mit  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  die Menge aller solchen Folgen, die mit den Gliedern  $k_1, k_2, \dots, k_n$  beginnen; aus der Abstandsdefinition § 9 (3·4) folgt augenblicklich: ist  $a \in A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  und  $a a' < \frac{1}{n}$ , so ist auch  $a' \in A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ; also ist  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  eine offene Menge des  $R_0$ ; ebenso sieht man, daß  $R_0 - A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  offen im  $R_0$  ist; also ist  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  sowohl offen als abgeschlossen im  $R_0$ , d. h.:

$$(8) \quad A_{k_1 k_2 \dots k_n} \in \mathfrak{B}_1^1(R_0).$$

Wir beweisen den Hilfssatz:

**33·8·1.** *Es gibt eine Folge eindeutiger stetiger Abbildungen  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) des  $R_0$  auf sich selbst, so daß zu jeder Folge von Punkten  $x_n \in R_0$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) ein  $x \in R_0$  mit  $P_n(x) = x_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gehört.*

In der Tat, man hat nur, wenn  $x$  die Folge  $k_1, k_2, \dots, k_v, \dots$  natürlicher Zahlen ist, unter  $P_1(x)$  zu verstehen die Folge  $k_1, k_3, k_5, \dots$ , unter  $P_2(x)$  die Folge  $k_2, k_6, k_{10}, \dots$ , allgemein unter  $P_n(x)$  die Folge  $k_{1,2n-1}, k_{3,2n-1}, k_{5,2n-1}, \dots$ . Dann ist die Abbildung  $P_n(x)$  des  $R_0$  auf sich selbst stetig, denn nach der Abstandsdefinition § 9 (3·4) ist  $P_n(x)P_n(x') < \frac{1}{v}$ , wenn  $x x' < \frac{1}{(2v-1) \cdot 2^{n-1}}$ .

**33·8·2.** *Ist  $E$  ein separabler Raum, so gibt es eine in  $E \times R_0$  offene (bzw. abgeschlossene) Menge  $G$ , unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  ( $a \in R_0$ ) alle in  $E$  offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen vorkommen.*

Es gibt ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen (§ 13, 1); wir fügen ihm die leere Menge hinzu und bezeichnen das so entstehende System mit  $H_1, H_2, \dots, H_k, \dots$ . Wir setzen  $G_{k_1 k_2 \dots k_n} = H_{k_n} \times A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ; nach 20·2·11 ist  $G_{k_1 k_2 \dots k_n}$  offen in  $E \times R_0$ ; also sind auch die Mengen  $G_n = \bigcup_{k_1, k_2, \dots, k_n} G_{k_1 k_2 \dots k_n}$  und  $G = \bigcup_n G_n$  offen in  $E \times R_0$ . Ist nun  $a$  ein beliebiger Punkt des  $R_0$ , etwa  $a = ((k_v^*))$ , so ist  $a \in A_{k_1^* k_2^* \dots k_n^*}$  für jedes  $n$ , und für jedes von  $(k_1^*, k_2^*, \dots, k_n^*)$  verschiedene  $n$ -tupel  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  ist  $a \sim \notin A_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ; also ist die Schicht  $G_a^{(1)}$  von  $G$  (§ 20, 4) gegeben durch:  $G_a^{(1)} = \bigcap_n H_{k_n^*}$ ; da es nach 18·1·1 zu jeder in  $E$

offenen Menge  $H$  eine Folge  $((k_n^*))$  natürlicher Zahlen gibt, so daß  $H = \bigcup_n H_{k_n^*}$ , ist die Behauptung für die offenen Mengen bewiesen; für die abgeschlossenen Mengen folgt sie durch Komplementbildung.

**33-8-21.** Ist  $E^{(1)}$  ein separabler Raum,  $E^{(2)}$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es eine in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  offene (bzw. abgeschlossene) Menge  $G$ , unter deren Schichten  $G_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) alle in  $E^{(1)}$  offenen (bzw. abgeschlossenen) Mengen vorkommen.

Nach 19-2-1 gibt es in  $E^{(2)}$  ein dyadisches Diskontinuum; nach 24-2-41 gibt es also eine Menge  $B \subseteq E^{(2)}$ , die homöomorph dem  $R_0$  ist. Bei einer homöomorphen Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $B$  gehen nach 24-1-2 die Mengen  $A_{k_1 k_2 \dots k_n}$  des  $R_0$  über in Mengen  $B_{k_1 k_2 \dots k_n}$ , die in  $B$  offen sind; dann ist  $B_{k_1 k_2 \dots k_n} = B \cdot C_{k_1 k_2 \dots k_n}$ , wo  $C_{k_1 k_2 \dots k_n}$  offen in  $E^{(2)}$ . Sei wieder  $H_1, H_2, \dots, H_k, \dots$  ein Mengensystem, das aus einem abzählbaren ausgezeichneten Systeme in  $E^{(1)}$  offener Mengen durch Hinzufügung der leeren Menge entsteht; wir setzen:  $G_{k_1 k_2 \dots k_n} = H_{k_n} \times C_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ,  $G_n = \bigcup_{k_1, k_2, \dots, k_n} G_{k_1 k_2 \dots k_n}$ ;  $G = \bigcup_n G_n$ ; dann ist  $G$  offen in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , und für jedes  $b \in B$  ist, wenn  $b$  bei der homöomorphen Abbildung  $P$  das Bild des Punktes  $a = ((k_v^*))$  des  $R_0$  ist:  $G_b^{(1)} = \bigcup_n H_{k_n^*}$ . Nun folgt die Behauptung wie bei 33-8-2.

**33-8-3.** Ist  $E$  ein separabler Raum und  $\xi < \omega_1$ , so gibt es eine  $\mathfrak{B}_\xi^+$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}_\xi^-$ -Menge)  $G$  in  $E \times R_0$ , unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  ( $a \in R_0$ ) alle  $\mathfrak{B}_\xi^-$ -Mengen (bzw. alle  $\mathfrak{B}_\xi^+$ -Mengen) in  $E$  vorkommen.

Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Nach 33-8-2 gilt die Behauptung für  $\xi = 1$ ; wir nehmen an, sie gelte für alle  $\eta < \xi$  und zeigen, daß sie dann auch für  $\xi$  gilt. Nach Annahme gibt es für jedes  $\eta < \xi$  eine Menge  $G_\eta \in \mathfrak{B}^\eta(E \times R_0)$  und eine Menge  $G'_\eta \in \mathfrak{B}_\eta(E \times R_0)$ , unter deren Schichten  $(G_\eta)_a^{(1)}$ , bzw.  $(G'_\eta)_a^{(1)}$  alle  $\mathfrak{B}^\eta$ -Mengen, bzw. alle  $\mathfrak{B}_\eta$ -Mengen in  $E$  vorkommen. Da es nur abzählbar viele  $\eta < \xi$  gibt, können die Mengen  $G_\eta, G'_\eta$  ( $\eta < \xi$ ) in eine Folge  $K_1, K_2, \dots, K_\nu, \dots$  geordnet werden; bilden wir eine neue Folge  $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$ , indem wir setzen:  $M_1 = M_3 = M_5 = \dots = K_1, M_2 = M_6 = M_{10} = \dots = K_2$ , allgemein  $M_{1,2^{\nu-1}} = M_{3,2^{\nu-1}} = M_{5,2^{\nu-1}} = \dots = K_\nu$ , so kommt jede Menge  $G_\eta$  und jede Menge  $G'_\eta$  ( $\eta < \xi$ ) in der Folge  $((M_n))$  unendlich oft vor. Wir betrachten nun die in 33-8-1 eingeführten Abbildungen  $P_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) des  $R_0$  auf sich selbst; ordnen wir dem Punkte  $(x, y) \in E \times R_0$  (wo  $x \in E, y \in R_0$ ) den Punkt  $(x, P_n(y))$  zu, so entsteht eine stetige Abbildung  $Q_n$  von  $E \times R_0$  auf sich selbst. Da  $M_n \in \bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{B}^\eta(E \times R_0) + \mathfrak{B}_\eta(E \times R_0))$ , ist nach 33-6-1 auch  $Q_n^{-1}(M_n) \in \bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{B}^\eta(E \times R_0) + \mathfrak{B}_\eta(E \times R_0))$ ; setzen wir

$G = \bigcup_n Q_n^{-1}(M_n)$ , so ist demnach  $G \in \mathfrak{B}^{\xi}(E \times R_0)$ . Sei nun  $N$  eine beliebige  $\mathfrak{B}^{\xi}$ -Menge in  $E$ , also  $N = \bigcup_i N_i$ , wo  $N_i \in \mathfrak{B}^{\eta_i}(E) + \mathfrak{B}_{\eta_i}(E)$  ( $\eta_i < \xi$ ). Zuzufolge der Wahl der Mengen  $G_{\eta}$  und  $G'_{\eta}$  gibt es also in der Folge  $((K_n))$  ein Glied  $K_{n_i}$  und ein  $y_i \in R_0$ , so daß  $N_i = (K_{n_i})_{y_i}^{(1)}$ ; da die Menge  $K_{n_i}$  unendlich oft in der Folge  $((M_n))$  vorkommt, gibt es eine wachsende Indizesfolge  $((n_i))$ , so daß  $N_i = (M_{n_i})_{y_i}^{(1)}$ . Da  $A \in \mathfrak{B}^{\eta}(E) + \mathfrak{B}_{\eta}(E)$  für jedes  $\eta$ , kommt unter den Schichten jeder Menge  $G_{\eta}$  und jeder Menge  $G'_{\eta}$  auch die leere Menge vor; zu jeder Menge  $M_n$  gibt es also ein  $z_n \in R_0$ , so daß  $(M_n)_{z_n}^{(1)} = A$ ; es gibt also in  $R_0$  eine Punktfolge  $((t_n))$ , so daß  $(M_n)_{t_n}^{(1)} = N_i$  für  $n = n_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), und  $(M_n)_{t_n}^{(1)} = A$  für alle anderen  $n$ . Zuzufolge der Wahl der Abbildungen  $P_n$  gibt es aber ein  $a \in R_0$ , so daß  $t_n = P_n(a)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ); dann ist  $(Q_n^{-1}(M_n))_a^{(1)} = N_i$  für  $n = n_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) und  $(Q_n^{-1}(M_n))_a^{(1)} = A$  für alle anderen  $n$ ; also ist  $G_a^{(1)} = \bigcup_i N_i = N$ , womit die Behauptung für die  $\mathfrak{B}^{\xi}$ -Mengen bewiesen ist; für die  $\mathfrak{B}_{\xi}$ -Mengen folgt sie dann nach 33.4.2 durch Komplementbildung.

**33.8.31.** Ist  $E^{(1)}$  ein separabler Raum,  $E^{(2)}$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es, wenn  $\xi < \omega_1$ , eine  $\mathfrak{B}^{\xi}$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}_{\xi}$ -Menge)  $G$  in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , unter deren Schichten  $G_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) alle  $\mathfrak{B}^{\xi}$ -Mengen (bzw. alle  $\mathfrak{B}_{\xi}$ -Mengen) in  $E^{(1)}$  vorkommen.

Nach 33.8.21 gilt die Behauptung für  $\xi = 1$ ; wir nehmen also  $\xi \geq 2$  an. Nach 19.2.1 gibt es in  $E^{(2)}$  ein dyadisches Diskontinuum  $C$ , also auch ein reduziertes dyadisches Diskontinuum  $B$  (§ 24, 2); nach 24.2.4 ist  $B$  ein  $G_{\delta}$ , also  $B \in \mathfrak{B}_2(E^{(2)})$ ; nach 33.7.2 ist somit  $E^{(1)} \times B \in \mathfrak{B}_2(E^{(1)} \times E^{(2)})$ . Nach 24.2.41 gibt es eine homöomorphe Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $B$ ; ordnen wir jedem Punkte  $(x, y) \in E^{(1)} \times R_0$  (wo  $x \in E^{(1)}$ ,  $y \in R_0$ ) den Punkt  $(x, P(y))$  zu, so entsteht eine homöomorphe Abbildung  $Q$  von  $E^{(1)} \times R_0$  auf  $E^{(1)} \times B$ . Nach 33.8.3 gibt es eine Menge  $H \in \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)} \times R_0)$ , unter deren Schichten  $H_a^{(1)}$  alle  $\mathfrak{B}_{\xi}$ -Mengen in  $E^{(1)}$  vorkommen; setzen wir  $G = Q(H)$ , so kommen unter den Schichten  $G_b^{(1)}$  ( $b \in B$ ) alle  $\mathfrak{B}_{\xi}$ -Mengen in  $E^{(1)}$  vor, und nach 33.6.2 ist  $G \in \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)} \times B)$ . Da  $E^{(1)} \times B \in \mathfrak{B}_2(E^{(1)} \times E^{(2)})$ , ist nach 33.4.78  $G \in \mathfrak{B}_{\xi}(E^{(1)} \times E^{(2)})$ . Damit ist die Behauptung für die  $\mathfrak{B}_{\xi}$ -Mengen bewiesen, und für die  $\mathfrak{B}^{\xi}$ -Mengen folgt sie durch Komplementbildung.

**33.8.4.** Es gibt keine  $\mathfrak{B}_{\xi}^{\xi}$ -Menge  $G$  in  $R_0 \times R_0$  ( $\xi \geq 2$ ), unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  ( $a \in R_0$ ) alle  $\mathfrak{B}_{\xi}^{\xi}$ -Mengen des  $R_0$  vorkommen.

Sei  $G$  eine  $\mathfrak{B}_{\xi}^{\xi}$ -Menge in  $R_0 \times R_0$ . Ist  $F$  die Menge aller Punkte  $(x, y) \in R_0 \times R_0$  ( $x \in R_0$ ,  $y \in R_0$ ) mit  $x = y$ , so ist  $F$  abgeschlossen, also eine  $\mathfrak{B}_{\xi}^{\xi}$ -Menge in  $R_0 \times R_0$ ; also ist nach 33.4.32 auch  $F - G \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\xi}(R_0 \times R_0)$ , also nach 33.4.72 auch  $F - G \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\xi}(F)$ . Ordnen wir jedem Punkte  $(x, x) \in F$  den

Punkt  $x \in R_0$  zu, so ist dies eine homöomorphe Abbildung  $P$  von  $F$  auf den  $R_0$ . Setzen wir  $P(F - G) = A$ , so ist also nach 33.6.2  $A \in \mathfrak{B}_\xi^t(R_0)$ . Nach Definition von  $A$  sind die Aussagen  $a \in A$  und  $(a, a) \sim_\varepsilon G$  äquivalent, die Aussage  $(a, a) \sim_\varepsilon G$  ist aber äquivalent mit  $a \sim_\varepsilon G_a^{(1)}$ ; also ist  $A \neq G_a^{(1)}$ , d. h.  $A$  kommt nicht unter den Schichten  $G_a^{(1)}$  von  $G$  vor.

**33.8.41.** Es gibt keine Borelsche Menge  $G$  in  $R_0 \times R_0$ , unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  ( $a \in R_0$ ) alle Borelschen Mengen des  $R_0$  vorkommen.

Dies folgt aus 33.8.4 für  $\xi = \omega_1$ .

**33.8.5.** Ist  $E$  ein separabler Raum, so gibt es, wenn  $\xi < \omega_1$ , zwei  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen  $G_1, G_2$  in  $E \times R_0$  von folgender Eigenschaft: zu je zwei  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen  $B_1, B_2$  in  $E$  gibt es ein  $b \in R_0$ , so daß die Schicht  $(G_1)_b^{(1)} = B_1$  und die Schicht  $(G_2)_b^{(1)} = B_2$ .

Sei  $y \in R_0$ ; ist  $y$  die Folge  $k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$  natürlicher Zahlen, so verstehen wir unter  $P_1(y)$  die Folge  $k_1, k_3, k_5, \dots$ , unter  $P_2(y)$  die Folge  $k_2, k_4, k_6, \dots$ ; dann ist sowohl  $P_1$  als  $P_2$  eine eindeutige stetige Abbildung des  $R_0$  auf sich selbst, und zu jedem Punktepaar  $y_1 \in R_0, y_2 \in R_0$  gibt es ein  $y \in R_0$ , so daß  $y_1 = P_1(y), y_2 = P_2(y)$ . Setzen wir für alle  $(x, y) \in E \times R_0$ :  $x' = x, y' = P_1(y)$  (bzw.  $x' = x, y'' = P_2(y)$ ), so ist dadurch eine eindeutige stetige Abbildung  $Q_1$  (bzw.  $Q_2$ ) von  $E \times R_0$  auf sich selbst gegeben. — Nach 33.8.3 gibt es eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge  $G$  in  $E \times R_0$ , unter deren Schichten  $G_b^{(1)}$  alle  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen in  $E$  vorkommen; wir setzen  $G_1 = Q_1^{-1}(G), G_2 = Q_2^{-1}(G)$ ; dann sind nach 33.6.1 auch  $G_1$  und  $G_2$   $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen in  $E \times R_0$ . Seien nun  $B_1, B_2$   $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen in  $E$ ; es gibt ein  $b_1 \in R_0$  und ein  $b_2 \in R_0$ , so daß  $B_1 = G_{b_1}^{(1)}, B_2 = G_{b_2}^{(1)}$ ; ferner gibt es ein  $b \in R_0$ , so daß  $b_1 = P_1(b), b_2 = P_2(b)$ ; dann ist offenbar  $B_1 = (G_1)_b^{(1)}, B_2 = (G_2)_b^{(1)}$ .

Sind  $G_1, G_2$  die  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen von 33.8.5, so gibt es nach 33.4.62 zwei fremde  $\mathfrak{B}^\xi$ -Mengen  $A_1, A_2$  in  $E \times R_0$ , so daß  $G_1 - G_2 \subseteq A_1, G_2 - G_1 \subseteq A_2$ . Setzen wir  $E = R_0$ , so liefern die Mengen  $A_1, A_2$  ein Beispiel zweier fremder  $\mathfrak{B}^\xi$ -Mengen, die nicht  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -trennbar sind. Angenommen nämlich, es gäbe zwei fremde  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Mengen  $C_1, C_2$  in  $R_0 \times R_0$ , so daß  $A_1 \subseteq C_1, A_2 \subseteq C_2$ : ist  $B \in \mathfrak{B}_\xi^t(R_0)$ , so ist auch  $R_0 - B \in \mathfrak{B}_\xi^t(R_0)$ , also gibt es ein  $b \in R_0$ , so daß  $(G_1)_b^{(1)} = B, (G_2)_b^{(1)} = R_0 - B$ ; wegen  $C_1 \supseteq G_1 - G_2, C_2 \supseteq G_2 - G_1, C_1 C_2 = A$  ist dann auch  $(C_1)_b^{(1)} = B$ ; es kämen also alle  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Mengen des  $R_0$  unter den Schichten  $(C_1)_b^{(1)}$  von  $C_1$  vor, was nach 33.8.4 unmöglich.

**9. Existenzsätze.** Wir sagen, die Menge  $A \subseteq E$  sei genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge) in  $E$ , wenn  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  und  $A \sim_\varepsilon \mathfrak{B}_\xi(E)$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}_\xi(E)$  und  $A \sim_\varepsilon \mathfrak{B}_\xi(E)$ ); wir sagen, die Menge  $A \subseteq E$  sei genau eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge in  $E$ , wenn  $A \in \mathfrak{B}_\xi^\xi(E)$  und  $A \sim_\varepsilon \mathfrak{B}_\eta(E) + \mathfrak{B}_\eta(E)$  für alle  $\eta < \xi$ . Wegen § 33 (4.4), (4.42) kann es eine Menge, die genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -, oder  $\mathfrak{B}_\xi$ -, oder  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge ist, nur für  $\xi < \omega_1$  geben.

**33-9-1.** Ist  $\xi < \omega_1$ , so gibt es im  $R_0$  eine Menge, die genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge) ist.

Nach 33-8-3 gibt es eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge  $G$  in  $R_0 \times R_0$ , unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  alle  $\mathfrak{B}_\xi$ -Mengen in  $R_0$  vorkommen. Sei  $F$  die Menge aller Punkte  $(x, y) \in R_0 \times R_0$  ( $x \in R_0, y \in R_0$ ) mit  $x = y$ ; dann ist  $F \cap G \in \mathfrak{B}_\xi(R_0 \times R_0)$ , also auch  $F \cap G \in \mathfrak{B}_\xi(F)$ , also  $F - G \in \mathfrak{B}^\xi(F)$ . Ordnen wir jedem Punkte  $(x, x) \in F$  den Punkt  $x \in R_0$  zu, so ist dies eine homöomorphe Abbildung  $P$  von  $F$  auf den  $R_0$ ; setzen wir  $P(F - G) = A$ , so ist also nach 33-6-2  $A \in \mathfrak{B}^\xi(R_0)$ . Um zu zeigen, daß  $A$  genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge im  $R_0$ , haben wir noch zu zeigen:  $A \sim \varepsilon \mathfrak{B}_\xi(R_0)$ . Nach Definition von  $A$  sind die Aussagen  $a \in A$  und  $(a, a) \sim \varepsilon G$  äquivalent; die Aussage  $(a, a) \sim \varepsilon G$  ist aber äquivalent mit  $a \sim \varepsilon G_a^{(1)}$ ; es sind also die Aussagen  $a \in A$  und  $a \sim \varepsilon G_a^{(1)}$  äquivalent, es ist also  $A \neq G_a^{(1)}$  für alle  $a \in R_0$ , also  $A \sim \varepsilon \mathfrak{B}_\xi(R_0)$ , w. z. b. w.

Bezeichnen wir mit  $A_k$  die Menge aller Punkte des  $R_0$ , die dargestellt sind durch eine mit dem Gliede  $k_1 = k$  beginnende Folge  $((k_n))$  natürlicher Zahlen, so können wir 33-9-1 verschärfen zu:

**33-9-11.** Ist  $\xi < \omega_1$ , so gibt es ein  $C \subseteq A_k$ , das genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge) im  $R_0$  ist, während  $A_k - C$  genau eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge (bzw. eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge) im  $R_0$  ist.

Ordnet man dem durch die Folge  $k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$  dargestellten Punkte des  $R_0$  den durch die Folge  $k, k_1, k_2, \dots, k_r, \dots$  dargestellten Punkt des  $R_0$  zu, so erhält man eine homöomorphe Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $A_k$ . Nach 33-9-1 gibt es ein  $B \subseteq R_0$ , das genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge im  $R_0$  ist; dann ist  $R_0 - B$  genau eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge im  $R_0$ . Setzen wir  $C = P(B)$ , so ist  $A_k - C = P(R_0 - B)$ , also ist nach 33-6-2  $C$  genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge in  $A_k$ ,  $A_k - C$  genau eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge in  $A_k$ . Und da nach § 33 (8):  $A_k \in \mathfrak{B}_1^1(R_0)$ , ist nach 33-4-78  $C$  eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge im  $R_0$ ,  $A_k - C$  eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge im  $R_0$ . Wäre nun  $C$  auch eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge im  $R_0$ , so wäre nach 33-4-72  $C$  auch eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge in  $A_k$ , was nicht der Fall ist; also ist  $C$  genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ -Menge im  $R_0$ , und ebenso  $A_k - C$  genau eine  $\mathfrak{B}_\xi$ -Menge im  $R_0$ .

**33-9-2.** Ist  $\xi < \omega_1$ , so gibt es im  $R_0$  eine Menge, die genau eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge ist.

Die Behauptung ist trivial für  $\xi = 1$ , da z. B. der  $R_0$  selbst eine  $\mathfrak{B}_1^1$ -Menge ist. Wir nehmen also  $\xi \geq 2$  an. Sei zunächst  $\xi$  eine isolierte Zahl, also  $\xi = \xi^* + 1$ . Nach 33-9-11 gibt es ein  $C_1 \subseteq A_1$ , das genau eine  $\mathfrak{B}^{\xi^*}$ -Menge, und ein  $C_2 \subseteq A_2$ , das genau eine  $\mathfrak{B}_{\xi^*}$ -Menge im  $R_0$  ist, während  $A_1 - C_1$  genau eine  $\mathfrak{B}_{\xi^*}$ -Menge,  $A_2 - C_2$  genau eine  $\mathfrak{B}^{\xi^*}$ -Menge im  $R_0$  ist. Setzen wir  $C = C_1 + C_2$ , so ist  $C \in \mathfrak{B}_\xi^\xi(R_0)$ ; ist  $\eta < \xi$ , also  $\eta \leq \xi^*$ , so kann nicht  $C \in \mathfrak{B}_\eta(R_0)$  sein; denn dann wäre wegen  $A_1 \in \mathfrak{B}_1^1(R_0)$  und  $C_1 = A_1 \cap C$

auch  $C_1 \in \mathfrak{B}_\eta(R_0)$ , während doch  $C_1$  genau eine  $\mathfrak{B}^{\xi^*}$ -Menge ist. Ebenso sieht man, daß  $C \sim_\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(R_0)$  für  $\eta < \xi$ . Sei sodann  $\xi$  eine Grenzzahl,  $\eta_k < \xi$  und  $\lim_k \eta_k = \xi$ . Nach 39.9.11 gibt es ein  $C_k \subseteq A_k$ , das genau eine  $\mathfrak{B}^{\eta_k}$ -Menge im  $R_0$  ist, während  $A_k - C_k$  genau eine  $\mathfrak{B}_{\eta_k}$ -Menge ist. Wir setzen  $C = \bigcup_k C_k$ ; dann ist  $C \in \mathfrak{B}^\xi(R_0)$ ; wegen  $R_0 - C = \bigcap_k (A_k - C_k)$  ist aber auch  $R_0 - C \in \mathfrak{B}^\xi(R_0)$ , also  $C \in \mathfrak{B}_\xi(R_0)$ , also  $C \in \mathfrak{B}_\xi^\xi(R_0)$ . Ist  $\eta < \xi$ , so gibt es ein  $k$ , so daß  $\eta_k > \eta$ ; und da  $A_k - C_k = C_k$ , und  $C_k \sim_\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(R_0) + \mathfrak{B}_\eta(R_0)$ , ist auch  $C \sim_\varepsilon \mathfrak{B}^\eta(R_0) + \mathfrak{B}_\eta(R_0)$ ; also ist  $C$  genau eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ -Menge.

**33.9.3.** Ist  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, und ist  $\xi < \omega_1$ , so gibt es ein  $A \subseteq E$ , das genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$  (eine  $\mathfrak{B}_\xi$ , eine  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ) Menge in  $E$  ist.

Die Behauptung ist richtig für  $\xi = 1$ ; denn ist  $a$  ein Punkt des insichdichten Kernes, so ist  $\{a\}$  genau eine  $\mathfrak{B}_1$ -Menge,  $E - \{a\}$  genau eine  $\mathfrak{B}^1$ -Menge in  $E$ , und  $E$  selbst ist genau eine  $\mathfrak{B}_1^1$ -Menge in  $E$ . Die Behauptung ist auch richtig für  $\xi = 2$ ; denn nach 19.2.1 gibt es ein dyadisches Diskontinuum  $C \subseteq E$ ; da nach 18.8.22  $C$  separabel, gibt es einen abzählbaren in  $C$  dichten Teil  $M$ ; nach 33.4.5 ist  $M \in \mathfrak{B}^2(E)$  und nach 19.2.2 ist  $M \sim_\varepsilon \mathfrak{B}_2(E)$ , also ist  $M$  genau eine  $\mathfrak{B}_2$ -Menge, somit  $E - M$  genau eine  $\mathfrak{B}_2$ -Menge in  $E$ . Ist  $a \in C - M$  und sind  $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots$  abzählbar viele Punkte aus  $M$  mit  $\lim_r a_r = a$ , so ist die Menge  $K$  der Punkte  $a_r$  genau eine  $\mathfrak{B}_2^2$ -Menge in  $E$ ; denn als abzählbare Menge ist  $K \in \mathfrak{B}^2(E)$ ; da ferner  $K = K^0(E - \{a\})$  und  $K^0$  abgeschlossen, also nach 10.7.41  $K^0 \in \mathfrak{B}_2(E)$ , und da  $E - \{a\}$  offen, ist  $K \in \mathfrak{B}_2(E)$ , also  $K \in \mathfrak{B}_2^2(E)$ ; und da  $K$  weder abgeschlossen, noch offen ist  $K \sim_\varepsilon \mathfrak{B}_1(E)$  und  $K \sim_\varepsilon \mathfrak{B}^1(E)$ . — Sei nunmehr  $\xi \geq 3$ . Sei wie beim Beweise von 33.8.31  $B$  ein reduziertes dyadisches Diskontinuum  $\subseteq E$  und  $P$  eine homöomorphe Abbildung des  $R_0$  auf  $B$ . Nach 33.9.1, 33.9.2 gibt es ein  $M \subseteq R_0$ , das genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ - (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ , bzw.  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ) Menge im  $R_0$  ist; nach 33.6.2 ist dann  $P(M)$  genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ - (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ , bzw.  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ) Menge in  $B$ , und da  $B \in \mathfrak{B}_2(E)$ , ist nach 33.4.73 und 33.4.72  $P(M)$  auch genau eine  $\mathfrak{B}^\xi$ - (bzw.  $\mathfrak{B}_\xi$ , bzw.  $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ) Menge in  $E$ .

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 208; C. Kuratowski, C. R. 176 (1923) S. 229; W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 39; Fund. math. 14 (1929) S. 82; C. R. Vars. 24 (1931) S. 57; O. Nikodym, Fund. math. 14 (1929) S. 145; F. Hausdorff, Mengenlehre S. 181; N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 129ff.

### § 34. Die Baireschen Funktionen.

1. Die Baireschen Funktionen über  $\mathfrak{C}$ . Sei wieder  $E$  eine beliebige Menge,  $\mathfrak{C}$  ein System von Funktionen auf  $E$ . In § 31, 2 haben wir die



Funktionensysteme  $\mathfrak{C}^1$  und  $\mathfrak{C}_1$  definiert; nun definieren wir für jede Ordinalzahl  $\xi > 1$  durch Induktion die Funktionensysteme  $\mathfrak{C}^\xi$ ,  $\mathfrak{C}_\xi$  vermöge der Formeln:

$$(1) \quad \mathfrak{C}^\xi = \left( S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) \right)^1, \quad \mathfrak{C}_\xi = \left( S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) \right)_1.$$

Die Funktionen aus  $\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi$  heißen die Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung über  $\mathfrak{C}$ . Die Definition (1) besagt also: Ist  $\mathfrak{X}$  das System der Baireschen Funktionen über  $\mathfrak{C}$  von kleinerer als  $\xi$ -ter Ordnung ( $\xi > 1$ ), so ist  $\mathfrak{C}^\xi = \mathfrak{X}^1$ ,  $\mathfrak{C}_\xi = \mathfrak{X}_1$ .

**34-1-1.** Für  $\xi < \xi'$  ist  $\mathfrak{C}^\xi \subseteq \mathfrak{C}^{\xi'}$ ,  $\mathfrak{C}^\xi \subseteq \mathfrak{C}_{\xi'}$ ,  $\mathfrak{C}_\xi \subseteq \mathfrak{C}^{\xi'}$ ,  $\mathfrak{C}_\xi \subseteq \mathfrak{C}_{\xi'}$ .

Dies folgt unmittelbar aus (1).

**34-1-11.** Ist  $\xi$  eine isolierte Zahl  $> 1$ , so ist:

$$(1-1) \quad S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) = \mathfrak{C}^{\xi-1} + \mathfrak{C}_{\xi-1};$$

ist  $\xi$  eine Grenzzahl, so ist:

$$(1-11) \quad S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) = S_{\eta < \xi} \mathfrak{C}^\eta = S_{\eta < \xi} \mathfrak{C}_\eta.$$

Dies folgt unmittelbar aus 34-1-1.

**34-1-2.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{C}^\xi$  und  $\mathfrak{C}_\xi$  autark.

Für  $\xi = 1$  ist die Behauptung richtig nach 31-2-1. Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; wir haben zu zeigen, daß sie dann auch für  $\xi$  gilt. Sei zunächst  $\xi$  isoliert. Wegen (1) und (1-1) ist dann  $\mathfrak{C}^\xi = (\mathfrak{C}^{\xi-1} + \mathfrak{C}_{\xi-1})^1$ ; hierin ist nach (1) und 34-1-1  $\mathfrak{C}^{\xi-1} = \left( S_{\eta < \xi-1} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) \right)^1 \subseteq (\mathfrak{C}_{\xi-1})^1$ ; nach 31-2-3 ist also, da nach Annahme  $\mathfrak{C}_{\xi-1}$  autark:

$$(1-2) \quad \mathfrak{C}^\xi = (\mathfrak{C}^{\xi-1} + \mathfrak{C}_{\xi-1})^1 = (\mathfrak{C}_{\xi-1})^1,$$

und nach 31-2-1 ist also auch  $\mathfrak{C}^\xi$  autark. Sei sodann  $\xi$  Grenzzahl; um zu zeigen, daß  $\mathfrak{C}^\xi$  und  $\mathfrak{C}_\xi$  autark sind, genügt es nach (1) und 31-2-1 nachzuweisen, daß das System  $\mathfrak{X} = S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta)$  autark ist; da nach Annahme  $\mathfrak{C}^\eta$ ,  $\mathfrak{C}_\eta$  für  $\eta < \xi$  autark sind, hat  $\mathfrak{X}$  offenbar die Eigenschaften 1a), 2a), 3a) eines autarken Systems (§ 30, 3); bleibt nur die Eigenschaft 4a) nachzuweisen. Sei also  $f_1 \in \mathfrak{X}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{X}$ , also  $f_1 \in \mathfrak{C}^{\eta_1} + \mathfrak{C}_{\eta_1}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{C}^{\eta_2} + \mathfrak{C}_{\eta_2}$  ( $\eta_1 < \xi$ ,  $\eta_2 < \xi$ ); da  $\xi$  Grenzzahl, gibt es ein  $\bar{\eta}$ , so daß  $\eta_1 < \bar{\eta} < \xi$ ,  $\eta_2 < \bar{\eta} < \xi$ ; nach 34-1-1 ist  $f_1 \in \mathfrak{C}^{\bar{\eta}}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{C}^{\bar{\eta}}$ ; da nach Annahme  $\mathfrak{C}^{\bar{\eta}}$  autark, ist also auch  $\max(f_1, f_2) \in \mathfrak{C}^{\bar{\eta}}$ ,  $\min(f_1, f_2) \in \mathfrak{C}^{\bar{\eta}}$ , also auch  $\max(f_1, f_2) \in \mathfrak{X}$ ,  $\min(f_1, f_2) \in \mathfrak{X}$ , w. z. b. w.

**34-1-21.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark und  $\xi$  Grenzzahl, so ist auch das System (1-11) autark.

Der Beweis wurde soeben geführt.

**34.1.3.** Bei autarkem  $\mathfrak{S}$  ist für jedes  $\xi \geq 1^1$ :

$$\mathfrak{S}^{\xi+1} = (\mathfrak{S}^\xi + \mathfrak{S}_\xi)^1 = (\mathfrak{S}_\xi)^1; \quad \mathfrak{S}_{\xi+1} = (\mathfrak{S}^\xi + \mathfrak{S}_\xi)_1 = (\mathfrak{S}^\xi)_1.$$

Dies ist gleichbedeutend mit (1.2).

**34.1.31.** Bei autarkem  $\mathfrak{S}$  ist für jedes  $\xi > 1$ :

$$\mathfrak{S}^\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}_\eta \right)^1, \quad \mathfrak{S}_\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}^\eta \right)_1.$$

Dies folgt aus 34.1.1, 34.1.11, 34.1.3.

**34.1.32.** Bei autarkem  $\mathfrak{S}$  ist für jedes  $\xi \geq 1$ :

$$(\mathfrak{S}^\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi; \quad (\mathfrak{S}_\xi)_1 = \mathfrak{S}_\xi.$$

Ist  $\xi$  isoliert, also von der Gestalt  $\xi = \eta + 1$ , folgt dies nach 31.2.21 aus 34.1.3 und 34.1.2; ist  $\xi$  Grenzzahl, so folgt es nach 31.2.21 aus (1) und 34.1.21.

**34.1.4.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark, so ist für jedes  $\xi \geq 1$   $\mathfrak{S}^\xi$  und  $\mathfrak{S}_\xi$  völlig autark.

Ist  $\xi$  isoliert, also von der Gestalt  $\xi = \eta + 1$ , folgt dies nach 31.2.6 aus 34.1.3 und 34.1.2; ist  $\xi$  Grenzzahl, so folgt es nach 31.2.6 aus (1) und 34.1.21.

**34.1.41.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark und  $\xi$  Grenzzahl, so ist das System (1.11) additiv.

Sei  $\mathfrak{X}$  das System (1.11), sei  $f_1 \in \mathfrak{X}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{X}$  und  $f_1 + f_2$  definiert auf  $E$ ; dann ist  $f_1 \in \mathfrak{S}^{\eta_1}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{S}^{\eta_2}$  ( $\eta_1 < \xi$ ,  $\eta_2 < \xi$ ); ist  $\bar{\eta}$  die größere der beiden Ordinalzahlen  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ , so ist also  $f_1 \in \mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$ ,  $f_2 \in \mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$ , also, da  $\mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$  nach 34.1.4 additiv:  $f_1 + f_2 \in \mathfrak{S}^{\bar{\eta}}$ , also wegen  $\bar{\eta} < \xi$  auch  $f_1 + f_2 \in \mathfrak{X}$ .

Wir setzen nun unter Beachtung von (1.11):

$$(1.3) \quad \mathfrak{S}_B = \bigcup_{\eta < \omega_1} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta) = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{S}^\eta = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{S}_\eta.$$

**34.1.5.** Bei beliebigem  $\mathfrak{S}$  ist  $(\mathfrak{S}_B)^1 = \mathfrak{S}_B$ ,  $(\mathfrak{S}_B)_1 = \mathfrak{S}_B$ .

Sei  $f_n \in \mathfrak{S}_B$ ,  $f_n \leq f_{n+1}$ ,  $f = \lim_n f_n$ ; dann ist  $f_n \in \mathfrak{S}^{\eta_n} + \mathfrak{S}_{\eta_n}$  ( $\eta_n < \omega_1$ ).

Nach 3.4.1 gibt es ein  $\eta < \omega_1$ , so daß alle  $\eta_n < \eta$ ; nach 34.1.1 ist dann  $f_n \in \mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta$  für alle  $n$ , also  $f \in (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta)^1 = \mathfrak{S}^{\eta+1}$ ; wegen  $\eta < \omega_1$  ist auch  $\eta + 1 < \omega_1$ , also  $\mathfrak{S}^{\eta+1} \subseteq \mathfrak{S}_B$ , also  $f \in \mathfrak{S}_B$ .

**34.1.51.** Für  $\xi \geq \omega_1$  ist  $\mathfrak{S}^\xi = \mathfrak{S}_\xi = \mathfrak{S}_B$ .

Nach 34.1.5 ist  $(\mathfrak{S}_B)^1 = (\mathfrak{S}_B)_1 = \mathfrak{S}_B$ , also nach (1) und (1.3)  $\mathfrak{S}^{\omega_1} = \mathfrak{S}_{\omega_1} = \mathfrak{S}_B$ . Von hier aus schließt man weiter durch transfinite Induktion.

Es kommen also die Baireschen Funktionen aller Ordnungen über  $\mathfrak{S}$  bereits unter den Baireschen Funktionen von kleinerer als  $\omega_1$ -ter Ordnung vor, d. h.  $\mathfrak{S}_B$  ist das System aller Baireschen Funktionen über  $\mathfrak{S}$ ; wir nennen es: das Bairesche System über  $\mathfrak{S}$ .

<sup>1)</sup> Hieraus folgt insbesondere:  $\mathfrak{S}^2 = (\mathfrak{S}_1)^1$ ,  $\mathfrak{S}_2 = (\mathfrak{S}^1)_1$  in Übereinstimmung mit § 31, 4.

**34-1-52.**  $\mathfrak{C}_B$  ist das kleinste System  $\mathfrak{I}$  über  $\mathfrak{C}$ , für das  $\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}$  gilt. Der Beweis ist analog dem von 33-1-52.

Von einer Eigenschaft, die, wenn sie allen Funktionen  $((f_i))$  einer konvergenten Funktionenfolge zukommt, auch deren Grenzfunktion zukommt, sagen wir: sie bleibt bei Grenzübergang erhalten.

**34-1-521.** Kommt eine Eigenschaft allen Funktionen aus  $\mathfrak{C}$  zu, und bleibt sie bei Grenzübergang erhalten, so kommt sie auch allen Funktionen aus  $\mathfrak{C}_B$  zu.

Denn ist  $\mathfrak{I}$  das System aller Funktionen, denen diese Eigenschaft zukommt, so ist  $\mathfrak{I}^1 = \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}$ ; die Behauptung folgt also aus 34-1-52.

**34-1-53.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark, so ist  $\mathfrak{C}_B$  völlig autark.

Dies folgt aus 34-1-51 und 34-1-4.

**34-1-6.** Ist  $\mathfrak{C}$  symmetrisch, so ist  $f \in \mathfrak{C}^\xi$  gleichbedeutend mit  $-f \in \mathfrak{C}^\xi$ .

Dies ist nach 31-2-7 richtig für  $\xi = 1$ , und folgt sodann für alle  $\xi$  durch transfinite Induktion.

**34-1-61.** Ist  $\mathfrak{C}$  symmetrisch, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}^\xi$  symmetrisch.

Dies folgt unmittelbar aus 34-1-6.

**34-1-62.** Ist  $\mathfrak{C}$  symmetrisch, so auch  $\mathfrak{C}_B$ .

Dies folgt unmittelbar aus 34-1-61.

**2. Ambige Bairesche Funktionen.** In Analogie zur Definition von  $\mathfrak{C}_1^1$  (§ 31, 3) setzen wir nun  $\mathfrak{C}_\xi^\xi = \mathfrak{C}^\xi \cdot \mathfrak{C}_\xi$ . Die Mengen aus  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  heißen die ambigen Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung über  $\mathfrak{C}$ , oder, wenn  $\xi$  eine isolierte Zahl  $\geq 1$  ist, auch die Baireschen Funktionen  $(\xi - 1)$ -ter Klasse über  $\mathfrak{C}$ .

**34-2-1.** Für  $\xi < \xi'$  ist  $\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi \subseteq \mathfrak{C}_{\xi'}^{\xi'}$ ;  $\mathfrak{C}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{C}_{\xi'}^{\xi'}$ .

Dies folgt unmittelbar aus 34-1-1.

**34-2-11.** Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $S_{\eta < \xi} \mathfrak{C}_\eta^\eta = S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta)$ .

Dies folgt aus der Definition von  $\mathfrak{C}_\eta^\eta$  und 34-2-1.

**34-2-12.** Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $\mathfrak{C}_\xi^\xi = (S_{\eta < \xi} \mathfrak{C}_\eta^\eta)_1^1$ .

Der Beweis ist analog dem von 33-2-13.

**34-2-2.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark, so ist für jedes  $\xi \geq 1$   $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  völlig autark.

Dies folgt aus 34-1-4.

**34-2-3.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark, so ist für jedes  $\xi \geq 1$ :  $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{C}^\xi$ ,  $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{C}_\xi$ .

Wegen  $S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) \subseteq \mathfrak{C}_\xi^\xi$  ist  $\mathfrak{C}^\xi = (S_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta))^1 \subseteq (\mathfrak{C}_\xi^\xi)^1$ . Umgekehrt ist wegen  $\mathfrak{C}_\xi^\xi \subseteq \mathfrak{C}^\xi$  nach 34-1-32  $(\mathfrak{C}_\xi^\xi)^1 \subseteq (\mathfrak{C}^\xi)^1 = \mathfrak{C}^\xi$ .

**34-2-31.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark, so ist für jedes  $\xi \geq 1$ :  $(\mathfrak{S}_\xi^*)^* = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi-1}$ .

Da nach 34-2-2  $\mathfrak{S}_\xi^*$  autark und additiv, ist nach 31-4-4  $(\mathfrak{S}_\xi^*)^* = (\mathfrak{S}_\xi^*)_2 (\mathfrak{S}_\xi^*)_2^2$ ; hierin ist nach 34-2-3 und 34-1-3  $(\mathfrak{S}_\xi^*)_2 = ((\mathfrak{S}_\xi^*)_1)_1 = (\mathfrak{S}_\xi)_1 = \mathfrak{S}_{\xi+1}$ ; ebenso ist  $(\mathfrak{S}_\xi^*)_2^2 = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi-1}$ .

**34-2-4.** Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{S}_\xi^*$  symmetrisch.

Dies folgt aus 34-1-6.

Wir setzen nun  $\mathfrak{S}^{(1)} = \mathfrak{S}^*$  und definieren für  $\xi > 1$  durch Induktion:  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}^{(\eta)})^*$ ; da für  $\xi < \xi'$  offenbar  $\mathfrak{S}^{(\xi)} \subseteq \mathfrak{S}^{(\xi')}$ , ist für jedes isolierte  $\xi > 1$ :  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\mathfrak{S}^{(\xi-1)})^*$ . Wir setzen ferner:  $\mathfrak{S}_{B^*} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{S}^{(\eta)}$ .

**34-2-5.**  $\mathfrak{S}_{B^*}$  ist das kleinste System  $\mathfrak{T}$  über  $\mathfrak{S}$ , für das  $\mathfrak{T}^* = \mathfrak{T}$  ist.

Der Beweis ist analog dem von 33-2-8.

**34-2-51.** Für  $\xi \geq \omega_1$  ist  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = \mathfrak{S}_{B^*}$ .

Der Beweis ist analog dem von 33-2-81.

**34-2-6.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark und additiv, so ist  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$ .

Die Behauptung ist nach 31-4-4 richtig für  $\xi = 1$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; ist dann  $\xi$  isoliert, so ist  $\mathfrak{S}^{(\xi-1)} = \mathfrak{S}_\xi^*$ , also  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\mathfrak{S}^{(\xi-1)})^* = (\mathfrak{S}_\xi^*)^* = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$  nach 34-2-31; ist hingegen  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}^{(\eta)})^*$ ; hierin ist nach 34-2-11:  $\mathfrak{S}^{(\eta)} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}_{\eta+1}^{\eta+1} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}_\eta = \bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta)$ ; dieses System ist nach 34-1-21, 34-1-41 autark und additiv, also ist nach 31-4-5 und 34-2-12:  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}_\eta)^* = ((\bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{S}_\eta)_1)^* = (\mathfrak{S}_\xi^*)^*$ , also nach 34-2-31 wieder  $\mathfrak{S}^{(\xi)} = \mathfrak{S}_{\xi+1}^{\xi+1}$ .

**34-2-61.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark und additiv, so ist  $\mathfrak{S}_{B^*} = \mathfrak{S}_B$ .

Denn nach 34-2-6 und 34-2-11 ist  $\mathfrak{S}_{B^*} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{S}^{(\eta)} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{S}_{\eta+1}^{\eta+1} = \bigcup_{\eta < \omega_1} \mathfrak{S}_\eta = \bigcup_{\eta < \omega_1} (\mathfrak{S}^\eta + \mathfrak{S}_\eta) = \mathfrak{S}_B$ .

Literatur: R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 68.

**3. Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen.** Sei  $\mathfrak{X}$  ein Funktionensystem auf  $E$  und seien  $\mathfrak{X}^\xi$ ,  $\mathfrak{X}_\xi$ ,  $\mathfrak{X}_\xi^*$ ,  $\mathfrak{X}_B$ , die in Nr. 1, 2 eingeführten Systeme Bairescher Funktionen über  $\mathfrak{X}$ . Wir setzen zur Abkürzung:

(3)  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}^\xi) = \mathfrak{G}^\xi$ ,  $\mathfrak{G}(\mathfrak{X}_\xi) = \mathfrak{G}_\xi$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}^\xi) = \mathfrak{F}^\xi$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{X}_\xi) = \mathfrak{F}_\xi$ ;

dann gilt:

**34-3-1.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark, so ist  $\mathfrak{X}^\xi = \mathfrak{S}(\mathfrak{G}^\xi, *)$ ,  $\mathfrak{X}_\xi = \mathfrak{S}(*, \mathfrak{G}_\xi)$ .

Nach 34-1-2 ist  $\mathfrak{X}^\xi$  autark, nach 34-1-32 ist  $(\mathfrak{X}^\xi)^1 = \mathfrak{X}^\xi$ , die Behauptung folgt also aus 31-2-512.

**34-3-11.** Ist  $\mathfrak{X}$  autark, so ist  $\mathfrak{F}^\xi = (\mathfrak{G}^\xi)_1$ ,  $\mathfrak{F}_\xi = (\mathfrak{G}_\xi)_1$ .

Nach 34.1.2 ist  $\mathfrak{Z}^i$  autark; nach 30.3.3 ist also  $\bar{\mathfrak{U}}^i$  ein Ring, und die Behauptung folgt aus 34.3.1 und 30.2.3.

**34.3.2.** Ist  $\mathfrak{Z}$  autark und  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{M}$ ,  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{N}$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{P}$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Q}$ , so ist für alle endlichen  $n$ :

$$(3.1) \quad \bar{\mathfrak{U}}^{2n-1} = \mathfrak{M}^{2n-1}, \quad \bar{\mathfrak{U}}_{2n-1} = \mathfrak{N}^{2n-1}, \quad \bar{\mathfrak{F}}^{2n-1} = \mathfrak{M}_{2n}, \quad \bar{\mathfrak{F}}_{2n-1} = \mathfrak{N}_{2n};$$

$$(3.11) \quad \bar{\mathfrak{U}}^{2n} = \mathfrak{P}^{2n}, \quad \bar{\mathfrak{U}}_{2n} = \mathfrak{Q}^{2n}, \quad \bar{\mathfrak{F}}^{2n} = \mathfrak{P}_{2n+1}, \quad \bar{\mathfrak{F}}_{2n} = \mathfrak{Q}_{2n+1}.$$

Nach 31.2.5 ist  $\bar{\mathfrak{U}}^1 = \mathfrak{M}^1$ ,  $\bar{\mathfrak{U}}_1 = \mathfrak{N}^1$ , also nach 34.3.11  $\bar{\mathfrak{F}}^1 = (\mathfrak{M}^1)_1 = \mathfrak{M}_2$ , ebenso  $\bar{\mathfrak{F}}_1 = \mathfrak{N}_2$ ; also ist (3.1) richtig für  $n = 1$ . Nach 31.4.21 ist  $\bar{\mathfrak{U}}^2 = \mathfrak{P}^2$ ,  $\bar{\mathfrak{U}}_2 = \mathfrak{Q}^2$ , also nach 34.3.11  $\bar{\mathfrak{F}}^2 = \mathfrak{P}_3$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{Q}_3$ ; also ist (3.11) richtig für  $n = 1$ . Aus  $\bar{\mathfrak{F}}_2 = \mathfrak{Q}_3$  erhalten wir durch Komplementbildung nach 33.1.7:  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}_2) = \mathfrak{M}^3$ , und da nach 34.1.2  $\mathfrak{Z}_2$  autark, und  $\mathfrak{Z}^3 = (\mathfrak{Z}_2)^1$ , ist nach 31.2.5  $\bar{\mathfrak{U}}^3 = (\mathfrak{M}^3)^1 = \mathfrak{M}^3$ , also nach 34.3.11  $\bar{\mathfrak{F}}^3 = \mathfrak{M}_4$ , und ebenso  $\bar{\mathfrak{U}}_3 = \mathfrak{N}^3$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}_3 = \mathfrak{N}_4$ ; also ist (3.1) richtig für  $n = 2$ . Aus  $\bar{\mathfrak{F}}_3 = \mathfrak{N}_4$  erhalten wir sodann durch Komplementbildung  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}_3) = \mathfrak{P}^4$ , also nach 31.2.5  $\bar{\mathfrak{U}}^4 = (\mathfrak{P}^4)^1 = \mathfrak{P}^4$ , und nach 34.3.11  $\bar{\mathfrak{F}}^4 = \mathfrak{P}_5$ , und ebenso:  $\bar{\mathfrak{U}}_4 = \mathfrak{Q}^4$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}_4 = \mathfrak{Q}_5$ ; also ist (3.11) richtig für  $n = 2$ . Indem man so weiter schließt, beweist man die Behauptung.

Aus 34.3.2 folgt wegen 34.1.1:  $\mathfrak{M}^1 \subseteq \mathfrak{P}^2 \subseteq \mathfrak{M}^3 \subseteq \mathfrak{P}^4 \subseteq \dots$ ,  $\mathfrak{N}^1 \subseteq \mathfrak{Q}^2 \subseteq \mathfrak{N}^3 \subseteq \mathfrak{Q}^4 \subseteq \dots$ ; also ist:

$$(3.2) \quad \underset{n}{S} \bar{\mathfrak{U}}^n = \underset{n}{S} \mathfrak{M}^n = \underset{n}{S} \mathfrak{P}^n, \quad \underset{n}{S} \bar{\mathfrak{U}}_n = \underset{n}{S} \mathfrak{N}^n = \underset{n}{S} \mathfrak{Q}^n.$$

**34.3.21.** Ist  $\mathfrak{Z}$  autark und  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{M}$ ,  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{N}$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{P}$ ,  $\bar{\mathfrak{F}}(\mathfrak{Z}) = \mathfrak{Q}$ , so ist für alle  $\xi \geq \omega$ :

$$\bar{\mathfrak{U}}^\xi = \mathfrak{M}^\xi = \mathfrak{P}^\xi, \quad \bar{\mathfrak{U}}_\xi = \mathfrak{N}^\xi = \mathfrak{Q}^\xi.$$

Nach (1) und (1.11) ist  $\mathfrak{Z}^\omega = (\underset{n}{S} \mathfrak{Z}^n)^1$ ; nach 34.1.21 ist  $\underset{n}{S} \mathfrak{Z}^n$  autark; nach (3.2) ist  $\bar{\mathfrak{U}}(\underset{n}{S} \mathfrak{Z}^n) = \underset{n}{S} \mathfrak{M}^n = \underset{n}{S} \mathfrak{P}^n$ ; nach 31.2.5 ist also  $\bar{\mathfrak{U}}^\omega = (\underset{n}{S} \mathfrak{M}^n)^1 = (\underset{n}{S} \mathfrak{P}^n)^1$ , also nach § 33 (1) und (1.11):  $\bar{\mathfrak{U}}^\omega = \mathfrak{M}^\omega = \mathfrak{P}^\omega$ ; ebenso ist  $\bar{\mathfrak{U}}_\omega = \mathfrak{N}^\omega = \mathfrak{Q}^\omega$ ; die Behauptung ist also richtig für  $\xi = \omega$ . Angenommen, sie gelte für alle der Ungleichung  $\omega \leq \eta < \xi$  genügenden  $\eta$ . Ist dann  $\xi$  isoliert, so ist  $\bar{\mathfrak{U}}_{\xi-1} = \mathfrak{N}^{\xi-1} = \mathfrak{Q}^{\xi-1}$ , also nach 34.3.11  $\bar{\mathfrak{F}}_{\xi-1} = \mathfrak{N}_\xi = \mathfrak{Q}_\xi$ , also durch Komplementbildung  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{Z}_{\xi-1}) = \mathfrak{P}^\xi = \mathfrak{M}^\xi$ , und nach 31.2.5  $\bar{\mathfrak{U}}^\xi = (\mathfrak{P}^\xi)^1 = (\mathfrak{M}^\xi)^1$ , und daher nach 33.1.2  $\bar{\mathfrak{U}}^\xi = \mathfrak{P}^\xi = \mathfrak{M}^\xi$ . Ist hingegen  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $\mathfrak{Z}^\xi = (\underset{\eta < \xi}{S} \mathfrak{Z}^\eta)^1$ ; da nach Annahme  $\bar{\mathfrak{U}}^\eta = \mathfrak{M}^\eta = \mathfrak{P}^\eta$  für

$\omega \leq \eta < \xi$ , ist zufolge (3.2):  $\overline{\mathcal{G}}(\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{X}^\eta) = \bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{M}^\eta = \bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{P}^\eta$ ; da nach 34.1.21  $\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{X}^\eta$  autark, ist also nach 31.2.5  $\overline{\mathcal{G}}^\xi = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{M}^\eta)^1 = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{P}^\eta)^1$ , also nach § 33 (1) und (1.11):  $\overline{\mathcal{G}}^\xi = \mathcal{M}^\xi = \mathcal{P}^\xi$ .

**34.3.22.** Ist  $\mathcal{X}$  autark, so ist  $\overline{\mathcal{G}}^{\xi-1}$  (bzw.  $\overline{\mathcal{G}}_{\xi+1}$ ) das System der Komplemente von  $(\overline{\mathcal{G}}_\xi)_1$  (bzw. von  $(\overline{\mathcal{G}}^\xi)_1$ ) bezüglich  $E$ .

Dies folgt unmittelbar aus 34.3.2 und 34.3.21.

**34.3.23.** Ist  $\mathcal{X}$  autark und  $\xi$  Grenzzahl, so ist  $\overline{\mathcal{G}}^\xi = (\bigcup_{\eta < \xi} \overline{\mathcal{G}}^\eta)^1$ ,  $\overline{\mathcal{G}}_\xi = (\bigcup_{\eta < \xi} \overline{\mathcal{G}}_\eta)^1$ .

Dies folgt bei Beachtung von (3.2) aus 34.3.21.

**34.3.3.** Ist  $\mathcal{X}$  autark, so ist  $\mathcal{X}^\xi = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{G}}^\xi, \overline{\mathcal{G}}_\xi)$ .

Setzen wir  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{N}$ , so ist nach 31.3.41  $\mathcal{X}_1^1 = \mathcal{C}(\mathcal{M}^1, \mathcal{N}^1)$ , und nach 31.2.5 ist  $\mathcal{M}^1 = \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}^1) = \overline{\mathcal{G}}^1$ , ebenso  $\mathcal{N}^1 = \overline{\mathcal{G}}_1$ ; die Behauptung ist also richtig für  $\xi = 1$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \xi$ . Ist dann  $\xi$  isoliert, so ist nach 34.2.31  $\mathcal{X}_\xi^\xi = (\mathcal{X}_{\xi-1}^{\xi-1})^*$ ; nach 34.2.2 ist  $\mathcal{X}_{\xi-1}^{\xi-1}$  völlig autark; setzen wir also:  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{X}_{\xi-1}^{\xi-1}) = \mathcal{R}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{X}_{\xi-1}^{\xi-1}) = \mathcal{Q}$ , so ist nach 31.4.31:  $\mathcal{X}_\xi^\xi = \mathcal{C}(\mathcal{R}^1, \mathcal{Q}^1)$ ; nach Annahme ist  $\mathcal{X}_{\xi-1}^{\xi-1} = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{G}}^{\xi-1}, \overline{\mathcal{G}}_{\xi-1})$ , also  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}_{\xi-1}^{\xi-1}) = \overline{\mathcal{G}}_{\xi-1}$ , also ist  $\mathcal{R}$  das System der Komplemente der Mengen von  $\overline{\mathcal{G}}_{\xi-1}$ , also  $\mathcal{R}^1$  das System der Komplemente der Mengen von  $(\overline{\mathcal{G}}_{\xi-1})_1$ , also nach 34.3.22  $\mathcal{R}^1 = \overline{\mathcal{G}}^\xi$ ; ebenso ist  $\mathcal{Q}^1 = \overline{\mathcal{G}}_\xi$ , also  $\mathcal{X}_\xi^\xi = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{G}}^\xi, \overline{\mathcal{G}}_\xi)$ . Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist nach 34.2.12  $\mathcal{X}_\xi^\xi = (\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{X}_\eta^1)$ ; nach 34.2.11 und 34.1.21 ist  $\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{X}_\eta^1$  autark; setzen wir also  $\mathcal{R} = \overline{\mathcal{G}}(\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{X}_\eta^1)$ ,  $\mathcal{Q} = \overline{\mathcal{G}}(\bigcup_{\eta < \xi} \mathcal{X}_\eta^1)$ , so ist nach 31.3.41  $\mathcal{X}_\xi^\xi = \mathcal{C}(\mathcal{R}^1, \mathcal{Q}^1)$ ; nach Annahme ist nun  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}_\eta^1) = \overline{\mathcal{G}}^\eta$  für  $\eta < \xi$ , also  $\mathcal{R} = \bigcup_{\eta < \xi} \overline{\mathcal{G}}^\eta$ , also nach 34.3.23  $\mathcal{R}^1 = \overline{\mathcal{G}}^\xi$ , und ebenso  $\mathcal{Q}^1 = \overline{\mathcal{G}}_\xi$ ; also ist  $\mathcal{X}_\xi^\xi = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{G}}^\xi, \overline{\mathcal{G}}_\xi)$ .

**34.3.4.** Ist  $\mathcal{X}$  autark und  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{N}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{X}) = \mathcal{P}$ ,  $\overline{\mathcal{F}}(\mathcal{X}) = \mathcal{Q}$ , so ist:  $\mathcal{M}_B = \mathcal{P}_B$ ,  $\mathcal{N}_B = \mathcal{Q}_B$ .

Dies folgt wegen 33.1.51 aus 34.3.21 für  $\xi = \omega_1$ .

**34.3.41.** Ist  $\mathcal{X}$  autark, und  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{M}$ ,  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{X}) = \mathcal{N}$ , so ist  $\mathcal{X}_B = \mathcal{C}(\mathcal{M}_B, *) = \mathcal{C}(*, \mathcal{N}_B) = \mathcal{C}(\mathcal{M}_B, \mathcal{N}_B)$ .

Nach 34.1.51 ist  $\mathcal{X}_B = \mathcal{X}^{\omega_1} = \mathcal{X}_{\omega_1} = \mathcal{X}_{\omega_1}^1$ , also nach 34.3.1 und 34.3.3:  $\mathcal{X}_B = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{G}}^{\omega_1}, *) = \mathcal{C}(*, \overline{\mathcal{G}}_{\omega_1}) = \mathcal{C}(\overline{\mathcal{G}}^{\omega_1}, \overline{\mathcal{G}}_{\omega_1})$ , und die Behauptung folgt aus 33.1.51 und 34.3.21.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (8) 1 (1905) S. 139; W. H. Young, Lond. Proc. (2) 12 (1912) S. 260; F. Hausdorff, Mengenlehre § 43.

**4. Einschlebung und Erweiterung.** Sei wieder  $\mathfrak{I}$  ein Funktionensystem auf  $E$ . Für die Baireschen Funktionen über  $\mathfrak{I}$  gilt folgender Einschlebungssatz:

**34.4.1.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark,  $g \in \mathfrak{I}_\xi$ ,  $h \in \mathfrak{I}^\xi$  und  $g \leq h$ , so gibt es ein  $f \in \mathfrak{I}_\xi^\xi$ , so daß  $g \leq f \leq h$ .

Nach 34.2.2 ist  $\mathfrak{I}_\xi^\xi$  völlig autark; nach 34.2.3 ist  $(\mathfrak{I}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{I}^\xi$ ,  $(\mathfrak{I}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{I}_\xi$ ; die Behauptung folgt also aus 32.2.11.

Nehmen wir wieder die Bezeichnungsweise (3) auf, so gilt:

**34.4.2.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark, so ist für jedes  $E' \subseteq E$ :  $\bar{\mathfrak{U}}((E' \mid \mathfrak{I})^\xi) = E' \mid \bar{\mathfrak{U}}^\xi$ ,  $\mathfrak{U}((E' \mid \mathfrak{I})_\xi) = E' \mid \mathfrak{U}_\xi$ .

Dies folgt aus 34.3.2, 34.3.21 und 33.3.2.

**34.4.21.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark und  $E' \subseteq E$ , so ist  $(E' \mid \mathfrak{I})^\xi = E' \mid \mathfrak{I}^\xi$ ,  $(E' \mid \mathfrak{I})_\xi = E' \mid \mathfrak{I}_\xi$ .

Nach 34.3.1 und 34.4.2 ist  $(E' \mid \mathfrak{I})^\xi = \mathfrak{C}(E' \mid \bar{\mathfrak{U}}^\xi, *)$ ,  $\mathfrak{I}^\xi = \mathfrak{C}(\bar{\mathfrak{U}}^\xi, *)$ . Da nach 34.3.2, 34.3.21 und 33.1.2  $\mathfrak{U}^\xi$  ein  $\sigma$ -System, ist also nach 32.4.11  $(E' \mid \mathfrak{I})^\xi = E' \mid \mathfrak{I}^\xi$ .

**34.4.211.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark und  $E' \subseteq E$ , so ist  $E' \mid \mathfrak{I}_\xi^\xi \subseteq (E' \mid \mathfrak{I})_\xi^\xi$ .

Dies folgt aus 34.4.21.

**34.4.22.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark und  $E - E' \in \bar{\mathfrak{U}}^\xi \mathfrak{U}_\xi$ , so ist  $(E' \mid \mathfrak{I})_\xi^\xi = E' \mid \mathfrak{I}_\xi^\xi$ .

Nach 34.3.3 und 34.4.2 ist  $(E' \mid \mathfrak{I})_\xi^\xi = \mathfrak{C}(E' \mid \bar{\mathfrak{U}}^\xi, E' \mid \mathfrak{U}_\xi)$ ,  $\mathfrak{I}_\xi^\xi = \mathfrak{C}(\bar{\mathfrak{U}}^\xi, \mathfrak{U}_\xi)$ . Nach 34.2.2 ist  $\mathfrak{I}_\xi^\xi$  völlig autark; also ist nach 32.4.13:  $E' \mid \mathfrak{I}_\xi^\xi = (E' \mid \mathfrak{I})_\xi^\xi$ .

**34.4.23.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark und  $E' \subseteq E$ , so ist  $(E' \mid \mathfrak{I})_B = E' \mid \mathfrak{I}_B$ .

Dies folgt unmittelbar aus 34.4.21.

**34.4.3.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark, so gibt es in  $\mathfrak{I}^\xi$  (bzw. in  $\mathfrak{I}_\xi$ ) zu jedem  $f \in \mathfrak{I}^\xi$  (bzw.  $f \in \mathfrak{I}_\xi$ ) eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen.

Nach 34.1.32 ist  $\mathfrak{I}^\xi = (\mathfrak{I}^\xi)^1$ ; nach 34.1.2 ist  $\mathfrak{I}^\xi$  autark; die Behauptung folgt also aus 32.5.2.

**34.4.31.** Ist  $\mathfrak{I}$  autark und  $\xi > 1$ , so gibt es in  $\mathfrak{I}_\xi^\xi$  zu jedem  $f \in \mathfrak{I}_\xi^\xi$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge von Treppenfunktionen.

Ist  $\xi$  isoliert, also  $\xi = \eta + 1$ , so ist nach 34.2.31:  $\mathfrak{I}_\xi^\xi = (\mathfrak{I}_\eta^\eta)^*$ ; nach 34.2.2 ist  $\mathfrak{I}_\eta^\eta$  autark und additiv; die Behauptung folgt also aus 32.5.31. Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist nach 34.3.3 und 34.3.21  $\mathfrak{U}(\mathfrak{I}_\xi^\xi) = \mathfrak{M}^\xi$ ,  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{I}_\xi^\xi) = \mathfrak{Q}^\xi$ , also durch Komplementbildung  $\bar{\mathfrak{U}}(\mathfrak{I}_\xi^\xi) = \mathfrak{M}_\xi^\xi$ ; hierin ist  $\mathfrak{M}^\xi = \left( \bigcap_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) \right)^1$ ,

$\mathfrak{M}_\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{M}^\eta + \mathfrak{M}_\eta) \right)_1$ , und da nach 34.2.2  $\mathfrak{T}_\xi^\xi$  völlig autark, folgt die Behauptung aus 32.5.3.

**34.4.4.** Ist  $\mathfrak{T}$  autark und symmetrisch, so gibt es zu jeder Treppenfunktion  $f \in \mathfrak{T}_{\xi+1}^{\xi-1}$  ein  $g \in \mathfrak{T}^\xi$  und ein  $h \in \mathfrak{T}_\xi$ , so daß  $f = g + h$ .

Nach 34.2.31 ist  $\mathfrak{T}_{\xi-1}^{\xi-1} = (\mathfrak{T}_\xi^\xi)^*$ ; nach 34.2.3 ist  $(\mathfrak{T}_\xi^\xi)^1 = \mathfrak{T}^\xi$ ,  $(\mathfrak{T}_\xi^\xi)_1 = \mathfrak{T}_\xi$ . Nach 34.2.2 und 34.2.4 ist  $\mathfrak{T}_\xi^\xi$  autark, additiv und symmetrisch. Die Behauptung folgt also aus 32.5.4.

## § 35. Die Baireschen Funktionen eines metrischen Raumes.

**1. Die Baireschen Funktionen eines metrischen Raumes.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $\mathfrak{C}$  das System der stetigen Funktionen in  $E$ . Wir bezeichnen dann die Baireschen Funktionen über  $\mathfrak{C}$  als die Baireschen Funktionen in  $E$ , die Funktionen aus  $\mathfrak{C}^\xi$  und  $\mathfrak{C}_\xi$  als die Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ , die Funktionen aus  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  als die ambigen Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ , oder, wenn  $\xi$  eine isolierte Zahl  $\geq 1$  ist, auch als die Funktionen  $(\xi - 1)$ -ter Klasse in  $E$ . Die Funktionen aus  $\mathfrak{C}^\xi$  (bzw.  $\mathfrak{C}_\xi$ ,  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ ) bezeichnen wir auch als  $\mathfrak{C}^\xi$ -Funktionen (bzw.  $\mathfrak{C}_\xi$ -Funktionen,  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ -Funktionen).

**35.1.1.** Für jedes  $\xi \geq 1$  gelten die Formeln:

$$\begin{aligned} (\mathfrak{C}^\xi)^1 &= \mathfrak{C}^\xi, & (\mathfrak{C}_\xi)_1 &= \mathfrak{C}_\xi; \\ (\mathfrak{C}^\xi)_1 &= (\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi)_1 = \mathfrak{C}_{\xi+1}, & (\mathfrak{C}_\xi^1)^1 &= (\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi)^1 = \mathfrak{C}^{\xi-1}. \end{aligned}$$

Dies folgt, da das System  $\mathfrak{C}$  der stetigen Funktionen autark ist, aus 34.1.32 und 34.1.3.

**35.1.11.** Für jedes  $\xi > 1$  ist:

$$\mathfrak{C}^\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{C}_\eta \right)^1, \quad \mathfrak{C}_\xi = \left( \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{C}^\eta \right)_1.$$

Dies folgt aus 34.1.31.

**35.1.2.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $\mathfrak{C}^\xi$  und  $\mathfrak{C}_\xi$  völlig autark.

Dies folgt aus 34.1.4.

**35.1.21.** Ist  $\xi$  Grenzzahl, so ist das System  $\bigcup_{\eta < \xi} (\mathfrak{C}^\eta + \mathfrak{C}_\eta) = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{C}^\eta = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{C}_\eta$  autark und additiv.

Dies folgt aus 34.1.21 und 34.1.41.

**35.1.3.** Es ist  $f \in \mathfrak{C}^\xi$  gleichbedeutend mit  $-f \in \mathfrak{C}_\xi$ .

Dies folgt, da  $\mathfrak{C}$  symmetrisch, aus 34.1.6.

**35.1.31.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $\mathfrak{C}^\xi + \mathfrak{C}_\xi$  symmetrisch.

Da  $\mathfrak{C}$  völlig autark, ist nach 31.3.23:

$$\mathfrak{C}_1^1 = \mathfrak{C}.$$



**35.1.4.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist  $\mathcal{C}_\xi^\xi$  völlig autark und symmetrisch.

Dies folgt aus 34.2.2, 34.2.4.

**35.1.5.** Für jedes  $\xi \geq 1$  gelten die Formeln:

$$(\mathcal{C}_\xi^\xi)^1 = \mathcal{C}_\xi^\xi, \quad (\mathcal{C}_\xi^\xi)_1 = \mathcal{C}_\xi^\xi, \quad (\mathcal{C}_\xi^\xi)^* = \mathcal{C}_{\xi-1}^{\xi+1}.$$

Dies folgt aus 34.2.3, 34.2.31.

**35.1.6.** Das System  $\mathcal{C}_B$  ist völlig autark und symmetrisch.

Dies folgt aus 34.1.53, 34.1.62.

**35.1.61.**  $\mathcal{C}_B$  ist das kleinste alle stetigen Funktionen in  $E$  enthaltende System  $\mathfrak{L}$ , für das  $\mathfrak{L}^1 = \mathfrak{L}_1 = \mathfrak{L}$  gilt.

Dies folgt aus 34.1.52.

**35.1.62.**  $\mathcal{C}_B$  ist das kleinste alle stetigen Funktionen in  $E$  enthaltende System  $\mathfrak{L}$ , für das  $\mathfrak{L}^* = \mathfrak{L}$  gilt.

Dies folgt aus 34.2.5, 34.2.61.

**35.1.7.** Eine Eigenschaft, die allen stetigen Funktionen in  $E$  zukommt und bei Grenzübergang erhalten bleibt, kommt auch allen Baireschen Funktionen in  $E$  zu.

Dies folgt aus 34.1.521.

**2. Bairesche Funktionen und Borelsche Mengen eines metrischen Raumes.** Sei  $\mathcal{G}$  das System der offenen,  $\mathfrak{F}$  das System der abgeschlossenen Mengen des metrischen Raumes  $E$ . Für das System  $\mathcal{C}$  der stetigen Funktionen in  $E$  gilt dann nach 25.8.1, 25.8.11, 25.8.14:

$$(2) \quad \overline{\mathcal{G}}(\mathcal{C}) = \mathcal{G}(\mathcal{C}) = \mathcal{G}, \quad \overline{\mathfrak{F}}(\mathcal{C}) = \mathfrak{F}(\mathcal{C}) = \mathfrak{F}.$$

$$(2.1) \quad \mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{G}, \mathcal{G}).$$

Machen wir Gebrauch von der in § 33 (4) eingeführten Bezeichnungsweise, so gilt:

**35.2.1.** Für alle  $\xi \geq 1$  ist:  $\mathcal{C}_\xi^\xi = \mathcal{C}(\mathfrak{B}^\xi, *)$ ,  $\mathcal{C}_\xi = \mathcal{C}(*, \mathfrak{B}^\xi)$ .

Dies folgt wegen (2) aus 34.3.1, 34.3.2, 34.3.21, 33.4.1, 33.4.11.

**35.2.11.** Für alle  $\xi \geq 1$  ist:  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}^\xi$ ,  $\mathcal{G}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}^\xi$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}_{\xi-1}^\xi$ ,  $\mathfrak{F}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}_{\xi+1}^\xi$ .

Dies folgt aus 35.2.1 und 34.3.11.

**35.2.2.** Für alle  $\xi \geq 1$  ist:  $\mathcal{C}_\xi^\xi = \mathcal{C}(\mathfrak{B}^\xi, \mathfrak{B}^\xi)$ .

Dies folgt aus 34.3.3, 35.2.11.

**35.2.21.** Für alle  $\xi \geq 1$  ist:  $\overline{\mathcal{G}}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathcal{G}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}^\xi$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{F}(\mathcal{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{B}_\xi^\xi$ .

Dies folgt aus 35.2.2 und 33.4.2.

**35.2.3.** Das System  $\mathfrak{C}_B$  aller Baireschen Funktionen in  $E$  ist gegeben durch  $\mathfrak{C}_B = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}_B, *) = \mathfrak{C}(*, \mathfrak{B}_B) = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}_B, \mathfrak{B}_B)$ .

Dies folgt wegen § 33 (4.41) aus 34.3.41.

**35.2.31.** Ist  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$  und  $B$  eine Borelsche Menge in  $\bar{R}^1$ , so ist die Menge  $[f(x) \in B]$  aller  $x \in E$  mit  $f(x) \in B$  eine Borelsche Menge in  $E$ .

Nach § 2 (1.9) und 2.1.3 gilt:

$$(2.2) \quad \begin{aligned} [f(x) \in S B_v] &= S [f(x) \in B_v], \quad [f(x) \in D B_v] = D [f(x) \in B_v], \\ [f(x) \in \bar{R}_1 - B] &= E - [f(x) \in B]. \end{aligned}$$

Ist  $B$  eine offene Halbgerade  $y > a$  (bzw.  $y < b$ ) des  $\bar{R}_1$ , so ist  $[f(x) \in B] = [f(x) > a]$  (bzw.  $= [f(x) < b]$ ); dann ist nach 35.2.3 also  $[f(x) \in B]$  eine Borelsche Menge in  $E$ ; da das Intervall  $(a, b)$  des  $\bar{R}_1$  der Durchschnitt der Halbgeraden  $y > a$  und  $y < b$  ist, gilt dies nach der zweiten Formel (2.2) auch, wenn  $B$  ein Intervall  $(a, b)$  ist; da jede offene Menge des  $\bar{R}_1$  Summe abzählbar vieler offener Intervalle und höchstens zweier offener Halbgeraden des  $\bar{R}_1$  ist, gilt es nach der ersten Formel (2.2) auch, wenn  $B$  eine offene Menge des  $\bar{R}_1$  ist, und wegen der dritten Formel (2.2) gilt es auch, wenn  $B$  eine abgeschlossene Menge des  $\bar{R}_1$  ist; die Behauptung ist also richtig für alle  $B \in \mathfrak{B}^1 + \mathfrak{B}_1$ . Sei nun  $\xi < \omega_1$  und es gelte die Behauptung für alle  $B \in \mathfrak{B}^\eta + \mathfrak{B}_\eta$  ( $\eta < \xi$ ); wegen der ersten und zweiten Formel (2.2) gilt sie dann auch für alle  $B \in \mathfrak{B}^\xi + \mathfrak{B}_\xi$ , sie gilt also für alle  $B \in \mathfrak{B}_\xi$ .

Für die charakteristischen Funktionen (§ 1, 5) der Borelschen Mengen des Raumes  $E$  gelten die Sätze:

**35.2.4.** Ist  $M \subseteq E$ , so ist, damit die charakteristische Funktion  $f$  von  $M$  zu  $\mathfrak{C}^\xi$  (bzw. zu  $\mathfrak{C}_\xi$ ) gehöre, notwendig und hinreichend, daß  $M \in \mathfrak{B}^\xi$  (bzw.  $M \in \mathfrak{B}_\xi$ ) sei.

Die Mengen  $[f(x) > y]$  sind:  $A, M, E$ , gehören also zu  $\mathfrak{B}^\xi$  dann und nur dann, wenn  $M \in \mathfrak{B}^\xi$ ; die Mengen  $[f(x) < y]$  sind:  $A, E - M, E$ , gehören also nach 33.4.2 zu  $\mathfrak{B}^\xi$  dann und nur dann, wenn  $M \in \mathfrak{B}_\xi$ . Die Behauptung folgt also aus 35.2.1.

**35.2.41.** Ist  $M \subseteq E$ , so ist, damit die charakteristische Funktion von  $M$  zu  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  gehöre, notwendig und hinreichend, daß  $M \in \mathfrak{B}_\xi^\xi$  sei.

Dies folgt aus 35.2.4.

**35.2.42.** Ist  $M \subseteq E$ , so ist, damit die charakteristische Funktion von  $M$  zu  $\mathfrak{C}_B$  gehöre, notwendig und hinreichend, daß  $M \in \mathfrak{B}_B$  sei.

Dies folgt aus 35.2.4.

**35-2-5.** Ist  $f$  eine Treppenfunktion aus  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ , so ist für alle  $y$ :  $[f(x) = y] \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}$ .

Seien  $c_1 < c_2 < \dots < c_n$  die endlich vielen Werte von  $f$ . Da  $[f(x) = c_r] = [f(x) \geq c_r] \cdot [f(x) \leq c_r]$ , ist nach 35-2-21 und 33-4-31:  $[f(x) = c_r] \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ; da für hinlänglich kleines  $h > 0$ :  $[f(x) = c_r] = [f(x) > c_r - h] \cdot [f(x) < c_r + h]$ , ist nach 35-2-21 und 33-4-31:  $[f(x) = c_r] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$ . Also ist  $[f(x) = c_r] \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}} = \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}$ .

**35-2-6.** Ist  $\xi \geq 3$ ,  $f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}$  (bzw.  $f \in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $f \in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ), so gilt auch für jede Funktion  $g$  auf  $E$ , die sich von  $f$  nur in abzählbar vielen Punkten unterscheidet:  $g \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}$  (bzw.  $g \in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $g \in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ).

Nach 35-2-11 ist  $[f(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$ , also nach 33-4-51 auch  $[g(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$ , also  $g \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}$  nach 35-2-1.

Ist es erforderlich, den bei Bildung der Systeme  $\mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathfrak{U}_B^{\mathfrak{B}}$  zugrunde gelegten Raum in Evidenz zu setzen, so schreiben wir ausführlicher  $\mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E)$ ,  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ,  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ,  $\mathfrak{U}_B^{\mathfrak{B}}(E)$ .

**35-2-7.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , ist  $E = \bigcup_v E_v$  mit  $E_v \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}$ , und ist  $E_v, 1 f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E_v)$  (bzw.  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E_v)$ ,  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E_v)$ ), so ist  $f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E)$  (bzw.  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ,  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ).

Setzen wir  $E_v, 1 f = f_v$ , so ist  $[f(x) > y] = \bigcup_v [f_v(x) > y]$ ; hierin ist nach 35-2-11  $[f_v(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}(E_v)$ , also nach 33-4-73 auch  $[f_v(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}(E)$ , und da  $\mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}(E)$  nach § 33 (4-3) ein  $\sigma$ -System, ist auch  $[f(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}(E)$ ; also ist  $f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E)$  nach 35-2-1.

**35-2-71.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , ist  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$  mit  $E_v \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ), und ist  $E_v, 1 f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E_v)$ , (bzw.  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E_v)$ ,  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E_v)$ ) für  $v = 1, 2, \dots, n$ , so ist  $f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E)$  (bzw.  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ,  $\in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ).

Setzen wir  $E_v, 1 f = f_v$ , so ist  $[f(x) \leq y] = \bigcap_{v=1}^n [f_v(x) \leq y]$ ; da nach 35-2-11  $[f_v(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}(E_v)$ , ist hierin  $[f_v(x) \leq y] \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}(E_v)$ , also nach 33-4-73:  $[f_v(x) \leq y] \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ ; da nach 33-4-31  $\mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$  ein Ring, ist also auch  $[f(x) \leq y] \in \mathfrak{B}_\xi^{\mathfrak{B}}(E)$ , mithin  $[f(x) > y] \in \mathfrak{B}^{\mathfrak{B}}(E)$ ; also ist  $f \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}(E)$  nach 35-2-1.

**35-2-72.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , ist  $E = \bigcup_v E_v$  mit  $E_v \in \mathfrak{B}_B^{\mathfrak{B}}$ , und ist  $E_v, 1 f \in \mathfrak{U}_B^{\mathfrak{B}}(E_v)$ , so ist  $f \in \mathfrak{U}_B^{\mathfrak{B}}(E)$ .

Dies ist für  $\xi = \omega_1$  enthalten in 35-2-7.

**3. Einschiegung und Erweiterung.** Wir bezeichnen wieder mit  $\mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $\mathfrak{U}_B^{\mathfrak{B}}$  die Systeme Bairescher Funktionen in  $E$ .

**35-3-1.** Ist  $g \in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ ,  $h \in \mathfrak{U}^{\mathfrak{B}}$  und  $g \leq h$ , so gibt es ein  $f \in \mathfrak{U}_\xi^{\mathfrak{B}}$ , so daß  $g \leq f \leq h$ . Dies folgt aus 34-4-1.

**35-3-2.** Für jedes  $E' \subseteq E$  ist  $\mathfrak{G}^{\zeta}(E') = (E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta} = E' \cap \mathfrak{G}^{\zeta}$ ,  $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E') = (E' \cap \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}})^{\zeta} = E' \cap \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}$ .

Nach 34-4-2 ist  $\bar{\mathfrak{G}}((E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta}) = E' \cap \bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}^{\zeta})$ , also nach 35-2-11 und 33-4-7  $\bar{\mathfrak{G}}((E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta}) = E' \cap \mathfrak{B}^{\zeta} = \mathfrak{B}^{\zeta}(E')$ ; nach 34-3-1 ist also  $(E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta} = \mathfrak{C}(\mathfrak{B}^{\zeta}(E'), *)$ , somit nach 35-2-1  $(E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta} = \mathfrak{G}^{\zeta}(E')$ . Und nach 34-4-21 ist  $(E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta} = E' \cap \mathfrak{G}^{\zeta}$ .

**35-3-3.** Für jedes  $E' \subseteq E$  ist  $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E') = (E' \cap \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}})^{\zeta} \subseteq E' \cap \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}$ .

Dies folgt aus 35-3-2 und 34-4-211.

**35-3-31.** Ist  $E' \in \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ , so ist  $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E') = (E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta} = E' \cap \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}$ .

Ist  $E' \in \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ , so ist  $E - E' \in \mathfrak{B}_{\frac{1}{2}}$ , also nach 35-2-11:  $E - E' \in \bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}^{\zeta}) \cap \mathfrak{G}(\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta})$ . Nach 34-4-22 ist also  $(E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta} = E' \cap \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}$ , und nach 35-3-3 ist auch  $\bar{\mathfrak{G}}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E') = (E' \cap \mathfrak{G})^{\zeta}$ .

**35-3-4.** Für jedes  $E' \subseteq E$  ist  $\mathfrak{G}_B(E') = (E' \cap \mathfrak{G})_B = E' \cap \mathfrak{G}_B$ .

Dies folgt aus 35-3-2.

Literatur: G. v. Alexits, Fund. math. 15 (1930) S. 51. W. Sierpiński, Fund. math. 16 (1930) S. 81.

**4. Zusammensetzung.** Für die Zusammensetzung Bairescher Funktionen gelten folgende Sätze:

**35-4-1.** Ist  $\varphi(z)$  eine stetige Funktion im  $\bar{R}_1$  und  $f \in \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$ , so ist auch  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$ .

Nach 35-1-4 ist  $\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$  symmetrisch und völlig autark; nach 31-3-23 ist also  $(\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E))_1^1 = \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$ ; die Behauptung folgt also aus 31-3-6.

**35-4-2.** Ist  $\zeta$  endlich,  $\varphi(z) \in \mathfrak{G}^{\zeta}(\bar{R}_1)$  (bzw.  $\varphi(z) \in \mathfrak{G}_{\zeta}(\bar{R}_1)$ ) und  $f \in \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$ , so ist  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}^{\zeta+\zeta-1}(E)$  (bzw.  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}_{\zeta+\zeta-1}(E)$ ).

Die Behauptung ist richtig für  $\zeta = 1$ ; denn ist  $\varphi(z) \in \mathfrak{G}^1(\bar{R}_1)$ , so ist  $\varphi = \lim_n \varphi_n$ , wo  $\varphi_n$  stetig im  $\bar{R}_1$  und  $\varphi_n \leq \varphi_{n-1}$ ; dann gilt auch  $\varphi(f) = \lim_n \varphi_n(f)$ ,  $\varphi_n(f) \leq \varphi_{n-1}(f)$ , und da nach 35-4-1  $\varphi_n(f) \in \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$ , ist  $\varphi(f) \in (\mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta})_1^1$ , also nach 35-1-5  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}^{\zeta}(E)$ . Angenommen, die Behauptung gelte für  $\zeta$ ; wir haben zu zeigen, daß sie dann auch für  $\zeta + 1$  gilt; sei also  $\varphi \in \mathfrak{G}^{\zeta+1}(\bar{R}_1)$ ; dann ist  $\varphi = \lim_n \varphi_n$ , wo  $\varphi_n \in \mathfrak{G}_{\zeta}(\bar{R}_1)$  und  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ; dann gilt auch  $\varphi(f) = \lim_n \varphi_n(f)$ ,  $\varphi_n(f) \leq \varphi_{n+1}(f)$ , und da nach Annahme  $\varphi_n(f) \in \mathfrak{G}_{\zeta+\zeta-1}(E)$ , ist  $\varphi_n(f) \in \mathfrak{G}^{\zeta+\zeta}(E)$ .

**35-4-21.** Ist  $\varphi(z) \in \mathfrak{G}^{\zeta}(\bar{R}_1)$  (bzw.  $\varphi(z) \in \mathfrak{G}_{\zeta}(\bar{R}_1)$ ) und  $f \in \mathfrak{G}_{\frac{1}{2}}^{\zeta}(E)$ , so ist (für alle  $\zeta$ ):  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}^{\zeta+\zeta}(E)$  (bzw.  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}_{\zeta+\zeta}(E)$ ).

Nach 35-4-2 ist die Behauptung richtig für  $\zeta < \omega$ . Angenommen, sie sei richtig für alle  $\eta < \zeta$ ; ist dann  $\varphi \in \mathfrak{G}^{\zeta}(\bar{R}_1)$ , so ist nach 35-1-11  $\varphi = \lim_n \varphi_n$ .

wo  $\varphi_n \in \mathfrak{G}_{\eta_n}(R_1)$  ( $\eta_n < \zeta$ ) und  $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ ; da  $\varphi(f) = \lim_n \varphi_n(f)$ ,  $\varphi_n(f) \leq \varphi_{n+1}(f)$ , und da nach Annahme  $\varphi_n(f) \in \mathfrak{G}_{\xi+\eta_n}(E)$  ( $\xi + \eta_n < \xi + \zeta$ ), ist  $\varphi(f) \in \left( \bigcup_{\eta < \xi + \zeta} \mathfrak{G}_\eta(E) \right)^1$ , d. h. nach 35.1.11  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}_{\xi+\zeta}^+(E)$ .

**35.4.3.** Ist  $\varphi(z) \in \mathfrak{G}_\zeta^+(R_1)$  und  $f \in \mathfrak{G}_\xi^+(E)$ , so ist  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}_{\xi+\zeta}^+(E)$  und, wenn  $\zeta$  endlich, auch  $\varphi(f) \in \mathfrak{G}_{\xi+\zeta-1}^+(E)$ .

Dies folgt aus 35.4.21 und 35.4.2.

**35.4.31.** Ist  $\varphi$  eine Bairesche Funktion im  $\bar{R}_1$ , und  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$ , so ist auch  $\varphi(f)$  eine Bairesche Funktion in  $E$ .

Dies folgt aus 35.4.3.

**5. Stetigkeitseigenschaften der Baireschen Funktionen.** Sei  $E$  ein metrischer Raum, und seien  $f$  und  $f$ , Funktionen auf  $E$ ; dann gilt:

**35.5.1.** Ist  $f = \lim_n f_n$ , und ist  $f_n$  stetig bis auf eine Menge erster Kategorie, so ist auch  $f$  stetig bis auf eine Menge erster Kategorie.

Nach Annahme gibt es eine Menge erster Kategorie  $C_n$ , so daß  $(E - C_n) \models f_n$  stetig. Setzen wir  $C = \bigcup_n C_n$ , so ist nach 19.4.2 auch  $C$  von erster Kategorie, und es ist auch  $(E - C) \models f$ , stetig. Nach 28.8.11 ist die Menge  $B$  aller Punkte ungleichmäßiger Konvergenz von  $((E - C) \models f_n)$  von erster Kategorie in  $E - C$ , also nach 19.4.3 auch in  $E$ . Nach 28.3.2 ist  $(E - (B + C)) \models f$  stetig, und nach 19.4.2 ist  $B + C$  von erster Kategorie.

**35.5.2.** Jede Bairesche Funktion in  $E$  ist stetig bis auf eine Menge erster Kategorie.

Dies folgt aus 35.5.1 und 35.1.7.

**35.5.21.** Ist  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$  und  $A \subseteq E$ , so ist  $A \models f$  stetig bis auf eine Menge erster Kategorie.

Nach 35.3.4 ist  $A \models f$  eine Bairesche Funktion in  $A$ ; die Behauptung folgt also aus 35.5.2.

**35.5.22.** Ist  $E$  eine Youngsche Menge,  $A$  ein  $G_\delta$  in  $E$  und  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$ , so ist  $A \models f$  punktweise unstetig bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie.

Nach 35.5.21 ist  $A \models f$  stetig bis auf eine Menge erster Kategorie. Nach 19.1.2 ist  $A$  eine Youngsche Menge, so daß in 27.4.9 unter den  $\mathfrak{M}$ -Mengen die Mengen erster Kategorie in  $A$  verstanden werden können; die Behauptung folgt also aus 27.4.9.

Wir werden in § 41, 1 sehen, daß die Umkehrung von 35.5.21 und 35.5.22 nicht gilt.

**35.5.3.** Damit  $f = \lim_n f_n$  sei, wo die Unstetigkeitspunkte von  $f_n$  eine Menge erster Kategorie bilden, ist notwendig und hinreichend, daß  $f$  stetig sei bis auf eine Menge erster Kategorie.

Notwendig: Bilden die Unstetigkeitspunkte von  $f_n$  eine Menge erster Kategorie, so ist  $f_n$  stetig bis auf eine Menge erster Kategorie, und die Behauptung folgt aus 35.5.1. Hinreichend: Nach Annahme gibt es eine Menge  $B$  erster Kategorie, so daß  $(E - B) \models f$  stetig; da  $B$  von erster Kategorie, ist  $B = \bigcup_n B_n$ , wo  $B_n$  nirgends dicht; indem wir  $B_n$  ersetzen durch  $B_1 + B_2 + \dots + B_n$ , können wir noch annehmen:  $B_n \subseteq B_{n+1}$ . Nach 11.2.12 ist auch  $B_n^0$  nirgends dicht; setzen wir  $C = \bigcup_n B_n^0$ , so ist also auch  $C$

von erster Kategorie. Wir zerlegen nun nach § 19, 5:  $E = E_{IIi} + (E - E_{IIi})$ ; dann ist  $E = (E_{IIi} - C) + E_{IIi} (C - B_n^0) + E_{IIi} B_n^0 + (E - E_{IIi})$ . Hierin ist  $E_{IIi} - C$  dicht in  $E_{IIi}$ ; denn anderenfalls gäbe es nach 11.1.8 eine (in  $E_{IIi}$ , also auch in  $E$ ) offene Menge  $G$ , so daß  $A \subset G \subseteq E_{IIi}$  und  $(E_{IIi} - C)G = A$ ; dann aber wäre  $A \subset G \subseteq C$ , also wäre  $G$  von erster Kategorie, im Widerspruche mit 19.5.2. Wir setzen nun  $(E_{IIi} - C) \models f = g$ ; dann ist  $g$  stetig; da  $E_{IIi} - C$  dicht in  $E_{IIi}$ , also nach 11.3.1  $E_{IIi} \subseteq (E_{IIi} - C)^0$ , ist die obere Schrankenfunktion (§ 26, 2)  $\bar{g}$  von  $g$  definiert in allen Punkten von  $E_{IIi}$ . Wir definieren nun eine Funktion  $f_n$  auf  $E$  durch:  $f_n = f$  auf  $(E_{IIi} - C) + E_{IIi} B_n^0 + (E - E_{IIi})$ ,  $f_n = \bar{g}$  auf  $E_{IIi} (C - B_n^0)$ . Ist  $a \in E$ , so ist, wegen  $C = \bigcup_n B_n^0$ ,  $B_n^0 \subseteq B_{n+1}^0$ , für fast alle  $n$ :  $a \sim_\varepsilon C - B_n^0$ , also gilt  $f_n(a) = f(a)$  für fast alle  $n$ ; also gilt auf ganz  $E$ :  $\lim_n f_n = f$ . Es ist also

nur mehr zu zeigen, daß die Unstetigkeitspunkte von  $f_n$  eine Menge erster Kategorie bilden. Da  $C$  von erster Kategorie und nach 19.5.83  $E - E_{IIi}$  von erster Kategorie, genügt es, zu zeigen:  $f_n$  ist stetig in jedem Punkte von  $E_{IIi} - C$ . Sei  $a \in E_{IIi} - C$ ; da  $E_{IIi} - B_n^0$  offen und  $g = (E_{IIi} - C) \models f$  stetig, gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine Umgebung  $U_a \subseteq E_{IIi} - B_n^0$ , so daß:

$$(5) \quad \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon \text{ für alle } x \in (E_{IIi} - C) U_a;$$

dann ist, da  $E_{IIi} - C$  dicht in  $E_{IIi}$ , also  $(E_{IIi} - C) U_a$  nach 11.3.8 dicht in  $U_a$ :

$$(5.1) \quad \|\bar{g}(x) - g(a)\| \leq \varepsilon \text{ für alle } x \in U_a;$$

nach Definition von  $f_n$  ist  $f_n(x) = f(x) = g(x)$  für alle  $x \in U_a - C$ , insbesondere also  $f_n(a) = g(a)$ , und wegen  $U_a \subseteq E_{IIi} - B_n^0$  ist  $f_n(x) = \bar{g}(x)$  für alle  $x \in U_a C$ ; aus (5) und (5.1) folgt also:  $\|f_n(x) - f_n(a)\| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in U_a$ , d. h.  $f_n$  ist stetig in  $a$ , w. z. b. w.

**35.5.31.** Ist  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$ , so ist  $f = \lim_n f_n$ , wo die Unstetigkeitspunkte von  $f_n$  eine Menge erster Kategorie in  $E$  bilden.

Dies folgt aus 35.5.2 und 35.5.3.

**35.5.32.** Ist  $f$  eine Bairesche Funktion in der Youngschen Menge  $E$ , so ist  $f = \lim f_n$ , wo  $f_n$  punktweise unstetig.

Dies folgt aus 35.5.31 und 26.5.23.

Literatur: R. Baire, Acta math. 30(1906) S.27; C. Kuratowski, Fund.math. 5 (1924) S. 75.

**6. Näherungseigenschaften.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq E$ ,  $f$  eine Funktion auf  $A$ , und  $\varrho$  eine positive Zahl: dann sagen wir:  $f$  ist mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi$ -Funktion, wenn es eine Funktion  $g \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(A)$  gibt, so daß  $\|f(x) - g(x)\| \leq \varrho$  für alle  $x \in A$ . Ist dann  $A' \subseteq A$ , so ist nach 35.3.3 auch  $A'$  1  $f$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi$ -Funktion.

**35.6.1.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , und ist  $f$  für jedes  $\varrho > 0$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi$ -Funktion, so ist  $f \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ .

Nach Annahme gibt es ein  $g_n \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ , so daß  $\|g_n(x) - f(x)\| \leq \frac{1}{n}$  für alle  $x \in E$ . Da  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$  nach 35.1.4 geschlossen (§ 30, 4), ist auch  $f \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ .

**35.6.2.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , ist  $E = \bigcup A_\nu$ , wo  $A_\nu \in \mathfrak{B}_\varepsilon^\xi(E)$ , und ist  $A_\nu$  1  $f$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi$ -Funktion, so ist auch  $f$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi$ -Funktion.

Da nach 33.4.32  $\mathfrak{B}_\varepsilon^\xi(E)$  ein Körper, können wir wegen 3.3.11 ohne weiteres annehmen, die  $A_\nu$  seien disjunkt. Nach Annahme gibt es eine Funktion  $g_\nu \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(A_\nu)$ , so daß  $\|g_\nu(x) - f(x)\| \leq \varrho$  für alle  $x \in A_\nu$ . Definieren wir eine Funktion  $g$  auf  $E$  durch:  $g = g_\nu$  auf  $A_\nu$ , so ist  $\|g(x) - f(x)\| \leq \varrho$  für alle  $x \in E$ , und da  $A_\nu \in \mathfrak{B}_\varepsilon^\xi(E) \subseteq \mathfrak{B}^\xi(E)$ , ist nach 35.2.7  $g \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ .

**35.6.21.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$  und gibt es für jedes  $\varrho > 0$  eine Darstellung  $E = \bigcup A_\nu$  mit  $A_\nu \in \mathfrak{B}_\varepsilon^\xi(E)$ , so daß  $A_\nu$  1  $f$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\xi$ -Funktion, so ist  $f \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ .

Dies folgt aus 35.6.2 und 35.6.1.

**35.6.3.** Ist  $\xi > 1$ , so ist, damit  $f \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es für jedes  $\varrho > 0$  endlich viele Mengen  $A_\varrho, \nu \in \mathfrak{B}_\varepsilon^\xi(E)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n_\varrho$ ) und endlich viele endliche Zahlen  $c_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n_\varrho$ ) gebe, so daß  $E = \bigcup_{\nu=1}^{n_\varrho} A_\varrho$ , und  $\|f(x) - c_\nu\| \leq \varrho$  für alle  $x \in A_\varrho$ .

Notwendig: Ist  $f \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ , so gibt es nach 34.4.31 eine Treppenfunktion  $g_\varrho \in \mathfrak{G}_\varepsilon^\xi(E)$ , so daß  $\|f(x) - g_\varrho(x)\| \leq \varrho$  für alle  $x \in E$ ; seien  $c_1, c_2, \dots, c_{n_\varrho}$  die endlich vielen Werte, die  $g_\varrho$  annimmt, und sei  $A_\varrho, \nu = [g_\varrho(x) = c_\nu]$ ; dann ist nach 35.2.5:  $A_\varrho, \nu \in \mathfrak{B}_\varepsilon^\xi(E)$ ,  $E = \bigcup_{\nu=1}^{n_\varrho} A_\varrho, \nu$ ,  $\|f(x) - c_\nu\| \leq \varrho$  für

alle  $x \in A_\nu$ . Hinreichend: Da jede Konstante eine  $\mathcal{G}_\xi^1$ -Funktion ist, folgt dies aus 35-6-21.

**35-6-4.** Ist  $\xi \geq 1$ , so ist, damit  $f \in \mathcal{G}_\xi^1(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es für jedes  $\varrho > 0$  eine Folge von Mengen  $A_\nu, \nu \in \mathbb{N}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) und eine Folge von Zahlen  $c_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) gebe, so daß  $E = \bigcup_\nu A_\nu$ , und  $\|f(x) - c_\nu\| < \varrho$  für alle  $x \in A_\nu$ .

Notwendig: Man wähle die  $c_\nu$  so, daß es zu jedem  $y \in \bar{R}_1$  ein  $c_\nu$  mit  $\|y - c_\nu\| < \varrho$  gibt; da, wenn  $S$  die Schränkungstransformation bedeutet, nach 35-1-4 auch  $S(f) \in \mathcal{G}_\xi^1(E)$ , ist nach 35-2-2 [ $S(f(x)) < S(c_\nu) + \varrho$ ]  $\in \mathcal{B}^\xi(E)$ , [ $S(f(x)) > S(c_\nu) - \varrho$ ]  $\in \mathcal{B}^\xi(E)$ , also, wenn [ $S(f(x)) < S(c_\nu) + \varrho$ ] [ $S(f(x)) > S(c_\nu) - \varrho$ ]  $= A_\nu$ , gesetzt wird, auch  $A_\nu \in \mathcal{B}^\xi(E)$ . Diese Mengen  $A_\nu$  leisten das Verlangte. Hinreichend: Setzen wir  $\varrho = \frac{1}{n}$ , so erhalten wir nach Voraussetzung eine Folge von Mengen  $A_\nu^{\frac{1}{n}}, \nu \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{B}^\xi(E)$ , so daß  $E = \bigcup_\nu A_\nu^{\frac{1}{n}}$ , und  $\|f(x) - f(x')\| < \frac{2}{n}$  für  $x \in A_\nu^{\frac{1}{n}}, x' \in A_\nu^{\frac{1}{n}}$ . Sei  $x \in [f(x) > y]$ , d. h.  $f(x) > y$ ; wir wählen  $n$  so, daß  $\frac{2}{n} < \|f(x) - y\|$ ; es gibt ein  $\nu^*$ , so daß  $x \in A_{\nu^*}^{\frac{1}{n}}$ , und da  $\|f(x) - f(x')\| < \frac{2}{n}$  für alle  $x' \in A_{\nu^*}^{\frac{1}{n}}$ , ist  $f(x') > y$  für alle  $x' \in A_{\nu^*}^{\frac{1}{n}}$ , also  $A_{\nu^*}^{\frac{1}{n}} \subseteq [f(x) > y]$ . Zu jedem  $x \in [f(x) > y]$  gibt es also eine Menge  $A_{\nu^*}^{\frac{1}{n}}$ , die  $\subseteq [f(x) > y]$  ist. Also ist  $[f(x) > y]$  Summe abzählbar vieler Mengen  $A_\nu^{\frac{1}{n}}$ , und wegen  $A_\nu^{\frac{1}{n}} \in \mathcal{B}^\xi(E)$  ist auch  $[f(x) > y] \in \mathcal{B}^\xi(E)$ . Ebenso sieht man, daß  $[f(x) < y] \in \mathcal{B}^\xi(E)$ ; also ist  $f \in \mathcal{G}_\xi^1(E)$  nach 35-2-2.

**7. Verhalten in einem Punkte.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq E$ ,  $f$  eine Funktion auf  $A$ , und  $\varrho$  eine positive Zahl; dann sagen wir:  $f$  ist im Punkte  $a \in A$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathcal{G}_\xi^1$ -Funktion, wenn es eine Umgebung  $U_a$  gibt, so daß  $U_a \cap A$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathcal{G}_\xi^1$ -Funktion ist. Wir sagen:  $f$  ist im Punkte  $a \in A$  eine  $\mathcal{G}_\xi^1$ -Funktion, wenn  $f$  für jedes  $\varrho > 0$  im Punkte  $a$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathcal{G}_\xi^1$ -Funktion ist.

**35-7-1.** Damit die Funktion  $f$  auf  $E$  im Punkte  $a$  eine  $\mathcal{G}_1^1$ -Funktion sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie stetig in  $a$  sei.

Notwendig: Nach Annahme gibt es zu jedem  $\varrho > 0$  eine Umgebung  $U_a$  und eine Funktion  $g \in \mathcal{G}_1^1(U_a)$  (d. h. eine stetige Funktion auf  $U_a$ ), so daß  $\|f(x) - g(x)\| \leq \varrho$  für alle  $x \in U_a$ ; da  $g$  stetig, gibt es eine Umgebung  $U'_a \subseteq U_a$ , so daß  $\|g(x) - g(a)\| < \varrho$  für alle  $x \in U'_a$ ; für alle



$x \in U'_a$  ist dann auch:  $\|f(x) - f(a)\| \leq \|f(x) - g(x)\| + \|g(x) - g(a)\| + \|g(a) - f(a)\| < 3\rho$ , d. h.  $f$  ist stetig in  $a$ . Hinreichend: Ist  $f$  stetig in  $a$ , so gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\|f(x) - f(a)\| < \rho$  für  $x \in U_a$ ; setzen wir  $g(x) = f(a)$  für alle  $x \in U_a$ , so ist  $g(x) \in \mathfrak{G}_1^f(U_a)$  und  $\|f(x) - g(x)\| < \rho$  für alle  $x \in U_a$ .

Ist  $f \in \mathfrak{G}_\xi^f(E)$ , so ist offenbar  $f$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion in jedem Punkte von  $E$ . Umgekehrt gilt:

**35-7-2.** Ist  $\xi > 1$ , ist  $f$  eine Funktion im separablen Raume  $E$  und ist  $f$  in jedem Punkte von  $E$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion, so ist  $f$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion<sup>1)</sup>.

Nach Annahme gibt es zu jedem  $\rho > 0$  und jedem  $a \in E$  eine Umgebung  $U_a$  und eine Funktion  $g_a \in \mathfrak{G}_\xi^f(U_a)$ , so daß  $\|f(x) - g_a(x)\| \leq \rho$  für  $x \in U_a$ ; nach 13-3-1 gibt es unter diesen  $U_a$  abzählbar viele:  $U_{a_\nu}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), so daß  $E = \bigcup U_{a_\nu}$ ; weil  $U_a$  offen, ist  $U_a \in \mathfrak{B}_1^f(E)$ , also wegen  $\xi > 1$  auch  $U_a \in \mathfrak{B}_\xi^f(E)$ ; nun folgt die Behauptung aus 35-6-2.

**35-7-21.** Ist  $f$  eine Funktion im separablen Raume  $E$ , und ist  $f$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion in jedem Punkte von  $E$ , so ist  $f \in \mathfrak{G}_\xi^f(E)$ .

Dies folgt für  $\xi = 1$  aus 35-7-1, für  $\xi > 1$  aus 35-7-2 und 35-6-1.

**35-7-3.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , so ist die Menge  $G_\rho$  aller  $a \in E$ , in denen  $f$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion ist, offen in  $E$ .

Ist  $a \in G_\rho$ , so gibt es eine Umgebung  $U_a$  und eine Funktion  $g \in \mathfrak{G}_\xi^f(U_a)$ , so daß  $\|f(x) - g(x)\| \leq \rho$  für  $x \in U_a$ ; da  $U_a$  für jedes  $x \in U_a$  auch eine Umgebung  $U_x$  ist, ist  $f$  auch in jedem Punkte  $x \in U_a$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion, also ist  $U_a \subseteq G_\rho$ , d. h.  $G_\rho$  ist offen.

Sei  $f$  eine Funktion auf  $E$  und  $P_\rho$  die Menge aller  $a \in E$ , in denen  $f$  nicht mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion ist. Dann gelten die Sätze<sup>2)</sup>:

**35-7-31.** Ist  $\xi > 1$ , ist  $E$  separabel und  $P_\rho \supset A$ , so ist die Funktion  $P_\rho$  1  $f$  in keinem Punkte von  $P_\rho$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion.

Angenommen,  $P_\rho$  1  $f$  sei im Punkte  $b \in P_\rho$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion; dann gibt es eine Umgebung  $U_b$ , so daß  $(U_b \cap P_\rho)$  1  $f$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion. Da  $f$  in jedem Punkte  $x \in U_b - P_\rho$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion ist, ist nach 35-7-2  $(U_b - P_\rho)$  1  $f$  mit der Annäherung  $\rho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^f$ -Funktion. Nach 35-7-3 ist  $P_\rho = E - G_\rho$  abgeschlossen, also  $U_b - P_\rho$  ebenso wie  $U_b$  offen; wegen  $\xi > 1$  ist also  $U_b - P_\rho \in \mathfrak{B}_\xi^f(E)$ , und wegen  $U_b \in \mathfrak{B}_\xi^f(E)$ ,  $P_\rho \in \mathfrak{B}_\xi^f(E)$  ist auch

<sup>1)</sup> Der Satz ist auch für  $\xi = 1$  richtig, wie aus 36-3-3 folgt.

<sup>2)</sup> Für  $\xi = 1$  gelten die Sätze 35-7-31, 35-7-32, 35-7-4 nicht.

$U_b P_\varrho \in \mathfrak{B}_\xi^\varepsilon(E)$ ; nach 35.6.2 ist also  $U_b 1f$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion, d. h.  $f$  ist im Punkte  $b \in P_\varrho$  mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion. Das aber widerspricht der Definition von  $P_\varrho$ .

**35.7.32.** Ist  $\xi > 1$  und ist  $E$  separabel, so ist  $P_\varrho$  perfekt.

Nach 35.7.3 ist  $P_\varrho$  abgeschlossen. In einem isolierten Punkte von  $P_\varrho$  wäre  $P_\varrho 1f$  stetig, also nach 35.7.1 eine  $\mathfrak{G}_1^1$ -Funktion, also auch eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion, entgegen 35.7.31.

**35.7.4.** Ist  $\xi > 1$ , und ist  $f$  eine Funktion im separablen Raume  $E$ , so ist, damit  $f \in \mathfrak{G}_\xi^\varepsilon(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in  $E$  perfekten Menge  $P \supset \Lambda$  einen Punkt gebe, in dem  $P 1f$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion ist.

Notwendig: Ist  $f \in \mathfrak{G}_\xi^\varepsilon(E)$ , so ist nach 35.3.3  $P 1f \in \mathfrak{G}_\xi^\varepsilon(P)$ , mithin ist  $P 1f$  in jedem Punkte von  $P$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion. Hinreichend: Ist  $f \sim \varepsilon \mathfrak{G}_\xi^\varepsilon(E)$ , so gibt es nach 35.6.1 ein  $\varrho > 0$ , so daß  $f$  nicht mit der Annäherung  $\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion ist; nach 35.7.2 ist dann  $P_\varrho \supset \Lambda$ ; nach 35.7.32 ist  $P_\varrho$  perfekt, und nach 35.7.31 ist  $P_\varrho 1f$  in keinem Punkte von  $P_\varrho$  eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion.

Für  $\xi = 2$  wird 35.7.4 ergänzt durch 37.1.2.

Literatur zu Nr. 6 und 7: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 170ff.

8. Existenzsatz. Wir sagen, die Funktion  $f$  auf  $E$  sei genau eine  $\mathfrak{G}^\xi$ -Funktion (bzw.  $\mathfrak{G}_\xi$ -Funktion), wenn  $f \in \mathfrak{G}^\xi(E)$  und  $f \sim \varepsilon \mathfrak{G}_\xi(E)$  (bzw. wenn  $f \in \mathfrak{G}_\xi(E)$  und  $f \sim \varepsilon \mathfrak{G}^\xi(E)$ ); wir sagen,  $f$  sei genau eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion, wenn  $f \in \mathfrak{G}_\xi^\varepsilon(E)$  und  $f \sim \varepsilon \mathfrak{G}^\eta(E) + \mathfrak{G}_\eta(E)$  für alle  $\eta < \xi$ . Wegen 34.1.51 und § 34 (1.3) kann es eine Funktion, die genau eine  $\mathfrak{G}^\xi$ - oder  $\mathfrak{G}_\xi$ - oder  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ -Funktion ist, nur für  $\xi < \omega_1$  geben.

**35.8.1.** Ist  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset \Lambda$  ist, und ist  $\xi < \omega_1$ , so gibt es eine Funktion  $f$  auf  $E$ , die genau eine  $\mathfrak{G}^\xi$  (eine  $\mathfrak{G}_\xi$ , eine  $\mathfrak{G}_\xi^\varepsilon$ ) Funktion ist.

Dies folgt aus 33.9.3 und 35.2.4, 35.2.41.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 205ff. Ch. J. de la Vallée-Poussin, Intégrales de Lebesgue, Fonctions d'ensemble, Classes de Baire S. 145ff. E. Szpilrajn, Fund. math. 15 (1930) S. 212; G. Poprougénko, Fund. math. 15 (1930) S. 284.

9. Die eine Funktion darstellende Menge. Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $f(x)$  eine Funktion auf  $E$ . Wir betrachten den Produktraum  $E \times \overline{R_1}$  der Punkte  $(x, y)$ , wo  $x \in E$ ,  $y \in \overline{R_1}$ . Wir bezeichnen mit  $[f(\mathfrak{A}) > \mathfrak{y}]$  die Menge aller  $(x, y) \in E \times \overline{R_1}$ , für die  $f(x) > y$  ist; analog ist die Bedeutung von  $[f(\mathfrak{A}) < \mathfrak{y}]$ ,  $[f(\mathfrak{A}) \geq \mathfrak{y}]$ ,  $[f(\mathfrak{A}) \leq \mathfrak{y}]$ ,  $[f(\mathfrak{A}) = \mathfrak{y}]$ ,  $[f(\mathfrak{A}) < g(\mathfrak{y})]$  usf. Die

Menge  $[f(\dot{x}) = \dot{y}]$  nennen wir die die Funktion  $f$  darstellende Menge. Wir wollen nun die die Baireschen Funktionen darstellenden Mengen betrachten. Wir schicken folgenden Hilfssatz voraus:

**35-9-1.** Ist  $h(x) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$  (bzw.  $h(x) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$ , bzw.  $h(x) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$ ) und ist  $h(x, y)$  diejenige Funktion in  $E \times \bar{R}_1$ , die jedem Punkte  $(x, y) \in E \times \bar{R}_1$  den Funktionswert  $h(x)$  zuordnet, so ist  $h(x, y) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$  (bzw.  $h(x, y) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ , bzw.  $h(x, y) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ ).

Ist  $h(x)$  stetig, so offenbar auch  $h(x, y)$ : von hier aus beweist man die Behauptung ohne Schwierigkeit durch transfinite Induktion.

**35-9-2.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , so ist, damit  $f \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$  (bzw.  $f \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$ ) sei, notwendig und hinreichend, daß  $[f(\dot{x}) > \dot{y}] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$  (bzw.  $[f(\dot{x}) < \dot{y}] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ ) sei.

Notwendig: Bedeutet  $S$  die Schränkungstransformation, so ist  $[f(\dot{x}) > \dot{y}] = [S(f(\dot{x})) > S(\dot{y})]$ . Setzen wir  $S(f(x)) - S(y) = g(x, y)$ , so ist daher auch  $[f(\dot{x}) > \dot{y}] = [g(\dot{x}, \dot{y}) > 0]$ . Fassen wir  $S(f(x))$  und  $-S(y)$  auf als diejenigen Funktionen in  $E \times \bar{R}_1$ , die dem Punkte  $(x, y) \in E \times \bar{R}_1$  den Funktionswert  $S(f(x))$  bzw.  $-S(y)$  zuordnen, so ist nach 35-1-2 und 35-9-1  $S(f(x)) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$  und  $-S(y)$  ist eine stetige Funktion in  $E \times \bar{R}_1$ , also ebenfalls  $-S(y) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ . Nach 35-1-2 ist also auch  $S(f(x)) - S(y) \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ , somit nach 35-2-1  $[g(\dot{x}, \dot{y}) > 0] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ , d. h.  $[f(\dot{x}) > \dot{y}] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ . Hinreichend: Sei  $[f(\dot{x}) > \dot{y}] = M$ ; nach Annahme ist  $M \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$ . Für jedes  $z \in R_1$  besteht die Schicht  $M_z^{(1)}$  von  $M$  (§ 20, 4) aus allen  $x \in E$  mit  $f(x) > z$ , d. h. es ist  $M_z^{(1)} = [f(\dot{x}) > z]$ ; nach 33-7-1 ist  $M_z^{(1)} \in \mathfrak{B}^{\pm}(E)$ ; also ist  $[f(\dot{x}) > z] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E)$  für alle  $z \in R_1$ ; nach 35-2-1 ist somit  $f \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$ .

**35-9-21.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , so ist, damit  $f \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $[f(\dot{x}) > \dot{y}] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$  und  $[f(\dot{x}) < \dot{y}] \in \mathfrak{B}^{\pm}(E \times \bar{R}_1)$  sei.

Dies folgt unmittelbar aus 35-9-2.

**35-9-3.** Ist  $f \in \mathfrak{G}_\xi^{\pm}(E)$ , so ist  $[f(\dot{x}) = \dot{y}] \in \mathfrak{B}_\xi(E \times \bar{R}_1)$ .

Denn  $[f(\dot{x}) = \dot{y}] = [f(\dot{x}) \leq \dot{y}] \cdot [f(\dot{x}) \geq \dot{y}]$ , und aus 35-9-21 folgt durch Komplementbildung nach 33-4-2:

$$[f(\dot{x}) \leq \dot{y}] \in \mathfrak{B}_\xi(E \times \bar{R}_1), \quad [f(\dot{x}) \geq \dot{y}] \in \mathfrak{B}_\xi(E \times \bar{R}_1).$$

Um zu beweisen, daß für  $\xi = 1$  hiervon auch die Umkehrung gilt, zeigen wir zunächst:

**35-9-4.** Ist  $P$  eine eindeutige Abbildung von  $E$  auf eine Punktmenge des metrischen Raumes  $E'$ , so ist, damit  $P$  stetig sei, notwendig und,

wenn  $E'$  in sich kompakt ist, auch hinreichend, daß die Menge  $M$  aller Punkte  $(x, P(x))$  ( $x \in E$ ) von  $E \times E'$  abgeschlossen sei in  $E \times E'$ .

Notwendig: Sei  $(x, y) \in M^0$ ; wir haben zu zeigen:  $(x, y) \in M$ . Nach 17.3.6 gibt es in  $M$  eine Folge von Punkten  $(x_n, y_n)$ , so daß  $(x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ ; wegen  $(x_n, y_n) \in M$  ist  $y_n = P(x_n)$ , und nach 20.1.1 gilt somit:  $x_n \rightarrow x$ ,  $P(x_n) \rightarrow y$ ; weil  $P$  stetig, gilt aber nach 28.1.21:  $P(x_n) \rightarrow P(x)$ , also ist  $y = P(x)$ , mithin  $(x, y) \in M$ . Hinreichend: Sei  $x \in E$ ,  $x_n \in E$  und  $x_n \rightarrow x$ ; setzen wir  $y_n = P(x_n)$ , so ist  $(x_n, y_n) \in M$ . Sei  $y$  ein Häufungspunkt von  $((y_n))$  in  $E'$ ; nach 17.8.58 gibt es in  $((y_n))$  eine Teilfolge  $((y_{n_k}))$  mit  $y_{n_k} \rightarrow y$ . Nach 20.1.1 gilt dann  $\lim (x_{n_k}, y_{n_k}) = (x, y)$ ; und da  $M$  abgeschlossen und  $(x_{n_k}, y_{n_k}) \in M$ , ist auch  $(x, y) \in M$ , d. h. es ist  $y = P(x)$ . Die Folge  $((y_n))$  hat also den einzigen Häufungspunkt  $P(x)$ , nach 17.3.4 gilt also  $y_n \rightarrow P(x)$ , d. h.  $P(x_n) \rightarrow P(x)$ , also ist  $P$  stetig nach 28.1.21.

Für  $E' = \bar{R}_1$  erhalten wir aus 35.9.4, folgenden Satz, der die Umkehrung von 35.9.3 für  $\xi = 1$  enthält:

**35.9.41.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $E$ , so ist, damit  $f$  stetig sei, notwendig und hinreichend, daß die Menge  $[f(x) = y]$  abgeschlossen in  $E \times \bar{R}_1$  sei.

Wir kommen auf die eine Funktion  $f$  darstellende Menge  $[f(x) = y]$  in § 43, 2 zurück; dort werden wir auch sehen, daß für  $\xi > 1$  die Umkehrung von 35.9.3 nicht gilt.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 74. A. Lindenbaum, Ann. soc. Pol. 10 (1931).

## § 36. Halbstetige Funktionen.

1. Halbstetigkeit in einem Punkte. Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq E$  und  $f$  eine Funktion auf  $A$ . Anschließend an 25.6.1 definieren wir:  $f$  heißt oberhalb (bzw. unterhalb) stetig<sup>1)</sup> im Punkte  $a \in A$ , wenn für jede Folge  $((a_n))$  aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$  gilt:  $\varlimsup_n f(a_n) \leq f(a)$  (bzw.  $\varliminf_n f(a_n) \geq f(a)$ ). Ist  $f$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in  $a$ , so auch  $S(f)$ , wo  $S$  die Schränkungstransformation (§ 25, 2) bedeutet.

<sup>1)</sup> Die Aussage: „die Funktion  $f$  ist oberhalb (unterhalb) stetig im Punkte  $a$ “ besagt demnach keineswegs, daß die eindeutige Abbildung, die jedem Punkte  $x \in A$  den Punkt  $f(x) \in \bar{R}_1$  zuordnet, oberhalb (unterhalb) stetig ist im Sinne von § 21. Vielmehr ist nach 28.1.1 diese Abbildung dann und nur dann oberhalb (unterhalb) stetig im Punkte  $a$ , wenn die Funktion  $f$  stetig ist im Punkte  $a$ .

**36-1-1.** Damit  $f$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $y > f(a)$  (bzw. zu jedem  $y < f(a)$ ) eine Umgebung  $U_a$  gebe, so daß  $f(x) < y$  (bzw.  $f(x) > y$ ) für alle  $x \in U_a$ .

Notwendig: Ist  $y$  eine Zahl  $> f(a)$ , zu der es keine solche Umgebung gibt, so gibt es ein  $a_n \in A$  mit  $f(a_n) \geq y$ ; dann ist  $a_n \rightarrow a$ ,  $\lim_n f(a_n) \geq y > f(a)$ ; also ist  $f$  nicht oberhalb stetig in  $a$ . Hinreichend: Ist  $(a_n)$  eine Folge aus  $A$  mit  $a_n \rightarrow a$ , so gilt  $a_n \in U_a$  für fast alle  $n$ , also  $f(a_n) < y$  für fast alle  $n$ , also  $\lim_n f(a_n) \leq y$ . Da dies für jedes  $y > f(a)$  gilt, ist  $\lim_n f(a_n) \leq f(a)$ .

Als Analogon zu 26-2-4 erhalten wir:

**36-1-2.** Damit  $f$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $f(a) = \bar{f}(a)$  (bzw.  $f(a) = \underline{f}(a)$ ) sei.

Notwendig: Ist  $f(a) < \bar{f}(a)$ , so gibt es ein  $y$ , so daß  $f(a) < y < \bar{f}(a)$ ; nach 26-2-11 gibt es dann in jeder Umgebung  $U_a$  ein  $x \in A$ , so daß  $f(x) > y$ , also ist  $f$  nach 36-1-1 nicht oberhalb stetig in  $a$ . Hinreichend: Dies folgt unmittelbar aus 36-1-1 und 26-2-11.

**36-1-21.** Damit  $f$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $f(a) \geq \bar{f}^1(a)$  (bzw.  $f(a) \leq \underline{f}^1(a)$ ) sei.

Dies folgt aus 36-1-1 und 27-2-11.

**36-1-3.** Damit  $f$  stetig sei im Punkte  $a \in A$ , ist notwendig und hinreichend, daß  $f$  sowohl oberhalb als unterhalb stetig sei in  $a$ .

Dies folgt aus 26-2-4 und 36-1-2.

**36-1-4.** Die Aussage „ $f$  ist oberhalb stetig in  $a'$ “ ist gleichbedeutend mit „—  $f$  ist unterhalb stetig in  $a'$ “.

Dies folgt unmittelbar aus der Definition oder aus 36-1-1.

**36-1-5.** Sind  $f, g$  Funktionen auf  $A$ , die oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sind im Punkte  $a \in A$ , so sind auch die Funktionen  $\max(f(x), g(x))$ ,  $\min(f(x), g(x))$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in  $a$ .

Dies folgt unmittelbar aus 36-1-1.

**36-1-51.** Sind  $f, g$  Funktionen auf  $A$ , ist  $B$  der Bereich von  $f + g$ , und sind  $f, g$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig im Punkte  $a \in B$ , so ist auch  $f + g$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in  $a$ .

Sei  $y > f(a) + g(a)$ ; dann gibt es Zahlen  $y', y''$ , so daß  $y' > f(a)$ ,  $y'' > g(a)$ ,  $y' + y'' \leq y$ ; nach 36-1-1 gibt es ein  $U_a$ , so daß  $f(x) < y'$ ,  $g(x) < y''$  für alle  $x \in U_a$ ; dann ist  $f(x) + g(x) < y' + y'' \leq y$  für alle  $x \in U_a$ , also ist  $f + g$  oberhalb stetig in  $a$  nach 36-1-1.

**36-1-52.** Sind  $f, g$  Funktionen auf  $A$ , ist  $B$  der Bereich von  $fg$ , sind  $f, g$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig im Punkte  $a \in B$ , und gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$  für alle  $x \in B \cap U_a$ . so ist  $fg$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig in  $a$ .

Der Beweis ist analog dem von 36-1-51.

Sei  $\mathfrak{M}$  eine Menge von Funktionen auf  $A$ . Dann gilt in Ergänzung zu 29-2-3:

**36-1-6.** Sind alle  $f \in \mathfrak{M}$  unterhalb (bzw. oberhalb) stetig im Punkte  $a \in A$ , so ist auch  $\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  unterhalb (bzw.  $\inf_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  oberhalb) stetig in  $a$ .

Sei  $g(x) = \sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$ : ist  $y < g(a)$ , so gibt es ein  $f \in \mathfrak{M}$ , so daß auch  $y < f(a)$ ; nach 36-1-1 gibt es ein  $U_a$ , so daß  $f(x) > y$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; dann ist auch  $g(x) > y$  für alle  $x \in A \cap U_a$ . also ist  $g$  unterhalb stetig in  $a$  nach 36-1-1.

**36-1-61.** Sind alle  $f \in \mathfrak{M}$  stetig im Punkte  $a \in A$ , so ist  $\sup_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  unterhalb,  $\inf_{f \in \mathfrak{M}} f(x)$  oberhalb stetig in  $a$ .

Dies folgt aus 36-1-3 und 36-1-6.

**36-1-7.** Ist  $(f_n)$  eine monoton wachsende (bzw. abnehmende) Funktionenfolge auf  $A$ , und sind alle  $f_n$  unterhalb (bzw. oberhalb) stetig im Punkte  $a \in A$ . so ist auch  $\lim_n f_n$  unterhalb (bzw. oberhalb) stetig in  $a$ .

Dies folgt unmittelbar aus 36-1-6.

**2. Halbstetige Funktionen.** Die Funktion  $f$  auf  $A$  heißt oberhalb (bzw. unterhalb) stetig, wenn sie oberhalb (bzw. unterhalb) stetig ist in jedem Punkte  $a \in A$ . Satz 25-8-1 ist enthalten in:

**36-2-1.** Ist  $f$  eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A$ , so ist für jedes  $y$  die Menge  $[f(x) < y]$  (bzw.  $[f(x) > y]$ ) offen in  $A$ , und die Menge  $[f(x) \geq y]$  (bzw.  $[f(x) \leq y]$ ) abgeschlossen in  $A$ .

Sei  $M = [f(x) < y]$  und  $a \in M$ , d. h.  $y > f(a)$ ; nach 36-1-1 gibt es ein  $U_a$ , so daß  $f(x) < y$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; also ist  $A \cap U_a \subseteq M$ , also ist  $M$  offen in  $A$ , und somit  $A - M = [f(x) \geq y]$  abgeschlossen in  $A$ .

Bezeichnet wie in § 35  $\mathfrak{C}(A)$  das System der stetigen Funktionen auf  $A$ , so gilt:

**36-2-2.** Damit die Funktion  $f$  auf  $A$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $f \in \mathfrak{C}_1(A)$  (bzw.  $f \in \mathfrak{C}^1(A)$ ) sei.

Notwendig: Sei  $f$  oberhalb stetig. Nach 36-2-1 ist  $[f(x) < y]$  offen in  $A$ , d. h.  $[f(x) < y] \in \mathfrak{B}^1(A)$ ; nach 35-2-1 ist also  $f \in \mathfrak{C}_1(A)$ . Hinreichend:

Ist  $f \in \mathcal{C}_1(A)$ , so ist  $f = \lim_n f_n$ , wo  $f_{n+1} \leq f_n$  und  $f_n$  stetig; nach 36-1-7 ist dann  $f$  oberhalb stetig.

Aus 36-2-2 folgt vermöge 35-2-1 die Umkehrung von 36-2-1:

**36-2-21.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , und ist  $[f(x) < y]$  (bzw.  $[f(x) > y]$ ) offen in  $A$  für alle  $y \in R_1$ , so ist  $f$  oberhalb (bzw. unterhalb) stetig.

Satz 25-7-21 ist enthalten in:

**36-2-3.** Ist  $A$  in sich kompakt und  $f$  eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A$ , so gibt es einen Punkt  $a \in A$ , in dem  $f(a)$  ein absolutes Maximum (bzw. Minimum) ist.

Sei  $z = \sup_{x \in A} f(x)$ ; dann gibt es in  $A$  eine Folge  $((a_n))$  mit  $f(a_n) \rightarrow z$ . Nach 17-2-31 hat  $((a_n))$  einen Häufungspunkt  $a \in A$ , und nach 17-3-53 gibt es in  $((a_n))$  eine Teilfolge  $((a_{n_k}))$ , so daß  $a_{n_k} \rightarrow a$ ; da  $f(a_{n_k}) \rightarrow z$ , und  $f$  oberhalb stetig, ist dann  $f(a) \geq z$ , also, da  $z = \sup_{x \in A} f(x)$  war:  $f(a) = z$ , d. h.  $f(a)$  ist absolutes Maximum von  $f$ .

**36-2-31.** Ist  $A$  in sich kompakt, so ist jede oberhalb (bzw. unterhalb) stetige, endliche Funktion auf  $A$  nach oben (bzw. unten) beschränkt.

Dies ist enthalten in 36-2-3.

**36-2-4.** Ist  $A$  in sich kompakt, ist  $f$  eine nach oben beschränkte oberhalb stetige,  $g$  eine nach unten beschränkte unterhalb stetige Funktion auf  $A$ , und ist  $f \leq g$ , so gibt es zu jedem  $\delta > 0$  ein  $\sigma > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $a \in A$ ,  $a' \in A$  mit  $a' < a$  gilt:  $f(a) < g(a') + \delta$ .

Anderenfalls gäbe es ein  $\delta > 0$  und für jedes  $n$  zwei Punkte  $a_n \in A$ ,  $a'_n \in A$  mit  $a_n a'_n < \frac{1}{n}$  und  $f(a_n) \geq g(a'_n) + \delta$ . Da  $A$  in sich kompakt, hat  $((a_n))$  einen Häufungspunkt  $a \in A$ , und durch Übergang zu einer Teilfolge können wir annehmen:  $a_n \rightarrow a$ ; wegen  $a_n a'_n < \frac{1}{n}$  gilt dann auch  $a'_n \rightarrow a$ . Weil  $f$  oberhalb stetig, ist  $f(a) \geq \overline{\lim}_n f(a_n)$ , wegen  $f(a_n) \geq g(a'_n) + \delta$  also auch  $f(a) \geq \overline{\lim}_n g(a'_n) + \delta$ ; weil  $g$  unterhalb stetig, ist  $g(a) \leq \underline{\lim}_n g(a'_n) \leq \overline{\lim}_n g(a'_n)$ ; es wäre also  $f(a) \geq g(a) + \delta$ ; da nach Annahme  $f(a) < +\infty$ ,  $g(a) > -\infty$ , müssen hierin  $f(a)$  und  $g(a)$  endlich sein, so daß daraus  $f(a) > g(a)$  folgen würde, entgegen der Annahme  $f \leq g$ .

Setzen wir in 36-2-4  $f = g$ , so ist  $f$  stetig, und die Aussage von 36-2-4 geht über in die Aussage, daß  $f$  gleichmäßig stetig ist (vgl. 25-7-31).

**36-2-5.** Ist  $A$  eine Youngsche Menge, und ist  $f$  eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A$ , so ist  $f$  punktwweise unstetig.

Dies folgt wegen 36-2-2 aus 28-8-2.

**36-2-6.** Ist  $g$  eine oberhalb,  $h$  eine unterhalb stetige Funktion auf  $A$  und  $g \leq h$ , so gibt es eine stetige Funktion  $f$  auf  $A$ , so daß  $g \leq f \leq h$ .

Dies folgt wegen 36-2-2 und § 35 (1) aus 35-3-1.

**36-2-7.** Ist  $A \subseteq E$  und  $\varphi$  eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A$ , so gibt es eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion  $f$  auf  $E$ , so daß  $\varphi = A \upharpoonright f$ .

Dies folgt wegen 36-2-2 aus 35-3-2.

Literatur: Die Grundzüge der Theorie der halbstetigen Funktionen, insbesondere auch Satz 36-2-2, stammen von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 6; Bull. soc. math. 32(1904) S. 125. Satz 36-2-4 stammt von W. Sierpiński, Fund. math. 9 (1927) S. 1, Satz 36-2-6 von H. Hahn, Wien Ber. 126 (1917) S. 103.

**3. Beispiele halbstetiger Funktionen.** Sei wieder  $E$  ein metrischer Raum und  $A \subseteq E$ .

**36-3-1.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so ist ihre obere (bzw. untere) Schrankenfunktion  $\bar{f}$  (bzw.  $\underline{f}$ ) eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A^0$ .

Aus 26-1-5 folgt: ist  $y > \bar{f}(a)$ , (bzw.  $y < \underline{f}(a)$ ), so gibt es eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $\bar{f}(x) < y$  (bzw.  $\underline{f}(x) > y$ ) für alle  $x \in A^0 \cap U_a$ . Die Behauptung folgt nun aus 36-1-1.

**36-3-11.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so ist ihre Schwankung  $\omega$  eine oberhalb stetige Funktion auf  $A^0$ .

Nach § 26, 3 ist  $\omega(x) = \|\bar{f}(x) - \underline{f}(x)\| = S(\bar{f}(x)) - S(\underline{f}(x))$ , wo  $S$  die Schränkungstransformation bedeutet. Nach 36-3-1 ist  $\bar{f}(x)$  oberhalb,  $\underline{f}(x)$  unterhalb stetig; also ist auch  $S(\bar{f}(x))$  oberhalb,  $S(\underline{f}(x))$  unterhalb stetig; nach 36-1-4 ist  $-S(\underline{f}(x))$  oberhalb stetig, also nach 36-1-51 auch  $S(\bar{f}(x)) - S(\underline{f}(x))$ .

**36-3-12.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so ist ihre reduzierte obere (bzw. untere) Schrankenfunktion  $\bar{f}^1$  (bzw.  $\underline{f}^1$ ) eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A^1$ , und ihre reduzierte Schwankung  $\omega^1$  eine oberhalb stetige Funktion auf  $A^1$ .

Dies folgt aus 27-1-5.

**36-3-13.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so ist ihre obere (bzw. untere) Schrankenfunktion bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen  $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}$  (bzw.  $\underline{f}^{(\mathfrak{M})}$ ) eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A^0$ , und ihre Schwankung bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen  $\omega^{(\mathfrak{M})}$  eine oberhalb stetige Funktion auf  $A^0$ .

Dies folgt aus 27-4-3.



**36-3-2.** Ist  $f$  eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $A$ , ist  $B$  dicht in  $A$  und  $f(x) \leq y$  (bzw.  $\bar{f}(x) \geq y$ ) für alle  $x \in B$ , so ist die Menge  $[f(\bar{x}) > y]$  (bzw. die Menge  $[f(\bar{x}) < y]$ ) von erster Kategorie in  $A$ .

Sei  $y = \lim_n y_n$ ,  $y_n > y$ ; nach 30-1-2 ist dann  $[f(\bar{x}) > y] = \bigcap_n [f(\bar{x}) \geq y_n]$ ; es genügt also, zu zeigen: die Menge  $[f(\bar{x}) \geq y_n]$  ist nirgends dicht in  $A$ ; und da sie nach 36-2-1 abgeschlossen in  $A$  ist, genügt es nach 11-2-111 zu zeigen, daß  $[f(\bar{x}) \geq y_n]$  keinen in  $A$  offenen Teil  $\supset A$  hat. Wäre  $G$  ein nicht leerer, in  $A$  offener Teil von  $[f(\bar{x}) \geq y_n]$ , so gäbe es nach 11-1-3 ein  $a \in B \cap G$  und, weil  $G$  offen in  $A$ , ein  $U_a$ , so daß  $A \cap U_a \subseteq G$ , also  $f(x) \geq y_n$  für alle  $x \in A \cap U_a$ ; dann wäre nach 26-2-11  $\bar{f}(a) \geq y_n > y$ , entgegen der Voraussetzung.

**36-3-3.** Ist  $f$  eine Funktion auf  $A$ , so ist, damit ihre Schwankung  $\omega(x) \leq k$  sei für alle  $x \in A$ , notwendig und hinreichend, daß es eine stetige Funktion  $f^*$  auf  $A$  gebe, so daß  $\|f^*(x) - f(x)\| \leq \frac{k}{2}$  für alle  $x \in A$ .

Notwendig: Nach 36-3-1 ist  $\bar{f}$  oberhalb,  $\underline{f}$  unterhalb stetig, also auch  $S(\bar{f})$  oberhalb,  $S(\underline{f})$  unterhalb stetig. Wegen  $\omega = S(\bar{f}) - S(\underline{f}) \leq k$  ist  $S(\bar{f}) - \frac{k}{2} \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$ . Da hierin  $S(\bar{f}) - \frac{k}{2}$  oberhalb,  $S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$  unterhalb stetig, gibt es nach 36-2-6 eine stetige Funktion  $f^{**}$ , so daß  $S(\bar{f}) - \frac{k}{2} \leq f^{**} \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$ ; indem wir nach § 30 (3-1)  $f^{**}$  ersetzen durch  $(f^{**})_{-1}^1$ , können wir annehmen:  $-1 \leq f^{**} \leq 1$ . Setzen wir  $S^{-1}(f^{**}) = f^*$ , so ist  $f^*$  stetig und  $S(\bar{f}) - \frac{k}{2} \leq S(f^*) \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$ , und da  $S(\underline{f}) \leq S(f) \leq S(\bar{f})$ , ist  $S(\underline{f}) - \frac{k}{2} \leq S(f^*) \leq S(\underline{f}) + \frac{k}{2}$ , d. h.  $\|f^* - f\| \leq \frac{k}{2}$ . Hinreichend: Sei  $x \in A$  und  $z > k$ ; wir wählen  $\varepsilon > 0$  so klein, daß  $k + \varepsilon < z$ ; wegen der Stetigkeit von  $f^*$  gibt es ein  $U_x$ , so daß  $|S(f^*(x')) - S(f^*(x))| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $x' \in A \cap U_x$ ; nach Annahme ist  $\|f^*(x') - f(x')\| \leq \frac{k}{2}$ , d. h.  $|S(f^*(x')) - S(f(x'))| \leq \frac{k}{2}$ ; also ist  $|S(f(x')) - S(f^*(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{2}$  für alle  $x' \in A \cap U_x$ , also auch  $|S(f(x'')) - S(f^*(x))| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{k}{2}$  für alle  $x'' \in A \cap U_x$ , also  $|S(f(x')) - S(f(x''))| < \varepsilon + k < z$  für alle  $x' \in A \cap U_x$ ,  $x'' \in A \cap U_x$ , d. h.  $\|f(x') - f(x'')\| < z$  für alle  $x' \in A \cap U_x$ ,  $x'' \in A \cap U_x$ ; nach 26-3-11 ist demnach  $\omega(x) \leq z$ , also auch  $\omega(x) \leq k$ .

Literatur: R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 6. Zu Satz 36-3-3: H. Hahn, Wien Ber. 126 (1917) S. 91.

4. **Bairesche Funktionen und halbstetige Funktionen.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $f$  eine Funktion auf  $E$ . Dann gilt:

**36-1-1.** *Ist  $f$  stetig bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, so gibt es eine oberhalb (bzw. eine unterhalb) stetige Funktion auf  $E$ , die sich von  $f$  nur in den Punkten einer  $\mathfrak{M}$ -Menge unterscheidet.*

Sei  $M$  eine  $\mathfrak{M}$ -Menge und  $(E - M) \mid f$  stetig; da nach Eigenschaft 1.) und 3.) der  $\mathfrak{M}$ -Mengen (§ 27, 4):  $(E - M)G \supset A$  für jede in  $E$  offene Menge  $G \supset A$ , ist nach 11-1-3  $E - M$  dicht, also nach: 11-1-1  $(E - M)^0 = E$ . Setzen wir  $(E - M) \mid f = g$ , so ist also nach 36-3-1 die obere (bzw. untere) Schrankenfunktion  $\bar{g}$  (bzw.  $\underline{g}$ ) von  $g$  eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $E$ . Da nach Annahme  $g$  stetig, ist nach 26-2-4  $\bar{g}(x) = g(x) = \underline{g}(x) = f(x)$  für alle  $x \in E - M$ , also ist  $[\bar{g}(x) \neq f(x)] \subseteq M$ , somit nach Eigenschaft 1.) der  $\mathfrak{M}$ -Mengen eine  $\mathfrak{M}$ -Menge, ebenso  $[\underline{g}(x) \neq f(x)]$ . Also leistet  $\bar{g}$  (bzw.  $\underline{g}$ ) das Verlangte.

**36-1-2.** *Ist  $f$  eine Bairesche Funktion im Youngschen Raume  $E$ , so gibt es eine oberhalb (bzw. unterhalb) stetige Funktion auf  $E$ , die mit  $f$  in allen Punkten einer Residualmenge übereinstimmt.*

Nach 35-5-2 ist  $f$  stetig bis auf eine Menge erster Kategorie; die Behauptung folgt also aus 36-1-1, indem man dort unter den  $\mathfrak{M}$ -Mengen die Mengen erster Kategorie versteht.

### § 37. Funktionen erster, zweiter und dritter Klasse.

1. **Funktionen erster Klasse.** Ist  $E$  ein metrischer Raum, so sind nach § 35 (1) oder nach 36-2-2 und 36-1-3 die  $\mathfrak{C}_1$ -Funktionen in  $E$  nichts anderes als die stetigen Funktionen. Wir betrachten nun die  $\mathfrak{C}_2$ -Funktionen in  $E$ , die wir wie in § 35, 1 auch als die Funktionen erster Klasse in  $E$  bezeichnen.

**37-1-1.** *Ist  $f$  eine Funktion erster Klasse im Youngschen Raume  $E$  und ist  $A$  ein  $G_\delta$  in  $E$ , so ist  $A \mid f$  punktwise unstetig.*

Nach 19-1-2 ist  $A$  eine Youngsche Menge; nach 35-3-3 ist  $A \mid f$  eine Funktion erster Klasse in  $A$ , d. h.  $A \mid f \in \mathfrak{C}_2^2(A)$ , also nach 35-1-5  $A \mid f \in \mathfrak{C}^*(A)$ ; die Behauptung folgt also aus 28-8-2.

**37-1-2.** *Ist  $f$  eine Funktion im separablen Youngschen Raume  $E$ , so ist, damit  $f$  von erster Klasse sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in  $E$  perfekten Menge  $P \supset A$  einen Stetigkeitspunkt von  $P \mid f$  gebe.*

Notwendig: Dies ist enthalten in 37-1-1. Hinreichend: Nach Annahme gibt es in jeder perfekten Menge  $P \supset A$  einen Punkt, in dem  $P \mid f$  stetig, also nach 35-7-1 eine  $\mathfrak{C}_1$ -Funktion, mithin auch eine  $\mathfrak{C}_2$ -Funktion ist; nach 35-7-4 ist also  $f$  eine  $\mathfrak{C}_2$ -Funktion, d. h. von erster Klasse in  $E$ .

Aus 35-7-4 folgt nur, daß, wenn  $f$  von erster Klasse in  $E$ , d. h.  $f \in \mathfrak{C}_2^2(E)$  ist, es in jeder perfekten Menge  $P \supset A$  einen Punkt gibt, in dem  $P \upharpoonright f$  eine  $\mathfrak{C}_2^2$ -Funktion ist, während es nach 37-1-2 in  $P$  sogar einen Punkt gibt, in dem  $P \upharpoonright f$  stetig, d. h. eine  $\mathfrak{C}_1^1$ -Funktion ist. Für  $\xi > 2$  gilt eine solche Verschärfung von 35-7-4 nicht; denn ist  $1 < \eta < \xi < \omega_1$  und gibt es in jeder perfekten Menge  $P \supset A$  einen Punkt, in dem  $P \upharpoonright f$  eine  $\mathfrak{C}_\eta^\eta$ -Funktion ist, so ist nach 35-7-4  $f \in \mathfrak{C}_\eta^\eta(E)$ , während es nach 35-8-1  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ -Funktionen gibt, die nicht  $\mathfrak{C}_\eta^\eta$ -Funktionen sind. Diese Sonderstellung des Falles  $\xi = 2$  beruht darauf, daß 35-7-4 nur für  $\xi > 1$  gilt.

**37-1-21.** Ist  $f$  eine Funktion im separablen Youngschen Raume  $E$ , die nur abzählbar viele Unstetigkeitspunkte hat, so ist  $f$  von erster Klasse.

Nach 19-3-1 hat jede in  $E$  perfekte Menge  $P \supset A$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , enthält also gewiß einen Stetigkeitspunkt von  $P \upharpoonright f$ ; die Behauptung folgt also aus 37-1-2.

**37-1-3.** In einem abzählbaren Raume  $E$  ist jede Funktion von erster Klasse.

Jeder Teil  $A$  von  $E$  ist abzählbar, also ein  $F_\sigma$ , also  $A \in \mathfrak{B}^2(E)$ ; insbesondere ist also  $[f(x) > y] \in \mathfrak{B}^2(E)$ ,  $[f(x) < y] \in \mathfrak{B}^2(E)$ , also nach 35-2-2  $f \in \mathfrak{C}_2^2(E)$ .

**37-1-4.** Ist  $E$  ein separabler Youngscher Raum und  $M \subseteq E$ , so ist, damit  $M \in \mathfrak{B}_2^2(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß für jede in  $E$  perfekte Menge  $P \supset A$  die Begrenzung  $C$  von  $M \cap P$  in  $P$  nirgends dicht in  $P$  sei.

Notwendig: Ist  $f$  die charakteristische Funktion von  $M$ , so sind die Aussagen:  $M \in \mathfrak{B}_2^2(E)$  und  $f \in \mathfrak{C}_2^2(E)$  nach 35-2-41 gleichbedeutend. Offenbar ist  $C$  identisch mit der Menge der Unstetigkeitspunkte von  $P \upharpoonright f$ . Nach 10-6-4 ist  $C$  abgeschlossen in  $P$ ; wäre  $C$  nicht nirgends dicht in  $P$ , gäbe es also nach 11-2-111 eine nicht leere, in  $P$  offene Menge  $G \subseteq C$ ; da  $P$  ein  $G_\delta$  in  $E$ , steht dies im Widerspruche mit 37-1-1. Hinreichend: Ist  $C$  nirgends dicht in  $P$ , so gibt es einen Punkt  $a \in P - C$ ; da  $a$  Stetigkeitspunkt von  $P \upharpoonright f$ , folgt die Behauptung aus 37-1-2.

**37-1-41.** Ist  $E$  ein separabler Youngscher Raum und  $A$  eine abzählbare Menge  $\subseteq E$ , so ist, damit  $A \in \mathfrak{B}_2^2(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $A$  separiert sei.

Notwendig: Sei  $B$  ein nicht leerer insichdichter Teil von  $A$ ; nach 12-5-3 ist  $B^0$  perfekt; nach 11-3-12 ist  $B$  dicht in  $B^0$ , also auch  $A \cap B^0$  dicht in  $B^0$ ; und da  $A \cap B^0$  abzählbar, also nach 19-4-5 von erster Kategorie in  $B^0$ , und da  $B^0$  nach 19-1-2 eine Youngsche Menge, ist nach 19-7-51 auch  $B^0 - A$  dicht in  $B^0$ ; also ist jeder Punkt  $b \in B^0$  Begrenzungspunkt von  $A \cap B^0$  in  $B^0$ , also ist nach 37-1-4  $A \sim \in \mathfrak{B}_2^2(E)$ . Hinreichend: Sei  $P$  eine perfekte Menge  $\supset A$ . Ist  $A$  separiert, so ist nach 12-6-2 auch  $A \cap P$  separiert, und nach 12-6-4 ist  $A \cap P$  nirgends dicht in  $P$ ; also ist nach 11-2-12 auch  $(A \cap P)^0$

nirgends dicht in  $P$ , und da  $(AP)^0$  die Begrenzung von  $AP$  in  $P$  ist, folgt die Behauptung aus §7-1-4.

Literatur: Satz §7-1-2 stammt von R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 16; Bull. soc. math. 28 (1900) S. 173. Näheres über  $\mathfrak{B}_2^2$ -Mengen: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 170.

2. Funktionen erster Klasse und halbstetige Funktionen. Wegen  $\mathfrak{C}^1 \subseteq \mathfrak{C}_2^2$ ,  $\mathfrak{C}_1 \subseteq \mathfrak{C}_2^2$  sind nach §6-2-2 die halbstetigen Funktionen auch  $\mathfrak{C}_2^2$ -Funktionen, d. h. Funktionen erster Klasse. Nach §5-1-4 ist demnach auch die Summe einer oberhalb und einer unterhalb stetigen Funktion, oder, was nach §6-1-4 dasselbe heißt, die Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen eine Funktion erster Klasse; umgekehrt ist nach §4-4-4 jede Treppenfunktion erster Klasse eine solche Differenz, also ist nach §4-4-31 jede Funktion erster Klasse durch Funktionen, die Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen sind, gleichmäßig approximierbar. Hingegen ist, wie wir nun an einem Beispiel im  $R_1$  zeigen wollen, nicht jede Funktion erster Klasse Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen.

Nach §2-9-8 gibt es im Intervalle  $[a, b]$  des  $R_1$  eine abzählbare, abgeschlossene Punktmenge  $A_n$ , so daß  $(A_n)^i \supset A$  für  $i \leq 2n$ ,  $(A_n)^{2n-1} = A$ . Nach §12 (8-2) ist, da nach §12, 9 für abgeschlossene Mengen die  $i$ -te Ableitung mit der  $i$ -ten Kohärenz übereinstimmt:  $A_n = \sum_{i=0}^{2n} ((A_n)^i - (A_n)^{i+1})$ . Da nach §2-8-21 der insichdichte Kern von  $A_n$  leer ist, ist  $A_n$  separiert, also nach §2-6-2 wegen  $(A_n)^i \subseteq A_n$  auch  $(A_n)^i$ : nach §2-7-2 ist also die Menge  $(A_n)^i - (A_n)^{i-1}$  der isolierten Punkte von  $(A_n)^i$  dicht in  $(A_n)^i$ ; ist  $a \in (A_n)^{i+1}$ , d. h. ist  $a$  Häufungspunkt von  $(A_n)^i$ , so gibt es also in jeder Umgebung  $U_a$  einen Punkt  $x \in (A_n)^i - (A_n)^{i-1}$ .

Wir definieren nun, wenn  $k$  eine positive Zahl bedeutet, eine Funktion auf  $A_n$  durch:

$$(2) \quad f(x, k, A_n) = \begin{cases} 0 & \text{auf } (A_n)^{2r} - (A_n)^{2r+1} \\ k & \text{auf } (A_n)^{2r+1} - (A_n)^{2r+2}. \end{cases}$$

**§7-2-1.** Ist  $f(x, k, A_n) = g_1(x) - g_2(x)$ , wo  $g_1, g_2$  oberhalb stetige Funktionen auf  $A_n$  bedeuten, so gibt es zwei Punkte  $x' \in A_n$ ,  $x'' \in A_n$ , so daß  $g_1(x') - g_1(x'') > (n-1)k$ .

Sei  $x_{2n} \in (A_n)^{2n}$ ; dann gibt es, wie eben bemerkt, in jeder Umgebung von  $x_{2n}$  ein  $x \in (A_n)^{2n-1} - (A_n)^{2n}$ , und da  $g_1, g_2$  oberhalb stetig, gibt es somit ein  $x_{2n-1} \in (A_n)^{2n-1} - (A_n)^{2n}$ , so daß  $g_j(x_{2n-1}) < g_j(x_{2n}) + \frac{k}{2n}$  ( $j=1, 2$ ); ebenso gibt es ein  $x_{2n-2} \in (A_n)^{2n-2} - (A_n)^{2n-1}$ , so daß  $g_j(x_{2n-2}) < g_j(x_{2n-1}) + \frac{k}{2n}$  ( $j=1, 2$ ) usf.; es gibt also ein  $x_i \in (A_n)^i - (A_n)^{i+1}$ ,

so daß  $g_i(x_{i-1}) < g_i(x_i) + \frac{k}{2n}$  ( $i = 1, 2, \dots, 2n$ ). Wegen  $g_1(x) - g_2(x) = f(x, k, A_n)$  ist dann:  $g_1(x_{2i-2}) = g_2(x_{2i-2}) < g_2(x_{2i-1}) + \frac{k}{2n} = g_1(x_{2i-1}) - k + \frac{k}{2n} < g_1(x_{2i}) - k + \frac{k}{n}$ , also  $g_1(x_{2i-2}) < g_1(x_{2i}) - k + \frac{k}{n}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ); durch Addition dieser  $n$  Ungleichungen erhält man  $g_1(x_0) < g_1(x_{2n}) - nk + k$ , oder, indem man  $x_{2n} = x'$ ,  $x_0 = x''$  setzt:  $g_1(x') - g_1(x'') > (n-1)k$ .

**37·2·2.** Es gibt eine Funktion erster Klasse im  $\hat{R}_1$ , die nicht Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen ist.

Seien  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die sämtlichen rationalen Punkte des  $R_1$ , und sei  $A_n$  eine abzählbare abgeschlossene Punktmenge in  $\left[r_n - \frac{1}{n}, r_n + \frac{1}{n}\right]$ , so daß  $(A_n)^i \supset A$  für  $i \leq 2n$ ,  $(A_n)^{2n+1} = A$ . Da die  $A_n$  nirgends dicht sind, können sie ohne weiteres als disjunkt angenommen werden. Wir setzen  $S_{A_n} = B$ , und definieren, indem wir von (2) Gebrauch machen, eine Funktion  $f(x)$  im  $R_1$  durch:

$$f(x) = f\left(x, \frac{1}{n}, A_n\right) \text{ für } x \in A_n, \quad f(x) = 0 \text{ für } x \in R_1 - B.$$

Dann ist  $f$  stetig in allen Punkten von  $R_1 - B$ , und da  $B$  abzählbar, ist  $f$  von erster Klasse nach 37·1·21. Wir zeigen nun, daß  $f$  nicht Differenz zweier oberhalb stetiger Funktionen ist. Angenommen, es wäre  $f = f_1 - f_2$ , wo  $f_1, f_2$  oberhalb stetig; dann sind  $A_n \cap f_1, A_n \cap f_2$  oberhalb stetige Funktionen auf  $A_n$ , und wegen  $A_n \cap f_1 - A_n \cap f_2 = f\left(x, \frac{1}{n}, A_n\right)$  gibt es nach 37·2·1 zwei Punkte  $x' \in A_n, x'' \in A_n$ , so daß  $f_1(x') - f_1(x'') > \frac{n-1}{n}$ . Und da es zu jedem noch so kleinen Intervall  $[a, b]$  unendlich viele  $n$  gibt, so daß  $A_n \subseteq [a, b]$ , kann  $f_1$  in keinem Punkte des  $R_1$  stetig sein; wegen 36·2·5 aber ist dies ein Widerspruch gegen die Annahme,  $f_1$  sei oberhalb stetig.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 15; St. Mazurkiewicz, Fund. math. 2 (1921) S. 28.

**3. Funktionen zweiter Klasse.** Ist  $E$  ein metrischer Raum, so haben wir die Funktionen aus  $\mathfrak{C}_3^3(E)$  als Funktionen zweiter Klasse in  $E$  bezeichnet. Wegen  $\mathfrak{C}^2(E) \subseteq \mathfrak{C}_3^3(E)$ ,  $\mathfrak{C}_2(E) \subseteq \mathfrak{C}_3^3(E)$  sind insbesondere die  $\mathfrak{C}^2$ -Funktionen und die  $\mathfrak{C}_2$ -Funktionen von zweiter Klasse.

**37·3·1.** Ist  $((f_n))$  eine Folge stetiger Funktionen auf  $E$ , so ist  $\lim_n f_n \in \mathfrak{C}_2(E)$ ,  $\lim_n f_n \in \mathfrak{C}^2(E)$ .

Setzen wir  $\bar{f}_n = \sup f_n$ , so ist nach 36-1-6  $\bar{f}_n$  unterhalb stetig, also nach 36-2-2  $\bar{f}_n \in \mathfrak{C}^1(E)$ ; da  $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{f}_n = \lim_n \bar{f}_n$ , und  $\bar{f}_{n+1} \leq \bar{f}_n$ , ist also  $\lim_n \bar{f}_n \in \mathfrak{C}_2(E)$ .

**37-3-11.** Ist  $f(x, t)$  für jedes  $t$  aus  $(a, b)$  eine stetige Funktion von  $x$  auf  $E$ , so ist  $\lim_{t \rightarrow a-0} f(x, t) \in \mathfrak{C}_2(E)$ ,  $\lim_{t \rightarrow a+0} f(x, t) \in \mathfrak{C}_2(E)$ , ebenso  $\lim_{t \rightarrow b-0} f(x, t) \in \mathfrak{C}_2(E)$ ,  $\lim_{t \rightarrow b+0} f(x, t) \in \mathfrak{C}_2(E)$ .

Sei  $(b_n)$  eine abnehmende Folge aus  $(a, b)$  mit  $b_n \rightarrow a$ , und sei  $f_n(x) = \sup_{t \in (a, b_n)} f(x, t)$ ; nach 36-1-6 ist  $f_n(x)$  unterhalb stetig, also  $f_n \in \mathfrak{C}^1(E)$ ; da  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_n f_n(x)$ , und  $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ , ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \in \mathfrak{C}_2(E)$ .

**37-3-2.** Unterscheidet sich  $g$  von einer Funktion  $f$  erster Klasse in  $E$  nur in abzählbar vielen Punkten, so ist  $g$  von zweiter Klasse in  $E$ .

Denn ist  $f \in \mathfrak{C}_2^2$ , so ist auch  $f \in \mathfrak{C}_3^3$ , also nach 35-2-6 auch  $g \in \mathfrak{C}_3^3$ .

Z. B. ist nach 37-3-2 die Funktion  $g(x)$ , die  $= 0$  ist für alle irrationalen  $x$  und  $= 1$  für alle rationalen  $x$  des  $R_1$ , von zweiter Klasse im  $R_1$ ; und zwar ist sie, da die Menge der rationalen Punkte nach 33-4-5 eine  $\mathfrak{B}^2$ -Menge und nach 19-2-2 keine  $\mathfrak{B}_2$ -Menge ist, nach 35-2-4 genau eine  $\mathfrak{C}_2$ -Funktion. Sind  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die sämtlichen rationalen Punkte des  $R_1$ , so ist  $g(x) = \lim_n \lim_{\nu} \sum_{i=1}^n e^{-\nu(x-r_i)^2}$ .

Sei  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist; nach 19-2-1 gibt es ein in  $E$  nirgends dichtes reduziertes (§ 24, 2) dyadisches Diskontinuum  $B$ ; nach 24-2-4 ist  $B$  eine  $\mathfrak{B}_2$ -Menge in  $E$ ; hingegen ist  $B$  nicht  $\mathfrak{B}^2$ -Menge in  $E$ ; denn dann wäre, wenn  $A$  das dyadische Diskontinuum bezeichnet, aus dem  $B$  durch Weglassen abzählbar vieler Punkte entstanden ist, nach 33-4-72 auch  $B \in \mathfrak{B}^2(A)$ , also  $A - B \in \mathfrak{B}_2(A)$ ; es wäre also die abzählbare, insichdichte Menge  $A - B$  eine Youngsche Menge, im Widerspruche zu 19-2-2. Da somit  $\mathfrak{B}$  genau eine  $\mathfrak{B}_2$ -Menge in  $E$  ist die charakteristische Funktion  $g$  von  $B$  nach 35-2-4 genau eine  $\mathfrak{C}_2$ -Funktion in  $E$ , also von zweiter, aber nicht von erster Klasse; und weil  $B$  nirgends dicht, ist sie punktweise unstetig in  $E$ .

**37-3-3.** Auf jedem separablen, insichdichten Youngschen Raume  $E$  gibt es Funktionen zweiter Klasse, die nicht aus einer Funktion erster Klasse durch Abänderung der Funktionswerte in abzählbar vielen Punkten entstehen.

Sei  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  ein ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen (§ 13, 1): nach 19-1-2 und 12-4-21 ist  $H_n$  eine insichdichte Youngsche Menge; nach 19-2-1 gibt es also ein in  $H_n$  nirgends dichtes dyadisches Diskonti-

num  $B_n$ ; wir setzen  $S B_n = B$  und bezeichnen mit  $f$  die charakteristische Funktion von  $B$ . Da nach 18-9-3  $B_n$  abgeschlossen, ist  $B \in \mathfrak{B}^2(E)$ , also ist nach 35-2-4  $f \in \mathfrak{C}^2(E)$ , mithin ist  $f$  von zweiter Klasse. Entstehe nun  $g$  aus  $f$  durch Abänderung der Werte von  $f$  in den Punkten der abzählbaren Menge  $A$ ; wir haben zu zeigen, daß  $g$  nicht von erster Klasse sein kann; nach 37-1-1 genügt es, zu zeigen, daß  $g$  keinen Stetigkeitspunkt besitzt; und da  $g(x) = 1$  für  $x \in B - A$ ,  $g(x) = 0$  für  $x \in (E - B) - A$ , genügt es weiter zu zeigen, daß  $B - A$  und  $(E - B) - A$  dicht in  $E$  sind. Sei  $G \supset A$  eine in  $E$  offene Menge; es gibt ein  $H_n \subseteq G$ , also auch ein  $B_n \subseteq G$ ; da nach 18-9-1  $B_n$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, ist  $B_n - A \supset A$ , also auch  $G(B - A) \supset A$ , also ist  $B - A$  dicht in  $E$  nach 11-1-3. Da  $B_n$  nirgends dicht, ist  $B$  von erster Kategorie, also auch  $A + B$  von erster Kategorie, also  $E - (A + B) = (E - B) - A$  nach 19-7-51 dicht in  $E$ .

Literatur: Eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß  $f$  aus einer Funktion erster Klasse durch Abänderung der Funktionswerte in abzählbar vielen Punkten entstehe, findet man bei R. Baire, Ann. di mat. (3) 3 (1899) S. 75 und H. Hahn, Theorie der reellen Funktionen (Berlin 1921) S. 368.

4. Funktionen dritter Klasse. Sei  $E$  ein separabler, insichdichter Youngscher Raum. Wir geben ein Beispiel einer Menge  $B \subseteq E$ , die genau eine  $\mathfrak{B}_3$ -Menge in  $E$  ist; ihre charakteristische Funktion  $f$  ist dann nach 35-2-4 genau eine  $\mathfrak{C}_3$ -Funktion in  $E$ , also von dritter, aber nicht von zweiter Klasse.

Da nach 24-4-3 jeder Youngsche Raum homöomorph einem vollständigen Raume ist, können wir nach 33-6-2  $E$  als vollständig voraussetzen. Sei  $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots$  ein ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen (§ 13, 1); nach 19-2-1 gibt es ein in  $H_1$  nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum  $A_1$ , und da  $H_1 - (A_1 + A_2 + \dots + A_{i-1})$  offen in  $E$ , also nach 12-4-21 eine insichdichte Youngsche Menge, gibt es ebenso ein in  $H_1 - (A_1 + A_2 + \dots + A_{i-1})$  nirgends dichtes dyadisches Diskontinuum  $A_i$ ; dann sind die  $A_i$  disjunkt; da es zu jeder in  $E$  offenen Menge  $G \supset A$  ein  $H_i \subseteq G$  gibt, gibt es auch ein  $A_i \subseteq G$ ; und weil  $A_i$  nirgends dicht, so ist  $A^* = \bigcup_i A_i$  von erster Kategorie in  $E$ . Da  $A_i$  nach 18-9-3 und 18-5-11 insichdicht und vollständig, erhält man genau so eine Folge  $A_{i1}, A_{i2}, \dots, A_{ik}, \dots$  disjunkter, in  $A_i$  nirgends dichter dyadischer Diskontinua, so daß es zu jeder in  $A_i$  offenen Menge  $G \supset A$  ein  $A_{ik} \subset G$  gibt; dann ist  $A_i^* = \bigcup_k A_{ik}$  von erster Kategorie in  $A_i$ . Ebenso gibt es eine Folge  $A_{ik1}, A_{ik2}, \dots, A_{ikl}, \dots$  disjunkter, in  $A_{ik}$  nirgends dichter dyadischer Diskontinua, so daß es zu jeder in  $A_{ik}$  offenen Menge  $G \supset A$  ein  $A_{ikl} \subseteq G$

gibt; dann ist  $A_{ik}^* = \bigcup_i A_{ik}$  von erster Kategorie in  $A_{ik}$  usf. — Wir setzen nun  $A^{(1)} = A^*$ ,  $A^{(2)} = \bigcup_i A_i^*$ ,  $A^{(3)} = \bigcup_{ik} A_{ik}^*$  usf., und setzen weiter  $B = \bigcap_n A^{(n)}$ . Da  $B \subseteq A^*$ , ist  $B$  von erster Kategorie in  $E$ ; da  $B \subseteq A_i^*$ , ist  $B \subseteq A_i$  von erster Kategorie in  $A_i$  usf. Da die Mengen  $A_i, A_{ik}, A_{ikl}, \dots$  abgeschlossen, also  $\mathfrak{B}_1$ -Mengen in  $E$  sind, sind die Mengen  $A^*, A_i^*, A_{ik}^*, \dots$   $\mathfrak{B}^2$ -Mengen, also sind auch die Mengen  $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)}, \dots$   $\mathfrak{B}^2$ -Mengen, und somit ist  $B \in \mathfrak{B}_2(E)$ . Es ist noch zu zeigen, daß  $B \sim \varepsilon \mathfrak{B}_2^2(E)$ , d. h. nach § 33 (4·32), daß nicht

$$(4) \quad B = \lim_{\nu} B_{\nu} \text{ mit } B_{\nu} \in \mathfrak{B}_2^2(E)$$

sein kann. — Angenommen, es gelte (4), und sei  $f_{\nu}$  die charakteristische Funktion von  $B_{\nu}$ ,  $f$  die charakteristische Funktion von  $B$ ; nach 35·2·41 ist dann  $f, \varepsilon \mathfrak{C}_2^2(E)$ , und (4) ist gleichbedeutend mit:

$$(4\cdot1) \quad f = \lim_{\nu} f_{\nu}.$$

Sei  $A_{i_0}$  eine der Mengen  $A_i$  und  $C_{\nu}$  die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $A_{i_0} \mid f_{\nu}$ ; nach 37·1·1 und 26·5·11 ist  $C_{\nu}$  von erster Kategorie in  $A_{i_0}$ , und da auch  $B \mid A_{i_0}$  von erster Kategorie in  $A_{i_0}$ , so ist auch  $C = B \mid A_{i_0} + \bigcup_{\nu} C_{\nu}$  von erster Kategorie in  $A_{i_0}$ , also ist nach 19·7·511  $A_{i_0} - C \supseteq A$ . Sei  $a_1 \in A_{i_0} - C$ ; dann ist  $a_1 \sim \varepsilon B$ , also nach (4) auch  $a_1 \sim \varepsilon B_{\nu}$  für fast alle  $\nu$ ; sei  $\nu_1$  so gewählt, daß  $a_1 \sim \varepsilon B_{\nu_1}$ ; dann ist  $f_{\nu_1}(a_1) = 0$ , und da  $a_1 \sim \varepsilon C_{\nu_1}$ , also  $a_1$  Stetigkeitspunkt von  $A_{i_0} \mid f_{\nu_1}$ , gibt es ein positives  $\varrho_1 \leq \frac{1}{2}$ , so daß  $f_{\nu_1}(x) = 0$  für alle  $x \in A_{i_0} \mid K_{a_1, \varrho_1}$ . — Nun gibt es unter den Mengen  $A_{i_0, k}$  eine  $A_{i_0, k_0} \subseteq K_{a_1, \varrho_1}$ ; ersetzt man in der eben durchgeführten Überlegung  $A_{i_0}$  durch  $A_{i_0, k_0}$ , so sieht man: es gibt ein  $a_2 \in A_{i_0, k_0}$ , einen Index  $\nu_2 \geq 2$  und ein positives  $\varrho_2 \leq \frac{1}{2^2}$ , so daß  $a_2 \sim \varepsilon B$  und  $f_{\nu_2}(x) = 0$  für alle  $x \in A_{i_0, k_0} \mid K_{a_2, \varrho_2}$ . Ebenso gibt es ein  $A_{i_0, k_0, l_0} \subseteq K_{a_2, \varrho_2}$ , ein  $a_3 \in A_{i_0, k_0, l_0}$ , einen Index  $\nu_3 \geq 3$  und ein positives  $\varrho_3 \leq \frac{1}{2^3}$ , so daß  $a_3 \sim \varepsilon B$  und  $f_{\nu_3}(x) = 0$  für alle  $x \in A_{i_0, k_0, l_0} \mid K_{a_3, \varrho_3}$  usf. Wir gelangen so zu einer Punktfolge  $((a_n))$ , die wegen  $a_n a_{n+1} < \varrho_n \leq \frac{1}{2^n}$  eine Cauchysche Folge ist; da  $E$  vollständig, gibt es also ein  $a \in E$ , so daß  $a_n \rightarrow a$ . Da  $a_n \in A_{i_0}$  für  $n \geq 1$ ,  $a_n \in A_{i_0, k_0}$  für  $n \geq 2$ ,  $a_n \in A_{i_0, k_0, l_0}$  für  $n \geq 3$  usf., und da die Mengen  $A_{i_0}, A_{i_0, k_0}, A_{i_0, k_0, l_0}, \dots$  abgeschlossen, ist  $a \in A_{i_0}, a \in A_{i_0, k_0}, a \in A_{i_0, k_0, l_0}, \dots$ , also  $a \in A^{(n)}$  für alle  $n$ , also  $a \in B$ , mithin  $f(a) = 1$ . Andererseits folgt aus  $A_{i_0, k_0} \subseteq K_{a_1, \varrho_1}, A_{i_0, k_0, l_0} \subseteq K_{a_2, \varrho_2}, \dots$ , daß  $a \notin K_{a_1, \varrho_1}, a \notin K_{a_2, \varrho_2}, \dots$ ; nun war  $f_{\nu_1}(x) = 0$  für  $x \in A_{i_0} \mid K_{a_1, \varrho_1}, f_{\nu_2}(x) = 0$  für  $x \in A_{i_0, k_0} \mid K_{a_2, \varrho_2}$  usf. Also ist  $f_{\nu_1}(a) = 0, f_{\nu_2}(a) = 0, \dots, f_{\nu_n}(a) = 0, \dots$



dies aber steht wegen  $f(a) = 1$  und  $\nu_n \geq n$  in Widerspruch mit (4.1). Also kann (4) nicht bestehen, w. z. b. w.

Literatur: R. Baire, Acta math. 30 (1906) S. 30; N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 92ff.

### § 38. Folgen Bairescher Funktionen.

1. **Konvergente Folgen Bairescher Funktionen.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $((f_n))$  eine konvergente Folge von  $\mathcal{G}_\xi^E$ -Funktionen in  $E$ , und  $\lim_n f_n = f$ ; dann ist nach 35-1.5  $f \in \mathcal{G}_{\xi+1}^E$ ; wenn aber  $((f_n))$  gleichmäßig konvergiert, ist nach 35-1.4  $f \in \mathcal{G}_\xi^E$ ; gleichmäßige Konvergenz ist also eine hinreichende, keineswegs aber notwendige Bedingung dafür, daß  $f \in \mathcal{G}_\xi^E$  sei. Wir geben eine Bedingung an, die notwendig und hinreichend ist. Wir setzen  $S(f_n) - S(f) = r_n$ , wo  $S$  die Schränkungstransformation bedeutet; dann sagen wir: die Folge  $((f_n))$  ist im Punkte  $a \in E$   $\mathcal{G}_\xi^E$ -konvergent gegen  $f$ , wenn es zu jedem  $\varrho > 0$  eine Umgebung  $U_a$ , einen Index  $n$  und ein  $g \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$  gibt, so daß  $|r_n(x) - g(x)| < \varrho$  für alle  $x \in U_a$ .

**38-1.1.** Ist  $((f_n))$  eine konvergente Folge von  $\mathcal{G}_\xi^E$ -Funktionen ( $\xi > 1$ ) im separablen Raume  $E$ , und  $f = \lim_n f_n$ , so ist, damit auch  $f \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in  $E$  perfekten Menge  $P \supset A$  einen Punkt gebe, in dem  $((P \upharpoonright f_n))$   $\mathcal{G}_\xi^E$ -konvergent gegen  $P \upharpoonright f$  ist.

Notwendig: Ist  $f_n \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$ ,  $f \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$ , so ist nach 35-1.4 auch  $r_n = S(f_n) - S(f) \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$ , also nach 35-3.3 auch  $P \upharpoonright r_n \in \mathcal{G}_\xi^E(P)$ ; somit ist  $((P \upharpoonright f_n))$  in jedem Punkte von  $P$   $\mathcal{G}_\xi^E$ -konvergent gegen  $P \upharpoonright f$ . Hinreichend: Ist  $((P \upharpoonright f_n))$  im Punkte  $a \in P$   $\mathcal{G}_\xi^E$ -konvergent gegen  $P \upharpoonright f$ , so gibt es zu jedem  $\varrho > 0$  eine Umgebung  $U_a$ , einen Index  $n$  und ein  $g \in \mathcal{G}_\xi^E(P)$ , so daß  $|r_n(x) - g(x)| < \varrho$  für alle  $x \in P \cap U_a$ , d. h.  $|P \upharpoonright S(f_n) - g| < \varrho$  für alle  $x \in P \cap U_a$ ; da  $P \upharpoonright S(f_n) - g \in \mathcal{G}_\xi^E(P)$ , besagt das:  $P \upharpoonright S(f)$  ist im Punkte  $a$  eine  $\mathcal{G}_\xi^E$ -Funktion (§ 35, 7); nach 35-7.4 ist also  $S(f) \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$ , also auch  $f \in \mathcal{G}_\xi^E(E)$ .

Wie 35-7.4 für  $\xi = 2$  ergänzt wird durch 37-1.2, wird 38-1.1 für  $\xi = 2$  ergänzt durch:

**38-1.2.** Ist  $((f_n))$  eine konvergente Folge von Funktionen erster Klasse im separablen Youngschen Raume  $E$ , und  $f = \lim_n f_n$ , so ist, damit auch  $f$  von erster Klasse sei, notwendig und hinreichend, daß es in jeder in  $E$  perfekten Menge  $P \supset A$  einen Punkt gebe, in dem  $((P \upharpoonright f_n))$  uniform gegen  $P \upharpoonright f$  konvergiert.

Notwendig: Nach 37-1.1 sind  $P \upharpoonright f_n$  und  $P \upharpoonright f$  punktweise unstetig; ist also  $A_n$  bzw.  $A$  die Menge der Unstetigkeitspunkte von  $P \upharpoonright f_n$  bzw.  $P \upharpoonright f$ ,

so sind nach 26-5-11  $A_n$  und  $A$  von erster Kategorie in  $P$ , also auch  $B = \bigcup_n A_n + A$ : also ist nach 19-7-511  $P - B \supset A$ ; in jedem Punkte  $b \in P - B$  sind aber alle  $P \nmid f_n$  und  $P \nmid f$  stetig, also ist nach 28-1-1 die Konvergenz von  $((P \nmid f_n))$  gegen  $P \nmid f$  uniform in  $b$ . Hinreichend: Konvergiert die Folge  $((P \nmid f_n))$  im Punkte  $b \in P$  uniform gegen  $P \nmid f$ , so ist sie in  $b$  auch  $\mathfrak{G}_2^1$ -konvergent gegen  $f$ : die Behauptung folgt also aus 38-1-1 für  $\xi = 2$ .

**38-1-3.** Ist  $((f_n))$  eine konvergente Folge von  $\mathfrak{G}_\xi^1$ -Funktionen im metrischen Raume  $E$ , und  $f = \lim_n f_n$ , so ist, damit auch  $f \in \mathfrak{G}_\xi^1(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\delta > 0$  eine Folge von Mengen  $E_\nu \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  und eine Indizesfolge  $((n_\nu))$  gebe, so daß  $E = \bigcup_\nu E_\nu$  und  $\|f_{n_\nu}(x) - f(x)\| < \delta$  für alle  $x \in E_\nu$ .

Notwendig: Ist  $f \in \mathfrak{G}_\xi^1(E)$ , so ist auch  $S(f_\nu) - S(f) \in \mathfrak{G}_\xi^1(E)$ , also nach 30-5-1 auch  $\|f_\nu - f\| \in \mathfrak{G}_\xi^1(E)$ ; setzen wir  $[ \|f_\nu(x) - f(x)\| < \delta ] = E_\nu$ , so ist also nach 35-2-2  $E_\nu \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ , und wegen  $f = \lim_\nu f_\nu$  ist  $E = \bigcup_\nu E_\nu$ . Hinreichend: Nach 35-6-4 gibt es eine Folge von Mengen  $A_{ni} \in \mathfrak{B}^\xi(E)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) und von Zahlen  $c_{ni}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), so daß  $E = \bigcup_i S A_{ni}$  und  $\|f_n - c_{ni}\| < \delta$  auf  $A_{ni}$ . Dann ist  $\|f - c_{ni}\| \leq \|f_n - f\| + \|f_n - c_{ni}\| < 2\delta$  auf  $A_{ni} E_\nu$ . Und da  $E = \bigcup_\nu E_\nu = \bigcup_{i,\nu} S A_{ni} E_\nu$  und  $A_{ni} E_\nu \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ , ist  $f \in \mathfrak{G}_\xi^1(E)$  nach 35-6-4.

Im Falle  $\xi = 1$  sind die Mengen  $E_\nu$  von Satz 38-1-3 als  $\mathfrak{B}^1$ -Mengen offen in  $E$ ; ist  $E$  in sich kompakt, so gibt es also nach 15-5-1 unter den  $E_\nu$  endlich viele, die  $E$  überdecken; beachtet man noch, daß, wenn  $f$  und die  $f_n$  stetig sind, die Mengen  $[ \|f_n(x) - f(x)\| < \delta ]$  nach 25-8-1 offen in  $E$  sind, so erkennt man, daß sich 38-1-3 für  $\xi = 1$  auf 28-2-2 reduziert.

Literatur zu Satz 38-1-1: H. Fried, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931) S. 301; zu Satz 38-1-2: C. Burstin, Monatsh. f. Math. u. Phys. 27 (1916) S. 292; zu Satz 38-1-3: B. Gageff, Fund. math. 18 (1932) S. 182.

**2. Kompakte Mengen von  $\mathfrak{G}_\xi^1$ -Funktionen.** Gebrauchen wir den Begriff der kompakten Funktionenmenge in dem in § 29, 4 eingeführten Sinne, so gilt:

**38-2-1.** Damit die Menge  $\mathfrak{M}$  von  $\mathfrak{G}_\xi^1$ -Funktionen in  $E$  ( $\xi > 1$ ) kompakt sei, ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem  $\varrho > 0$  endlich viele Mengen  $A_\nu \in \mathfrak{B}_\xi^1(E)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) und zu jedem  $f \in \mathfrak{M}$   $n$  Zahlen  $c_1, c_2, \dots, c_n$  gibt, so daß  $E = \bigcup_{\nu=1}^n A_\nu$  und  $\|f(x) - c_\nu\| < \varrho$  für alle  $x \in A_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ).

Notwendig: Sei  $\mathfrak{M}$  kompakt; nach 9-7-1 und 15-1-4 gibt es endlich viele Funktionen  $g_i \in \mathfrak{M}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), die ein  $\frac{\varrho}{2}$ -Netz in  $\mathfrak{M}$  bilden. Nach 35-6-3 gibt es endlich viele Mengen  $A_{i,v} \in \mathfrak{B}_\varepsilon^f(E)$  ( $v = 1, 2, \dots, n_i$ ) und Zahlen  $c_{i,v}$  ( $v = 1, 2, \dots, n_i$ ), so daß  $E = \bigcup_{v=1}^{n_i} A_{i,v}$  und  $\|g_i(x) - c_{i,v}\| < \frac{\varrho}{2}$  für alle  $x \in A_{i,v}$ . Wir bilden die sämtlichen (endlich vielen) Durchschnitts- $A_{1,v_1} A_{2,v_2} \dots A_{k,v_k}$  ( $v_1 = 1, 2, \dots, n_1; v_2 = 1, 2, \dots, n_2; \dots; v_k = 1, 2, \dots, n_k$ ) und bezeichnen die nicht leeren unter ihnen mit  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ; dann ist  $A_v \in \mathfrak{B}_\varepsilon^f(E)$  ( $v = 1, 2, \dots, n$ ) und  $E = \bigcup_{v=1}^n A_v$ . Da  $g_1, g_2, \dots, g_k$  ein  $\frac{\varrho}{2}$ -Netz in  $\mathfrak{M}$  bilden, gehört zu jedem  $f \in \mathfrak{M}$  ein  $g_i$ , so daß  $\|f(x) - g_i(x)\| < \frac{\varrho}{2}$  für alle  $x \in E$ ; nach Definition der Mengen  $A_v$  gibt es eine Zahl  $c_v$ , so daß  $\|g_i(x) - c_v\| < \frac{\varrho}{2}$  für alle  $x \in A_v$ ; also ist  $\|f(x) - c_v\| \leq \|f(x) - g_i(x)\| + \|g_i(x) - c_v\| < \varrho$  für alle  $x \in A_v$ . Hinreichend: Um zu zeigen, daß  $\mathfrak{M}$  kompakt, genügt es nach 17-2-531 zu zeigen: in jeder Folge  $((f_i))$  aus  $\mathfrak{M}$  gibt es eine gleichmäßig konvergente Teilfolge. Nach Annahme gibt es für jede natürliche Zahl  $k$  endlich viele Mengen  $A_{k,v}$  ( $v = 1, 2, \dots, n_k$ ) und Konstanten  $c_{k,v}$  ( $v = 1, 2, \dots, n_k$ ), so daß  $E = \bigcup_{v=1}^{n_k} A_{k,v}$  und  $\|f_i(x) - c_{k,v}\| < \frac{1}{k}$  für  $x \in A_{k,v}$  ( $v = 1, 2, \dots, n_k$ ). Jeder Funktion  $f_i$  unserer Folge ist so für jedes  $k$  ein System von Zahlen  $(c_{ik1}, c_{ik2}, \dots, c_{ikn_k})$  zugeordnet. Nun gibt es in der Folge  $((f_i))$  eine Teilfolge  $f_1^1, f_2^1, \dots, f_j^1, \dots$ , so daß die zugeordneten Zahlen  $c_{i11}$  gegen einen Grenzwert  $c_{11}^*$  im  $\bar{R}_1$  konvergieren, die zugeordneten Zahlen  $c_{i12}$  gegen einen Grenzwert  $c_{12}^*$ , ..., die zugeordneten Zahlen  $c_{i1n_1}$  gegen einen Grenzwert  $c_{1n_1}^*$ ; in  $((f_j^1))$  gibt es wieder eine Teilfolge  $((f_j^2))$ , so daß die zugehörigen Zahlen  $c_{i21}$  gegen einen Grenzwert  $c_{21}^*$  im  $\bar{R}_1$  konvergieren, die zugehörigen Zahlen  $c_{i22}$  gegen einen Grenzwert  $c_{22}^*$ , ..., die zugehörigen Zahlen  $c_{i2n_2}$  gegen einen Grenzwert  $c_{2n_2}^*$  usw. Bilden wir aus den so erhaltenen Folgen  $((f_j^1)), ((f_j^2)), ((f_j^3)), \dots$  die Diagonalfolge  $f_1^1, f_2^2, \dots, f_j^j, \dots$ , so ist dies eine Teilfolge aus  $((f_i))$  von folgender Eigenschaft: ist  $\bar{c}_{jk}$  die der Funktion  $f_j^j$  zugeordnete Zahl  $c_{jk}$ , so gilt  $\lim_j \bar{c}_{jk} = c_k^*$  für alle  $k$  und  $v = 1, 2, \dots, n_k$ . Es gibt also ein  $j_k$ , so daß  $\|\bar{c}_{jk} - c_{v,k}^*\| < \frac{1}{k}$  für  $j > j_k, j' > j_k, v = 1, 2, \dots, n_k$ . Zunfolge der

Bedeutung der Zahlen  $c_{ik}$ , gelten aber in jedem Punkte  $x \in E$  für mindestens ein  $\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n_k$ ) die beiden Ungleichungen:  $\|f_j'(x) - \tilde{c}_{jk}\| < \frac{1}{k}$ ,  $\|f_j''(x) - \tilde{c}_{jk}\| < \frac{1}{k}$ ; für  $j > j_k$ ,  $j' > j_k$  und alle  $x \in E$  ist also  $\|f_j'(x) - f_{j'}'(x)\| < \frac{3}{k}$ ; es ist also  $((f_j'))$  eine gleichmäßig konvergente Teilfolge aus  $((f_i))$ .

Literatur: P. Veress, Fund. math. 7 (1925) S. 244.

**3. Folgen Borelscher Mengen.** Ist  $((B_i))$  eine Folge von  $\mathfrak{B}_\varepsilon$ -Mengen, so ist  $\bigcup B_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$ . In Ergänzung hierzu gilt:

**33.3-1.** Ist  $((B_i))$  eine Folge disjunkter  $\mathfrak{B}_\varepsilon$ -Mengen ( $\varepsilon > 1$ ) und  $B = \bigcup B_i$ , so ist damit  $B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$  sei, notwendig und hinreichend, daß es Mengen  $A_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^i$  gebe, so daß  $B_i \subseteq A_i$  und  $\lim A_i = A$ .

Notwendig: Ist  $B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$ , so ist nach 33.4-21 auch  $E - B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$ , also  $E - B = \bigcup B'_i$  mit  $B'_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^i$ . Da  $B_i$  fremd zu  $(B_1 + B'_1) + \dots + (B_{i-1} + B'_{i-1})$ , gibt es nach 33.4-61 ein  $A_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^i$ , so daß  $B_i \subseteq A_i$ ,  $(B_1 + B'_1) + \dots + (B_{i-1} + B'_{i-1}) \subseteq E - A_i$ . Da  $E = \bigcup (B_i + B'_i)$ , gibt es zu jedem  $a \in E$  ein  $n$ , so daß  $a \in B_n + B'_n$ ; da  $B_n + B'_n \subseteq E - A_n$ , für  $\nu > n$ , ist  $a \sim_\varepsilon A_n$  für fast alle  $\nu$ , d. h.  $\lim A_n = A$ . Hinreichend<sup>1</sup>: Da  $B_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^i$ , ist auch  $B_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$ , also gibt es nach § 33 (4-32) in  $\mathfrak{B}_\varepsilon^i$  eine Folge  $B_{i1}, B_{i2}, \dots, B_{i\lambda}, \dots$ , so daß  $B_i = \lim_\lambda B_{i\lambda}$ . Wir setzen:  $C_\lambda = B_{1\lambda} A_1 + B_{2\lambda} A_2 + \dots + B_{\lambda\lambda} A_\lambda$ ; dann ist  $C_\lambda \in \mathfrak{B}_\varepsilon^\lambda$ . Um zu zeigen, daß  $B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$ , genügt es also nach § 33 (4-32) zu zeigen, daß  $B = \lim_\lambda C_\lambda$ ; d. h. wir haben zu zeigen: ist  $a \in B$ , so auch  $a \in C_\lambda$  für fast alle  $\lambda$ ; ist  $a \sim_\varepsilon B$ , so auch  $a \sim_\varepsilon C_\lambda$  für fast alle  $\lambda$ . Sei also  $a \in B$ ; dann gibt es ein  $n$ , so daß  $a \in B_n$ ; dann ist auch  $a \in A_n$ , und es gibt ein  $\lambda^*$ , so daß  $a \in B_{n\lambda}$  für  $\lambda > \lambda^*$ ; also ist  $a \in C_\lambda$ , sobald  $\lambda > \lambda^*$  und  $\lambda > n$ . Sei sodann  $a \sim_\varepsilon B$ ; wegen  $\lim A_i = A$  gibt es ein  $n$ , so daß  $a \sim_\varepsilon A_n$  für  $\nu > n$ ; wegen  $a \sim_\varepsilon B$  ist auch  $a \sim_\varepsilon B_\nu$  für alle  $\nu$ ; mithin gibt es ein  $\lambda^*$ , so daß  $a \sim_\varepsilon B_{\nu\lambda}$  für  $\nu = 1, 2, \dots, n$  und  $\lambda > \lambda^*$ ; dann aber ist auch  $a \sim_\varepsilon C_\lambda$  für  $\lambda > \lambda^*$ .

**33.3-2.** Ist  $B \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$  ( $\varepsilon > 1$ ), so gibt es eine Folge disjunkter Mengen  $B_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^i$ , so daß  $B = \bigcup B_i$ .

<sup>1</sup>) Bei diesem Teil des Beweises kann die Voraussetzung  $B_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^i$  auch durch die weitere  $B_i \in \mathfrak{B}_\varepsilon^{i+1}$  ersetzt werden, und die Voraussetzung, die  $B_i$  seien disjunkt, kann weggelassen werden.

Nach § 33 (4·32) ist  $B = \lim_{\lambda} C_{\lambda}$  mit  $C_{\lambda} \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\pm}$ , also ist auch  $B = \lim_{\lambda} C_{\lambda}$ , und mithin nach § 3 (7·1), wenn  $D_{\lambda} = \bigcup_{\mu \geq \lambda} C_{\mu}$  gesetzt wird:  $B = \bigcap_{\lambda} D_{\lambda} = D_1 + (D_2 - D_1) + (D_3 - D_2) + \dots$ ; hierin sind die Mengen  $D_1, D_2 - D_1, D_3 - D_2, \dots$  disjunkt. Wegen  $C_{\mu} \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\pm}$  ist nach § 33 (4·31):  $D_{\lambda} \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\pm}$ , und da  $D_{\lambda-1} - D_{\lambda} = D_{\lambda+1} (E - C_{\lambda})$ , und da nach 38·4·21 auch  $E - C_{\lambda} \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\pm}$ , so ist auch  $D_{\lambda-1} - D_{\lambda} \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\pm}$ .

**38·3·21.** Ist  $B \in \mathfrak{B}_{\xi}^{\pm-1}$  ( $\xi > 1$ ), so gibt es eine Folge disjunkter Mengen  $B_{\nu} \in \mathfrak{B}_{\xi}$ , so daß  $B = \bigcup B_{\nu}$ .

Nach § 33 (4·31) ist  $B = \bigcup C_{\nu}$  mit  $C_{\nu} \in \mathfrak{B}_{\xi-1}^{\pm-1}$ , und wegen 38·4·32 kann nach 3·8·11 angenommen werden, daß die Summanden  $C_{\nu}$  disjunkt sind; also folgt die Behauptung aus 38·3·2.

Für  $\xi = 1$  gilt nur:

**38·3·211.** Ist  $B \in \mathfrak{B}^2$ , so gibt es eine Folge von Mengen  $B_{\nu} \in \mathfrak{B}_1$ , so daß  $B = \bigcup B_{\nu}$ , und der Durchschnitt je dreier Mengen  $B_{\nu}$  leer ist.

Die Menge  $B$  ist ein  $F_{\sigma}$ , also  $B = \bigcup F_{\nu}$ , wo  $F_{\nu}$  abgeschlossen; dabei kann  $F_{\nu} \subseteq F_{\nu-1}$  angenommen werden; dann ist  $B = F_1 + (F_2 - F_1) + \dots$ . Es ist also nur zu zeigen: sind  $F'$  und  $F''$  abgeschlossen, so ist  $F' - F'' = \bigcup C_{\nu}$ , wo  $C_{\nu}$  abgeschlossen und der Durchschnitt je dreier  $C_{\nu}$  leer ist. Zu dem Zwecke bezeichnen wir mit  $C_1$  die Menge aller Punkte  $x \in F'$ , für die  $x F'' \geq 1$ , mit  $C_{\nu}$  ( $\nu > 1$ ) die Menge aller Punkte  $x \in F'$ , für die  $\frac{1}{\nu-1} \geq x F'' \geq \frac{1}{\nu}$ ; dann ist  $C_{\nu}$  abgeschlossen, der Durchschnitt je dreier  $C_{\nu}$  ist leer und  $F' - F'' = \bigcup C_{\nu}$ .

**38·3·212.** Ist  $B \in \mathfrak{B}^{\pm}$  ( $\xi$  Grenzzahl), so gibt es eine Folge disjunkter Mengen  $B_{\nu} \in \mathfrak{B}_{\eta_{\nu}}$  ( $\eta_{\nu} < \xi$ ), so daß  $B = \bigcup B_{\nu}$ .

Da nach § 33 (4·21)  $\mathfrak{B}^{\pm} = \bigcup_{\eta < \xi} \mathfrak{B}_{\eta}^{\pm}$ , ist  $B = \bigcup A_{\nu}$ , wo  $A_{\nu} \in \mathfrak{B}_{\xi_{\nu}}^{\pm}$  ( $\xi_{\nu} < \xi$ ); dabei kann angenommen werden:  $\xi_{\nu} < \xi_{\nu-1}$  und  $A_{\nu} \subseteq A_{\nu-1}$ ; dann ist  $B = \bigcup (A_{\nu} - A_{\nu-1})$  (wo  $A_0 = \emptyset$ ); wegen  $A_{\nu-1} \in \mathfrak{B}_{\xi_{\nu-1}}^{\pm}$  ist  $E - A_{\nu-1} \in \mathfrak{B}_{\xi_{\nu-1}}^{\pm}$ , also wegen  $\xi_{\nu-1} < \xi_{\nu}$  auch  $E - A_{\nu-1} \in \mathfrak{B}_{\xi_{\nu}}^{\pm}$ ; setzen wir  $B_{\nu} = A_{\nu} - A_{\nu-1}$ , so ist also  $B_{\nu} \in \mathfrak{B}_{\xi_{\nu}}^{\pm}$ ; setzen wir noch  $\xi_{\nu} + 1 = \eta_{\nu}$ , so ist  $\eta_{\nu} < \xi$ ,  $B_{\nu} \in \mathfrak{B}_{\eta_{\nu}}$ ,  $B = \bigcup B_{\nu}$ , und die  $B_{\nu}$  sind disjunkt.

Sei nun  $E$  wie in § 31, I eine ganz beliebige Menge,  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$ . Dann gilt:

**38·3·3.** Für jede Mengenfolge  $((M_n))$  aus  $\mathfrak{M}$  ist  $\overline{\lim}_n M_n \in \mathfrak{M}_2$ ,  $\lim_n M_n \in \mathfrak{M}^2$ .

Dies folgt aus § 3 (7.1).

Sei insbesondere  $E$  ein metrischer Raum. Dann gelten für die Borelschen Mengen in  $E$  folgende Sätze:

**38-3-31.** Ist  $((A_n))$  eine Mengenfolge aus  $\mathfrak{B}^{\xi}$  (bzw. aus  $\mathfrak{B}_i$ ), so ist  $\overline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ ,  $\underline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{B}_{\xi+2}^{\xi}$  (bzw.  $\overline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ ,  $\underline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{B}_{\xi+2}^{\xi}$ ).

Nach § 33 (4.3) ist  $(\mathfrak{B}^{\xi})_1 = \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ ,  $(\mathfrak{B}^{\xi})^1 = \mathfrak{B}^{\xi}$ , also  $(\mathfrak{B}^{\xi})^2 = \mathfrak{B}^{\xi+2}$ .  $(\mathfrak{B}^{\xi})_2 = \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ ; die Behauptung folgt also aus 38-3-3.

**38-3-32.** Ist  $((A_n))$  eine Mengenfolge aus  $\mathfrak{B}_i^{\xi}$ , so ist  $\overline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{B}_{i+1}^{\xi}$ ,  $\underline{\lim}_n A_n \in \mathfrak{B}_{i+2}^{\xi}$ .

Dies folgt wegen  $\mathfrak{B}_i^{\xi} \subseteq \mathfrak{B}^{\xi}$ ,  $\mathfrak{B}_i^{\xi} \subseteq \mathfrak{B}_i$  aus 38-3-31.

**38-3-4.** Ist  $A \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}^{\xi+1}$ ) ( $\xi > 1$ ), so gibt es eine Folge  $((A_n))$ , so daß  $A_n \in \mathfrak{B}_{\eta_n}^{\xi}$  (bzw.  $A_n \in \mathfrak{B}^{\eta_n}$ ) ( $\eta_n < \xi$ ) und  $\overline{\lim}_n A_n = A$  (bzw.  $\underline{\lim}_n A_n = A$ ).

Da  $A \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ , ist  $A = D B_n$ , wo  $B_n \in \mathfrak{B}^{\xi}$ , und nach 3-2-11 kann noch angenommen werden:  $B_{n+1} \subseteq B_n$ ; nach 38-3-21, 38-3-211, 38-3-212 ist  $B_n = S B_{\eta_n}$ , wo  $B_{\eta_n} \in \mathfrak{B}_{\eta_n}^{\xi}$  ( $\eta_n < \xi$ ), und der Durchschnitt je zweier, bzw. je dreier Summanden  $= A$  ist. Ist  $a \in A$ , so  $a \in B_n$  für alle  $n$ , also  $a \in B_{\eta_n}$  für unendlich viele Indizespaare  $(n, \eta_n)$ ; gilt umgekehrt  $a \in B_{\eta_n}$  für unendlich viele Indizespaare, so müssen, da je zwei, bzw. drei  $B_{\eta_n}$  von gleichem Index  $\eta$  leeren Durchschnitt haben, in diesen Indizespaaren unendlich viele verschiedene  $n$  vorkommen; also ist  $a \in B_n$  für unendlich viele  $n$ , und weil  $((B_n))$  monoton abnimmt,  $a \in A$  für alle  $n$ , d. h.  $a \in A$ . Ordnen wir die  $B_n$  ( $n, \eta = 1, 2, \dots$ ) in eine Folge  $((A_i))$ , so ist demnach  $\overline{\lim}_i A_i = A$ . — Die den  $\underline{\lim}$  betreffende Behauptung ergibt sich hieraus nach 38-4-2 und § 3 (7.21) durch Komplementbildung.

**38-3-41.** Ist  $A \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$  (bzw.  $A \in \mathfrak{B}^{\xi+1}$ ) ( $\xi > 1$ ), so gibt es in  $\mathfrak{B}_i^{\xi}$  eine Folge  $((A_n))$ , so daß  $\overline{\lim}_n A_n = A$  (bzw.  $\underline{\lim}_n A_n = A$ ).

Dies folgt, da  $\mathfrak{B}_{\eta} \subseteq \mathfrak{B}_i^{\xi}$  für  $\eta < \xi$ , aus 38-3-4.

**38-3-5.** Ist  $\bar{A} \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ ,  $\underline{A} \in \mathfrak{B}^{\xi+2}$  (bzw.  $\bar{A} \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ ,  $\underline{A} \in \mathfrak{B}_{\xi+2}^{\xi}$ ) und  $\underline{A} \subseteq \bar{A}$ , so gibt es in  $\mathfrak{B}^{\xi}$  (bzw. in  $\mathfrak{B}_i^{\xi}$ ) eine Mengenfolge  $((A_n))$ , so daß  $\overline{\lim}_n A_n = \bar{A}$ ,  $\underline{\lim}_n A_n = \underline{A}$ .

Da  $\bar{A} \in \mathfrak{B}_{\xi+1}^{\xi}$ , gibt es in  $\mathfrak{B}^{\xi}$  eine monoton abnehmende Mengenfolge  $((A'_n))$  mit  $\underline{\lim}_n A'_n = \bar{A}$ ; dann ist auch  $\overline{\lim}_n A'_n = \bar{A}$ . Nach 38-3-4 gibt es in

$\mathfrak{B}^\xi$  eine Mengenfolge  $((A_n''))$  mit  $\varliminf_n A_n'' = \underline{A}$ . Setzen wir  $A_{2n-1} = A_n'$ ,  $A_{2n} = A_n' A_n''$ , so ist  $\varliminf_n A_{2n-1} = \varliminf_n A_{2n-1} = \underline{A}$ , und nach § 3 (7.4):  $\varliminf_n A_{2n} = \underline{A}$ ,  $\varliminf_n A_{2n} \subseteq \underline{A}$ , also  $\varliminf_n A_n = \underline{A}$ ,  $\varliminf_n A_n = \underline{A}$ .

**38-3-51.** Ist  $\bar{A} \in \mathfrak{B}_{\xi+1}$ ,  $\bar{A} \in \mathfrak{B}^{\xi+1}$  ( $\xi > 1$ ) und  $\bar{A} \subseteq A$ , so gibt es in  $\mathfrak{B}_\xi^t$  eine Mengenfolge  $((A_n))$ , so daß  $\varliminf_n \bar{A}_n = \bar{A}$ ,  $\varliminf_n A_n = \bar{A}$ .

Nach 38-3-41 gibt es in  $\mathfrak{B}_\xi^t$  Mengenfolgen  $((A_n'))$ ,  $((A_n''))$ , so daß  $\varliminf_n A_n' = \bar{A}$ ,  $\varliminf_n A_n'' = \underline{A}$ . Da  $\bar{A} \in \mathfrak{B}_{\xi+1}$ ,  $\bar{A} \in \mathfrak{B}^{\xi+1}$ , gibt es in  $\mathfrak{B}^t$  eine monoton abnehmende Mengenfolge  $((\bar{A}_n))$ , in  $\mathfrak{B}_\xi$  eine monoton wachsende Mengenfolge  $((\underline{A}_n))$ , so daß  $\varlimsup_n \bar{A}_n = \bar{A}$ ,  $\varlimsup_n \underline{A}_n = \underline{A}$ , also auch  $\varliminf_n \bar{A}_n = \bar{A}$ ,  $\varliminf_n \underline{A}_n = \underline{A}$ ; wegen  $\bar{A} \subseteq A$  ist auch  $\bar{A}_n \subseteq A_n$ , also gibt es nach 38-4-6 ein  $\bar{A}_n \in \mathfrak{B}_\xi^t$ , so daß  $\bar{A}_n \subseteq \bar{A}_n \subseteq \bar{A}_n$ ; dann ist  $\bar{A} \subseteq \varliminf_n \bar{A}_n \subseteq \varliminf_n \bar{A}_n \subseteq \bar{A}$ . Setzen wir  $A_{2n-1} = \bar{A}_n + A_n'$ ,  $A_{2n} = \bar{A}_n A_n''$ , so ist nach § 3 (7.3), (7.4):  $\bar{A} \subseteq \varliminf_n \bar{A}_n \subseteq \varliminf_n A_{2n-1} \subseteq \varliminf_n A_{2n-1} = \bar{A}$ ;  $\bar{A} = \varliminf_n A_{2n} \subseteq \varliminf_n A_{2n} \subseteq \varliminf_n \bar{A}_n \subseteq \bar{A}$ ; also ist  $\varliminf_n A_n = \bar{A}$ ,  $\varliminf_n A_n = \bar{A}$ .

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 21; Věst. král. čes. spol. nauk Tr. 2, roč. 1931; N. Lusin, Leq. s. l. ensembles analytiques S. 74 ff.

**4. Supremum und Infimum einer Folge Bairescher Funktionen.** Sei  $E$  wie in § 30, 1 eine ganz beliebige Menge; alle im folgenden auftretenden Funktionen sind Funktionen auf  $E$ ;  $\mathfrak{S}$  bedeutet ein System von Funktionen auf  $E$ . Dann gilt:

**38-4-1.** Ist  $\mathfrak{S}$  völlig autark, und ist  $\bar{f} \leq \bar{f}$ , so ist, damit es in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\sup_n f_n = \bar{f}$ ,  $\inf_n f_n = \bar{f}$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $\bar{f} \in \mathfrak{S}^1$ ,  $\bar{f} \in \mathfrak{S}_1$  sei.

Notwendig: Dies folgt aus 31-2-2. Hinreichend: Wegen  $\bar{f} \in \mathfrak{S}^1$ ,  $\bar{f} \in \mathfrak{S}_1$  gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine monoton wachsende Folge  $((f_n'))$  und eine monoton abnehmende Folge  $((f_n''))$ , so daß  $\lim_n f_n' = \bar{f}$ ,  $\lim_n f_n'' = \bar{f}$ . Ferner gibt es nach 32-2-11 ein  $f \in \mathfrak{S}$ , so daß  $\bar{f} \leq f \leq \bar{f}$ . Setzen wir  $f_{2n-1} = \max(f_n', f)$ ,  $f_{2n} = \min(f_n'', f)$ , so ist  $\sup_n f_n = \bar{f}$ ,  $\inf_n f_n = \bar{f}$ .

**38-4-2.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark, und ist  $\underline{f} \leq \bar{f}$ , so ist, damit es in  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{t}}$  (bzw. in  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}$ ) eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\sup_n f_n = \bar{f}$ ,  $\inf_n f_n = \underline{f}$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $\bar{f} \in \mathfrak{S}^{\mathfrak{t}}$ ,  $\underline{f} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}+1}$  (bzw.  $\bar{f} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}$ ,  $\underline{f} \in \mathfrak{S}^{\mathfrak{t}+1}$ ) sei.

Nach 34-1-4 ist  $\mathfrak{S}^{\mathfrak{t}}$  völlig autark; nach 34-1-32 ist  $(\mathfrak{S}^{\mathfrak{t}})^1 = \mathfrak{S}^{\mathfrak{t}}$  und nach 34-1-3  $(\mathfrak{S}_{\mathfrak{t}})_1 = \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}-1}$ . Die Behauptung folgt also aus 38-4-1.

**38-4-3.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark, und ist  $\underline{f} \leq \bar{f}$ , so ist, damit es in  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{t}}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\sup_n f_n = \bar{f}$ ,  $\inf_n f_n = \underline{f}$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $\bar{f} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{t}}$ ,  $\underline{f} \in \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}$  sei.

Nach 34-2-2 ist  $\mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{t}}$  völlig autark; nach 34-2-3 ist  $(\mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{t}})^1 = \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{t}}$ ,  $(\mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}^{\mathfrak{t}})_1 = \mathfrak{S}_{\mathfrak{t}}$ ; die Behauptung folgt also aus 38-4-1.

**5. Limes superior und inferior einer Folge Bairescher Funktionen.**  
Sei wieder  $E$  eine beliebige Menge,  $\mathfrak{S}$  ein Funktionensystem auf  $E$ .

**38-5-1.** Ist  $\mathfrak{S}$  autark,  $((f_n))$  eine Funktionenfolge aus  $\mathfrak{S}$ , so ist  $\overline{\lim}_n f_n \in \mathfrak{S}_2$ ,  $\underline{\lim}_n f_n \in \mathfrak{S}^2$ .

Setzen wir  $\sup_n f_n = g$ , so ist  $((g_n))$  monoton abnehmend und  $\overline{\lim}_n f_n = \lim_n g_n$ ; da nach 31-2-2  $g, \varepsilon \in \mathfrak{S}^1$ , ist  $\overline{\lim}_n f_n \in \mathfrak{S}_2$ .

Um hiervon die Umkehrung zu beweisen, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Sei  $\mathfrak{S}$  ein autarkes Funktionensystem auf  $E$ ; wir setzen  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$  (bzw.  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{N}$ ). Ist dann  $A \in \mathfrak{M}^1$  (bzw.  $A \in \mathfrak{N}_1$ ),  $c$  eine beliebige Zahl, und bezeichnet  $f$  die Funktion, die  $= c$  ist auf  $A$  und  $= -\infty$  (bzw.  $= +\infty$ ) auf  $E - A$ , so ist nach 31-2-51:  $f \in \mathfrak{S}^1$  (bzw.  $f \in \mathfrak{S}_1$ ); es gibt also nach 38-4-1 in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\sup_n f_n = f$  (bzw.  $\inf_n f_n = f$ ). Wir wollen  $\mathfrak{S}$  ein  $\gamma^1$ -System (bzw.  $\gamma_1$ -System) nennen, wenn sich die Folge  $((f_n))$  insbesondere so wählen läßt, daß für jedes  $x \in E$  höchstens endlich viele Funktionswerte  $f_n(x) \neq -\infty$  (bzw.  $\neq +\infty$ ) sind. Ist das System  $\mathfrak{S}$  sowohl ein  $\gamma^1$ -System als auch ein  $\gamma_1$ -System, so nennen wir es ein  $\gamma_1^1$ -System.

Ist insbesondere  $E$  ein metrischer Raum, so gilt:

**38-5-2.** Das System  $\mathfrak{C}$  der stetigen Funktionen auf  $E$  ist ein  $\gamma_1^1$ -System.

Setzen wir  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{M}$ , so ist nach § 35 (2)  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^1$ , somit auch  $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{B}^1$ . Sei also  $A \in \mathfrak{B}^1$  und  $f = c$  auf  $A$ ,  $= -\infty$  auf  $E - A$ . Bezeichnet  $\varrho(x)$  den Abstand des Punktes  $x$  von der Menge  $E - A$ , und  $A_1$  die Menge



$[\varrho(\xi) \geq 1]$ ,  $A_n (n > 1)$  die Menge  $\left[\frac{1}{n} \leq \varrho(\xi) \leq \frac{1}{n-1}\right]$ , so sind die Mengen  $A_n (n = 1, 2, \dots)$  nach 10-2-3 und 10-2-4 abgeschlossen, der Durchschnitt je dreier  $A_n$  ist leer, und weil  $A$  offen, also  $E - A$  abgeschlossen in  $E$ , ist  $A = \bigcup_n A_n$ . Da  $A_n$ , sowie  $\bigcup_{v \leq n-2} A_v = \left[\varrho(\xi) \geq \frac{1}{n-2}\right]$  und  $(E - A) + \bigcup_{v \geq n+2} A_v = \left[\varrho(\xi) \leq \frac{1}{n+1}\right]$  abgeschlossen, gibt es nach 32-4-181 ein  $f_n \in \mathfrak{C}$ , so daß  $f_n = c$  auf  $A_n$ ,  $= -\infty$  auf  $E - A$  und auf  $A_v$  für  $v \leq n-2$  und  $v \geq n+2$ ; indem man nach § 30 (3)  $f_n$  durch  $(f_n)^c$  ersetzt, kann man annehmen:  $f_n \leq c$ . Dann ist  $\sup_n f_n = f$ , und in einem Punkte  $x$  sind höchstens drei  $f_n(x) \neq -\infty$ . Also ist  $\mathfrak{C}$  ein  $\gamma^1$ -System, und analog zeigt man, daß  $\mathfrak{C}$  ein  $\gamma_1$ -System.

**38-5-21.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist das System  $\mathfrak{C}^\xi$  (bzw.  $\mathfrak{C}_\xi$ ) ein  $\gamma_1^1$ -System.

Setzen wir  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{M}$ , so ist nach 35-2-11  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^\xi$ , somit auch  $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{B}^\xi$ . Sei also  $A \in \mathfrak{B}^\xi$  und  $f = c$  auf  $A$ ,  $= -\infty$  auf  $E - A$ ; nach 35-2-1 ist  $f \in \mathfrak{C}^\xi$ . Setzen wir  $f_1 = f$ ,  $f_n = -\infty$  für  $n > 1$ , so ist demnach  $((f_n))$  eine Funktionenfolge aus  $\mathfrak{C}^\xi$ , es ist  $\sup_n f_n = f$ , und für jedes  $x$  ist höchstens ein  $f_n(x) \neq -\infty$ ; somit ist  $\mathfrak{C}^\xi$  ein  $\gamma^1$ -System. — Sei sodann  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{N}$ ; da nach 35-2-11  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}^\xi) = \mathfrak{B}_{\xi+1}^\xi$ , ist durch Komplementbildung  $\bar{\mathfrak{N}} = \mathfrak{B}^{\xi+1}$ , somit auch  $\mathfrak{N}^1 = \mathfrak{B}^{\xi+1}$ . Sei also  $A \in \mathfrak{B}^{\xi+1}$  und  $f = c$  auf  $A$ ,  $= +\infty$  auf  $E - A$ ; nach 38-3-21, 38-3-211 gibt es in  $\mathfrak{B}_\xi$  eine Mengenfolge  $((A_n))$ , so daß  $A = \bigcup_n A_n$  und der Durchschnitt je dreier  $A_n$  leer ist; setzen wir  $f_n = c$  auf  $A_n$ ,  $= +\infty$  auf  $E - A_n$ , so ist wegen  $E - A_n \in \mathfrak{B}^\xi$  nach 35-2-1  $f_n \in \mathfrak{C}^\xi$ , es ist  $\inf_n f_n = f$ , und für jedes  $x$  sind höchstens zwei  $f_n(x) \neq +\infty$ ; somit ist  $\mathfrak{C}^\xi$  ein  $\gamma_1$ -System.

**38-5-22.** Für jedes  $\xi \geq 1$  ist das System  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  ein  $\gamma_1^1$ -System.

Da nach § 35 (1)  $\mathfrak{C}_1^1 = \mathfrak{C}$ , ist die Behauptung nach 38-5-2 richtig für  $\xi = 1$ . Sei also  $\xi > 1$ . Setzen wir  $\bar{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}_\xi^\xi) = \mathfrak{M}$ , so ist nach 35-2-21  $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}^\xi$ , somit auch  $\mathfrak{M}^1 = \mathfrak{B}^\xi$ . Sei also  $A \in \mathfrak{B}^\xi$  und  $f = c$  auf  $A$ ,  $= -\infty$  auf  $E - A$ ; nach 38-3-21, 38-3-211, 38-3-212 gibt es eine Mengenfolge  $((A_n))$ , so daß  $A = \bigcup_n A_n$  und der Durchschnitt je dreier  $A_n$  leer ist; setzen wir  $f_n = c$  auf  $A_n$ ,  $= -\infty$  auf  $E - A_n$ , so ist wegen  $E - A_n \in \mathfrak{B}^{\eta_n}$  nach 35-2-1  $f_n \in \mathfrak{C}_{\eta_n}^\xi$ , wegen  $\eta_n < \xi$  also  $f_n \in \mathfrak{C}_\xi^\xi$ ; es ist  $\sup_n f_n = f$  und für jedes  $x$  sind höchstens zwei  $f_n(x) \neq -\infty$ ; also ist  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  ein  $\gamma^1$ -System, und analog zeigt man, daß  $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  ein  $\gamma_1$ -System.

Nun beweisen wir als Umkehrung von 33-5-1:

**33-5-3.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein autarkes  $\gamma^1$ -System (bzw.  $\gamma_1$ -System), so gibt es in  $\mathfrak{S}$  zu jedem  $f \in \mathfrak{S}_2$  (bzw.  $f \in \mathfrak{S}^2$ ) eine Folge  $((f_n))$  mit  $\varlimsup_n f_n = f$  (bzw.  $\varliminf_n f_n = f$ ).

Sei  $f \in \mathfrak{S}_2$ . Setzen wir  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{M}$ ,  $\mathfrak{H}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{L}$ , so ist nach 31-4-21:  $\mathfrak{G}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{L}^2$ , also durch Komplementbildung:  $\mathfrak{H}(\mathfrak{S}_2) = \mathfrak{M}_2$ . Seien  $r_1, r_2, \dots, r_\nu, \dots$  die sämtlichen rationalen Zahlen; wir setzen:  $[f(x) \geq r_\nu] = B_\nu$ , und zeigen, daß es Mengen  $B_{\nu i} \in \mathfrak{M}^1$  gibt, so daß  $B_\nu = \bigcup_i B_{\nu i}$ ,  $B_{\nu i+1} \subseteq B_{\nu i}$  und  $B_{\lambda i} \subseteq B_{\nu i}$ , wenn  $r_\lambda > r_\nu$ . Wegen  $B_\nu \in \mathfrak{M}_2$  ist  $B_\nu = \bigcup_i C_{\nu i}$  mit  $C_{\nu i} \in \mathfrak{M}^1$ , und da nach 30-3-3  $\mathfrak{M}$  ein Ring, also nach 3-5-1 auch  $\mathfrak{M}^1$  ein Ring, kann angenommen werden:  $C_{\nu i+1} \subseteq C_{\nu i}$ ; nun definieren wir die gesuchten  $B_{\nu i}$  durch Induktion: wir setzen  $B_{1i} = C_{1i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) und nehmen an, für  $\kappa = 1, 2, \dots, \nu - 1$  seien die  $B_{\kappa i}$  schon definiert; bedeutet dann  $K'$  (bzw.  $K''$ ) die Menge derjenigen Indizes  $\kappa = 1, 2, \dots, \nu - 1$ , für die  $r_\kappa < r_\nu$  (bzw.  $r_\kappa > r_\nu$ ) ist, so setzen wir<sup>1)</sup>:  $B_{\nu i} = C_{\nu i} \bigcup_{\kappa \in K'} B_{\kappa i} + \bigcap_{\kappa \in K''} B_{\kappa i}$ ; da  $\mathfrak{M}^1$  ein Ring, ist dann auch  $B_{\nu i} \in \mathfrak{M}^1$ , und es ist  $B_{\nu i+1} \subseteq B_{\nu i}$ ; wegen  $\bigcup_i C_{\nu i} = B_\nu$ ,  $\bigcup_i B_{\kappa i} = B_\kappa$  und  $B_\kappa \supseteq B_\nu$  für  $\kappa \in K'$ ,  $B_\kappa \subseteq B_\nu$  für  $\kappa \in K''$  ist dann:  $\bigcup_i B_{\nu i} = \bigcup_i B_\nu = B_\nu$ ,  $\bigcup_{\kappa \in K'} B_{\kappa i} + \bigcap_{\kappa \in K''} B_{\kappa i} = B_\nu$ , und wegen  $\bigcap_{\kappa \in K''} B_{\kappa i} \subseteq \bigcap_{\kappa \in K'} B_{\kappa i}$  ist  $B_{\nu i} \subseteq B_{\kappa i}$  für  $\kappa \in K'$ ,  $B_{\nu i} \supseteq B_{\kappa i}$  für  $\kappa \in K''$ ; die  $B_{\nu i}$  leisten also das Verlangte. — Nun ordnen wir die  $B_{\nu i}$  mit  $i \geq \nu$  in eine einfache Folge:  $B_1^*, B_2^*, \dots, B_n^*, \dots$ ; ist  $B_n^* = B_{\nu i}$ , so setzen wir  $r_n^* = r_\nu$ . Sei  $f_n$  die Funktion, die  $= r_n^*$  ist auf  $B_n^*$  und  $= -\infty$  auf  $E - B_n^*$ ; weil  $\mathfrak{S}$  ein  $\gamma^1$ -System, gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $f_{n1}, f_{n2}, \dots, f_{nj}, \dots$ , so daß  $\sup_j f_{nj} = f_n$  und in jedem Punkte  $x$  nur endlich viele Funktionswerte  $f_{nj}(x) \neq -\infty$  ( $j = 1, 2, \dots$ ). Nun ordnen wir die  $f_{nj}$  in eine einfache Folge  $f_1, f_2, \dots, f_i, \dots$  und zeigen, daß  $\varliminf_i f_i = f$ . Sei  $\varliminf_i f_i = g$ ; nach 30-1-31 genügt es, zu zeigen, daß  $[g(x) \geq r_\nu] = [f(x) \geq r_\nu] = B_\nu$  für alle  $\nu$ . Sei  $x \in B_\nu$ ; dann ist  $x \in B_{\nu i}$  für alle  $i$ ; nach Definition der Folge  $((B_n^*))$  kommt, sobald  $i \geq \nu$ ,  $B_{\nu i}$  in dieser Folge vor, etwa  $B_{\nu i} = B_n^*$ ; dann ist  $r_\nu = r_n^*$ ; wegen  $x \in B_{\nu i}$  ist  $\sup_j f_{nj}(x) = r_\nu$ , und da dies für alle  $i \geq \nu$  gilt, ist offenbar:  $\varliminf_i f_i(x) \geq r_\nu$ , d.h.  $g(x) \geq r_\nu$ ; aus  $x \in B_\nu$  folgt also  $x \in [g(x) \geq r_\nu]$ . Wir haben noch zu

<sup>1)</sup> Ist  $K' = \Lambda$ , so ist hierin  $\bigcup_{\kappa \in K'} B_{\kappa i} = E$  zu setzen; ist  $K'' = \Lambda$ , so ist  $\bigcap_{\kappa \in K''} B_{\kappa i} = A$  zu setzen.

zeigen, daß auch umgekehrt aus  $x \sim \varepsilon B$ , folgt  $x \sim \varepsilon [g(x) \geq r]$ . Sei also  $x \sim \varepsilon B_r$ , d. h.  $f(x) < r$ ; dann gibt es ein  $r_\lambda$ , so daß  $f(x) < r_\lambda < r$ , und somit ist auch  $x \sim \varepsilon B_\lambda$ ; daher gibt es ein  $i_0$ , so daß  $x \sim \varepsilon B_{\lambda i}$  für  $i \geq i_0$ ; sei  $K$  die Menge derjenigen Indizes  $\kappa$ , für die  $r_\kappa \geq r_\lambda$ ; da  $B_{\kappa i} \subseteq B_{\lambda i}$  für  $\kappa \in K$ , ist auch  $x \sim \varepsilon B_{\kappa i}$  für  $\kappa \in K$  und  $i \geq i_0$ . Wir betrachten nun wieder die Mengenfølge  $((B_n^*))$ ; ist  $B_n^* = B_{\kappa i}$ , so folgt aus der Definition der Funktionen  $f_{nj}$ : ist  $\kappa \in K$  und  $i \geq i_0$ , so ist (wegen  $x \sim \varepsilon B_{\kappa i}$ ):  $f_{nj}(x) = -\infty$  für alle  $j$ ; ist hingegen  $\kappa \notin K$ , also  $r_\kappa < r_\lambda$ , so ist  $f_{nj}(x) \leq r_\lambda$  für alle  $j$ ; da nun die Mengen  $B_n^*$  nichts anderes als die Mengen  $B_{\kappa i}$  mit  $i \geq \kappa$  waren, also unter ihnen nur endlich viele  $B_{\kappa i}$  mit  $i < i_0$  vorkommen, gibt es höchstens endlich viele  $n$  derart, daß in der Folge  $f_{nj}(x)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) Funktionswerte  $> r_\lambda$  vorkommen; und da für jedes einzelne  $n$  in der Folge  $f_{nj}(x)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) höchstens endlich viele Funktionswerte  $\neq -\infty$  vorkommen, gibt es unter den Funktionswerten  $f_{nj}(x)$  ( $n, j = 1, 2, \dots$ ) höchstens endlich viele, die  $> r_\lambda$  sind; also ist  $\lim_i f_i(x) \leq r_\lambda < r$ , d. h.  $x \sim \varepsilon [g(x) \geq r]$ , w. z. b. w.

**38-5-31.** Ist  $\mathfrak{S}$  völlig autark, ist  $g \in \mathfrak{S}^2$ ,  $h \in \mathfrak{S}_2$  und  $g \leq h$ , so gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$ , so daß  $g \leq \lim_n f_n \leq \overline{\lim}_n f_n \leq h$ .

Da  $g \in \mathfrak{S}^2$ ,  $h \in \mathfrak{S}_2$ , gibt es in  $\mathfrak{S}_1$  eine monoton wachsende Folge  $((g_n))$ , in  $\mathfrak{S}^1$  eine monoton abnehmende Folge  $((h_n))$ , so daß  $\lim_n g_n = g$ ,  $\lim_n h_n = h$ . Wegen  $g \leq h$  ist auch  $g_n \leq h_n$ ; nach 32-2-11 gibt es also ein  $f_n \in \mathfrak{S}$ , so daß  $g_n \leq f_n \leq h_n$ . Dann ist  $g = \lim_n g_n \leq \lim_n f_n \leq \overline{\lim}_n f_n \leq \lim_n h_n = h$ .

**38-5-32.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein völlig autarkes  $\gamma_1^1$ -System und  $g \leq h$ , so ist, damit es in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\lim_n f_n = g$ ,  $\overline{\lim}_n f_n = h$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $g \in \mathfrak{S}^2$ ,  $h \in \mathfrak{S}_2$  sei.

Notwendig: Dies folgt aus 38-5-1. Hinreichend: Nach 38-5-3 gibt es in  $\mathfrak{S}$  Folgen  $((f'_n))$ ,  $((f''_n))$ , so daß  $\lim_n f'_n = g$ ,  $\overline{\lim}_n f''_n = h$ ; nach 38-5-31 gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine Folge  $((\tilde{f}_n))$ , so daß  $g \leq \lim_n \tilde{f}_n \leq \overline{\lim}_n \tilde{f}_n \leq h$ . Setzen wir  $f_{2n-1} = \max(\tilde{f}_n, f'_n)$ ,  $f_{2n} = \min(\tilde{f}_n, f''_n)$ , so ist, da  $\mathfrak{S}$  autark,  $f_n \in \mathfrak{S}$ , und offenbar ist  $\lim_n f_n = g$ ,  $\overline{\lim}_n f_n = h$ .

Sei nun insbesondere  $E$  ein metrischer Raum; dann gelten die Sätze:

**38-5-4.** Ist  $g \leq h$ , so ist, damit es in  $\mathfrak{S}_2^2$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\lim_n f_n = g$ ,  $\overline{\lim}_n f_n = h$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $g \in \mathfrak{S}^{2+1}$ ,  $h \in \mathfrak{S}_{2+1}$ .

Nach 35-1-4 ist  $\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi$  völlig autark und nach 38-5-22 ein  $\gamma_1^1$ -System; nach 35-1-5 ist  $(\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi)^1 = \mathfrak{C}^\xi$ ,  $(\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi)_1 = \mathfrak{C}_\varepsilon$ , also nach 35-1-1  $(\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi)_2 = \mathfrak{C}_{\varepsilon+1}$ ,  $(\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi)^2 = \mathfrak{C}^{\xi+1}$ ; die Behauptung folgt also aus 38-5-32.

**38-5-41.** Ist  $g \leq h$ , so ist, damit es in  $\mathfrak{C}_\varepsilon$  (bzw. in  $\mathfrak{C}^\xi$ ) eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\varliminf_n f_n = g$ ,  $\varlimsup_n f_n = h$  gebe, notwendig und hinreichend, daß  $g \in \mathfrak{C}^{\xi+1}$ ,  $h \in \mathfrak{C}_{\varepsilon+2}$  (bzw.  $g \in \mathfrak{C}^{\xi+2}$ ,  $h \in \mathfrak{C}_{\varepsilon+1}$ ) sei.

Nach 35-1-2 ist  $\mathfrak{C}_\varepsilon$  völlig autark und nach 38-5-21 ein  $\gamma_1^1$ -System; nach 35-1-1 ist  $(\mathfrak{C}_\varepsilon)^1 = \mathfrak{C}^{\varepsilon+1}$ ,  $(\mathfrak{C}_\varepsilon)_1 = \mathfrak{C}_\varepsilon$ , also  $(\mathfrak{C}_\varepsilon)_2 = \mathfrak{C}_{\varepsilon+2}$ ,  $(\mathfrak{C}_\varepsilon)^2 = \mathfrak{C}^{\varepsilon+1}$ ; die Behauptung folgt also aus 38-5-32.

Literatur: W. Stepanoff, Fund. math. 11 (1928) S. 264; G. Goldowsky, Fund. math. 11 (1928) S. 275.

**6. Konvergenz- und Divergenzmenge.** Sei wieder  $E$  eine beliebige Menge,  $((f_n))$  eine Folge von Funktionen auf  $E$ . Die Menge  $A$  aller Konvergenzpunkte (§ 28, 1) von  $((f_n))$  heißt dann die Konvergenzmenge, die Menge  $E - A$  die Divergenzmenge von  $((f_n))$ . Bedeutet  $\mathfrak{C}$  ein Funktionensystem auf  $E$ , so gilt:

**38-6-1.** Ist  $\mathfrak{C}$  autark und symmetrisch,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{P}$ , ist  $((f_n))$  eine Funktionenfolge aus  $\mathfrak{C}$  und  $A$  die Konvergenzmenge von  $((f_n))$ , so ist  $A \in \mathfrak{P}_3$ .

Setzen wir  $g = \varliminf_n f_n$ ,  $h = \varlimsup_n f_n$ , so ist nach 38-5-1  $g \in \mathfrak{C}^2$ ,  $h \in \mathfrak{C}_2$ ; bedeutet  $S$  die Schränkungstransformation, und setzen wir  $g^* = S(g)$ ,  $h^* = S(h)$ , so ist nach 34-1-2 auch  $g^* \in \mathfrak{C}^2$ ,  $h^* \in \mathfrak{C}_2$ ; nach 34-1-6 ist dann  $-g^* \in \mathfrak{C}_2$ , und weil nach 34-1-4  $\mathfrak{C}_2$  additiv, ist  $h^* - g^* \in \mathfrak{C}_2$ . Die Konvergenzmenge ist gegeben durch  $A = [h^*(x) - g^*(x) = 0] = [h^*(x) - g^*(x) \leq 0]$ ; da nach 34-3-2  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{P}_3$ , ist also  $A \in \mathfrak{P}_3$ .

**38-6-11.** Ist  $\mathfrak{C}$  völlig autark und symmetrisch,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{P}$ , ist  $((f_n))$  eine Funktionenfolge aus  $\mathfrak{C}$  und  $A$  die Konvergenzmenge von  $((f_n))$ , so ist  $A \in \mathfrak{P}_3$ .

Da  $\mathfrak{C}$  völlig autark, ist nach 30-4-1  $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}$ , also  $\mathfrak{P}^2 = \mathfrak{P}^1$ , also  $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_2$ , und die Behauptung folgt aus 38-6-1.

Umgekehrt gilt:

**38-6-2.** Ist  $\mathfrak{C}$  ein völlig autarkes  $\gamma_1^1$ -System,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{P}$  (oder  $\underline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{P}$ ) und  $A \in \mathfrak{P}_2$ , so gibt es in  $\mathfrak{C}$  eine Folge  $((f_n))$ , deren Konvergenzmenge  $A$  ist.

Da nach 30-4-1  $\mathfrak{P}_3 = \mathfrak{P}_2$ , ist nach 34-3-2  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}_2) = \mathfrak{P}_2$ . Ist  $A \in \mathfrak{P}_2$ , so gibt es also nach 30-3-2 eine Funktion  $h \in \mathfrak{C}_2$ , so daß  $[h(x) \leq 0] = A$ , und nach

**38-5-1** kann  $h \geq 0$  angenommen werden; dann ist  $A = [h(x) = 0]$ . Nach **38-5-22** gibt es nun in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\lim_n f_n = 0$ ,  $\overline{\lim}_n f_n = h$ ; offenbar ist  $A$  die Konvergenzmenge von  $((f_n))$ .

Ist  $E$  ein metrischer Raum, so gilt:

**38-6-3.** *Damit  $A$  Konvergenzmenge einer Folge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{U}_\varepsilon^t$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A \in \mathfrak{B}_{\varepsilon+2}$  sei.*

Nach **35-1-4** ist  $\mathfrak{U}_\varepsilon^t$  völlig autark und symmetrisch, und nach **38-5-22** ein  $\gamma_1^1$ -System. Nach **35-2-21** ist  $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}_\varepsilon^t) = \mathfrak{U}(\mathfrak{U}_\varepsilon^t) = \mathfrak{B}_\varepsilon$ , und da  $(\mathfrak{B}_\varepsilon)_2 = \mathfrak{B}_{\varepsilon+2}$ , folgt die Behauptung aus **38-6-11** und **38-6-2**.

**38-6-4.** *Damit  $A$  Konvergenzmenge einer Folge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{U}_\varepsilon$  (bzw. aus  $\mathfrak{U}^t$ ) sei, ist notwendig und hinreichend, daß  $A \in \mathfrak{B}_{\varepsilon+3}$  sei.*

Notwendig: Ist  $((f_n))$  eine Folge aus  $\mathfrak{U}_\varepsilon$  und  $g = \lim_n f_n$ ,  $h = \overline{\lim}_n f_n$ , so ist nach **38-5-41**  $g \in \mathfrak{U}^{t+1}$ ,  $h \in \mathfrak{U}_{\varepsilon+2}$ , also auch  $g \in \mathfrak{U}^{t+2}$ ; setzen wir  $g^* = S(g)$ ,  $h^* = S(h)$ , so ist auch  $g^* \in \mathfrak{U}^{t+2}$ ,  $h^* \in \mathfrak{U}_{\varepsilon+2}$ , also  $-g^* \in \mathfrak{U}_{\varepsilon+2}$  und  $h^* - g^* \in \mathfrak{U}_{\varepsilon+2}$ . Da  $A = [h^*(x) - g^*(x)] \leq 0$ , ist  $A \in \mathfrak{B}_{\varepsilon+3}$  nach **35-2-11**. Hinreichend: Nach **35-1-2** und **38-5-21** ist  $\mathfrak{U}_\varepsilon$  ein völlig autarkes  $\gamma_1^1$ -System; nach **35-2-11** ist  $\overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{U}_\varepsilon) = \mathfrak{B}_{\varepsilon+1}$ ; wegen  $(\mathfrak{B}_{\varepsilon+1})_2 = \mathfrak{B}_{\varepsilon+3}$  folgt die Behauptung aus **38-6-2**.

Literatur: H. Hahn, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 28 (1919) S. 34; W. Sierpiński, Fund. math. 2 (1921) S. 41.

**7. Unvollständige Grenzfunktionen.** Sei wieder  $E$  eine beliebige Menge,  $((f_n))$  eine Funktionenfolge auf  $E$ , deren Konvergenzmenge  $A \supset A$  ist. Durch  $f(x) = \lim_n f_n(x)$  ist eine Funktion auf  $A$  definiert, die wir (weil sie auf  $E - A$  nicht definiert ist) als die unvollständige Grenzfunktion von  $((f_n))$  bezeichnen. Um die unvollständigen Grenzfunktionen näher zu untersuchen, benötigen wir zwei Hilfssätze.

Wir bezeichnen mit  $\mathfrak{S}$  ein symmetrisches Funktionensystem auf  $E$  und setzen:

$$(7) \quad \overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{R}; \quad \overline{\mathfrak{U}}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{U}(\mathfrak{S}) = \mathfrak{P}.$$

**38-7-1.** *Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch und autark,  $A \subset A \subseteq E$ , und sind  $B_1, B_2, \dots, B_k$  disjunkte Mengen aus  $(A \setminus \mathfrak{P})^1$ , so gibt es disjunkte Mengen  $C_1, C_2, \dots, C_k$  aus  $\mathfrak{P}^1$ , so daß  $B_i = A \setminus C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ).*

Ist die Behauptung richtig für  $k$  ( $\geq 2$ ) Mengen, so gilt sie auch für  $k+1$  Mengen  $B_1, B_2, \dots, B_{k+1}$ ; denn nach Annahme gibt es disjunkte Mengen  $C'_i \in \mathfrak{P}^1$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), so daß  $B_i = A \setminus C'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ); da nach **30-5-3**  $\mathfrak{P}$ , also auch  $A \setminus \mathfrak{P}$ , somit nach **3-5-1** auch  $(A \setminus \mathfrak{P})^1$  ein Ring, ist auch  $B_1 + B_2 + \dots + B_k \in (A \setminus \mathfrak{P})^1$ ; also gibt es nach Annahme zwei disjunkte

Mengen  $C$  und  $C_{k+1}$  aus  $\mathfrak{B}^1$ , so daß  $B_1 + B_2 + \dots + B_k = A \cap C$ ,  $B_{k+1} = A \cap C_{k+1}$ ; setzen wir nun  $C_i = C \cap C'_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), so ist, da  $\mathfrak{B}^1$  ein Ring,  $C_i \in \mathfrak{B}^1$ , die Mengen  $C_1, C_2, \dots, C_{k+1}$  sind disjunkt und  $B_i = A \cap C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k+1$ ). — Es genügt also, die Behauptung für  $k = 2$  nachzuweisen. Seien also  $B, B'$  zwei disjunkte Mengen aus  $(A \cap \mathfrak{B})^1$ ; es gibt dann Mengen  $P_n, P'_n$  aus  $\mathfrak{B}$ , so daß  $B = \bigcup_n A \cap P_n = A \cap \bigcup_n P_n$ ,  $B' = \bigcup_n A \cap P'_n = A \cap \bigcup_n P'_n$ , und nach 3.2.1 kann angenommen werden  $P_n \subseteq P_{n+1}$ ,  $P'_n \subseteq P'_{n+1}$ ; wir setzen nun  $Q_n = P_n - P'_n$ ,  $Q'_n = P'_n - P_n$ ; da  $P'_n \in \mathfrak{B}$ , ist  $E - P'_n \in \mathfrak{B}$ , also nach 3.0.2.1  $E - P'_n \in \mathfrak{B}^1$ , also ist auch  $Q_n \in \mathfrak{B}^1$ , und ebenso  $Q'_n \in \mathfrak{B}^1$ ; setzen wir  $C = \bigcup_n Q_n$ ,  $C' = \bigcup_n Q'_n$ , so ist demnach  $C \in \mathfrak{B}^1$ ,  $C' \in \mathfrak{B}^1$ . Ferner ist  $B = A \cap \bigcup_n P_n = A \cap \bigcup_n Q_n + A \cap \bigcup_n (P_n - Q_n)$ ; da aber  $Q_n = P_n - P'_n$ , ist  $P_n - Q_n = P_n \cap P'_n$ , also  $A \cap (P_n - Q_n) = A \cap P_n \cap P'_n \subseteq A \cap P_n \cap P'_n = B \cap B' = \emptyset$ , d. h.  $A \cap (P_n - Q_n) = \emptyset$ , mithin  $B = A \cap \bigcup_n Q_n = A \cap C$ , und ebenso  $B' = A \cap C'$ . — Endlich ist  $C \cap C' = \bigcup_n Q_n \cap \bigcup_m Q'_m = \bigcup_{n,m} Q_n \cap Q'_m$ ; da  $Q_m = P_m - P'_m$ ,  $Q'_n = P'_n - P_n$ , ist  $Q_m \subseteq P_m$ ,  $Q'_n \subseteq E - P_n$ ; da  $(P_n)$  monoton wächst, ist also  $Q_m \subseteq P_n$  für  $m \leq n$ , somit  $Q_m \cap Q'_n = \emptyset$  für  $m \leq n$ ; in genau derselben Weise ist aber auch  $Q'_n \subseteq P'_m$  für  $n \leq m$ ,  $Q_m \subseteq E - P'_m$ , also  $Q_m \cap Q'_n = \emptyset$  für  $n \leq m$ ; also ist  $Q_m \cap Q'_n = \emptyset$  für alle  $n, m$ , also auch  $C \cap C' = \emptyset$ .

Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch und völlig autark, so ist nach 3.0.3.3 und 3.0.4.1, wenn wir wieder von der Bezeichnungsweise (7) Gebrauch machen,  $\mathfrak{M}$  und  $\mathfrak{B}$  ein die Mengen  $A$  und  $E$  enthaltender  $\sigma$ - bzw.  $\delta$ -Ring; ist  $A \subseteq E$ , so gilt dann dasselbe von  $A \cap \mathfrak{M}$  und  $A \cap \mathfrak{B}$ . Da  $\mathfrak{G}(A \cap \mathfrak{S}) = \mathfrak{G}(A \cap \mathfrak{S}) = A \cap \mathfrak{M}$ , existiert nach 3.0.2.22 das System:

$$(7.1) \quad \mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}(A \cap \mathfrak{M}, A \cap \mathfrak{M}),$$

und nach 3.0.4.31 und 3.0.5.3 ist es völlig autark und symmetrisch.

**33.7.2.** Ist  $\mathfrak{S}$  symmetrisch und völlig autark,  $A \supset A$ ,  $A \in \mathfrak{B}_2$ , und  $f \in (\mathfrak{S}_A)^*$ , so gibt es ein  $g \in \mathfrak{S}^2$  und ein  $h \in \mathfrak{S}_2$ , so daß  $A \cap g = A \cap h = f$  und  $g(x) < h(x)$  für  $x \in E - A$ .

Nach 32.5.31 gibt es in  $(\mathfrak{S}_A)^*$  eine gleichmäßig gegen  $f$  konvergierende Folge  $(f_n)$  von Treppenfunktionen. Ist  $f^*$  eine Treppenfunktion aus  $(\mathfrak{S}_A)^*$  und  $c$  einer der endlich vielen Werte von  $f^*$ , so ist, wenn  $y' < c < y''$  und  $y', y''$  hinlänglich nahe an  $c$  gewählt sind:  $[f^*(x) = c] = [f^*(x) > y'] \cdot [f^*(x) < y'']$ , und da nach (7.1):  $\mathfrak{F}(\mathfrak{S}_A) = \mathfrak{F}(\mathfrak{S}_A) = A \cap \mathfrak{B}$ , ist nach 31.4.31:  $[f^*(x) = c] \in (A \cap \mathfrak{B})^1$ . Seien  $c_i$  ( $i_1 = 1, 2, \dots, k$ ) die endlich vielen Werte von  $f_1$ , und sei  $[f_1(x) = c_i] = B_{i_1}$ ; dann ist also  $B_{i_1} \in (A \cap \mathfrak{B})^1$ . Seien  $c_{i_1 i_2}$  die endlich vielen Werte, die  $f_2$  auf  $B_{i_1}$  annimmt, und  $B_{i_1 i_2} \cdot [f_2(x) = c_{i_1 i_2}] = B_{i_1 i_2}$ ;

dann ist auch  $B_{i_1 i_2} \varepsilon (A \mid \mathfrak{B})^1$  und  $B_{i_1 i_2} \subseteq B_{i_1}$ . Sind sodann  $c_{i_1 i_2}$  die endlich vielen Werte von  $f_3$  auf  $B_{i_1 i_2}$ , und ist  $B_{i_1 i_2} \cdot [f_3(\mathfrak{A}) = c_{i_1 i_2}] = B_{i_1 i_2}$ , so ist ebenso  $B_{i_1 i_2} \varepsilon (A \mid \mathfrak{B})^1$  und  $B_{i_1 i_2} \subseteq B_{i_1}$  uaf. Da das System der Mengen  $B_{i_1 i_2} \dots i_n$  mit  $n$  Indizes disjunkt ist, gibt es nach §8-7-1 in  $\mathfrak{B}^1$  disjunkte Mengen  $C_{i_1 i_2} \dots i_n$ , so daß  $B_{i_1 i_2} \dots i_n = A C_{i_1 i_2} \dots i_n$ , und, indem man  $C_{i_1 i_2} \dots i_n$  ersetzt durch  $C_{i_1} C_{i_1 i_2} \dots C_{i_1 i_2} \dots i_n$ , kann man annehmen:  $C_{i_1 i_2} \dots i_n \subseteq C_{i_1 i_2} \dots i_n$ . Da  $A \varepsilon \mathfrak{B}_2$ , gibt es in  $\mathfrak{B}^1$  eine monoton abnehmende Mengenfolge  $(A_n)$  mit  $D A_n = A$ ; setzen wir  $C_{i_1 i_2} \dots i_n \cdot A_n = A_{i_1 i_2} \dots i_n$ , so sind die Mengen  $A_{i_1 i_2} \dots i_n$  mit  $n$  Indizes disjunkt, es ist auch  $A_{i_1 i_2} \dots i_n \varepsilon \mathfrak{B}^1$ ,  $A_{i_1 i_2} \dots i_n \subseteq A_{i_1 i_2} \dots i_n$  und  $B_{i_1 i_2} \dots i_n = A \cdot A_{i_1 i_2} \dots i_n$ . Wir bezeichnen nun mit  $c'_{i_1 i_2} \dots i_n$  bzw.  $c''_{i_1 i_2} \dots i_n$  das Infimum bzw. Supremum aller Zahlen  $c_{i_1 i_2} \dots i_{n+k}$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ), deren erste  $n$  Indizes die festen Werte  $i_1, i_2, \dots, i_n$  haben; dann ist:

$$c'_{i_1 i_2} \dots i_n \leq c'_{i_1 i_2} \dots i_{n+1}, c'_{i_1 i_2} \dots i_{n+1} \geq c'_{i_1 i_2} \dots i_n, c''_{i_1 i_2} \dots i_{n+1} \leq c''_{i_1 i_2} \dots i_n.$$

Offenbar gibt es Zahlen  $c^*_{i_1 i_2} \dots i_n$ ,  $c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_n$ , so daß:

$$c^*_{i_1 i_2} \dots i_n \leq c'_{i_1 i_2} \dots i_n, c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_n \geq c''_{i_1 i_2} \dots i_n, c^*_{i_1 i_2} \dots i_n < c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_n, \\ \|c^*_{i_1 i_2} \dots i_n - c'_{i_1 i_2} \dots i_n\| < \frac{1}{n}, \|c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_n - c''_{i_1 i_2} \dots i_n\| < \frac{1}{n}, \\ c^*_{i_1 i_2} \dots i_{n+1} \geq c^*_{i_1 i_2} \dots i_n, c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_{n+1} \leq c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_n.$$

Wir definieren nun die Funktionen  $g_n$  und  $h_n$  auf  $E$  durch:  $g_n = -\infty$ ,  $h_n = +\infty$  auf  $E - S_{i_1} A_{i_1}$ ,  $g_n = c^*_{i_1}$ ,  $h_n = c^{**}_{i_1}$  auf  $A_{i_1} - S_{i_1} A_{i_1 i_1}$ ,  $g_n = c^*_{i_1 i_1}$ ,  $h_n = c^{**}_{i_1 i_1}$  auf  $A_{i_1 i_1} - S_{i_1 i_1} A_{i_1 i_1 i_1}$ , ...,  $g_n = c^*_{i_1 i_2} \dots i_{n-1}$ ,  $h_n = c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_{n-1}$  auf  $A_{i_1 i_2} \dots i_{n-1} - S_{i_1 i_2} \dots i_{n-1} A_{i_1 i_2} \dots i_n$ ,  $g_n = c^*_{i_1 i_2} \dots i_n$ ,  $h_n = c^{**}_{i_1 i_2} \dots i_n$  auf  $A_{i_1 i_2} \dots i_n$ .

Dann ist  $(g_n)$  monoton wachsend,  $(h_n)$  monoton abnehmend; offenbar ist jede Menge  $[g_n(\mathfrak{A}) > y]$  und jede Menge  $[h_n(\mathfrak{A}) < y]$  Summe endlich vieler Mengen  $A_{i_1 i_2} \dots i_k$ , also eine Menge aus  $\mathfrak{B}^1$ ; nach §4-3-1 und §1-4-22 ist also  $g_n \varepsilon \mathfrak{E}^3$ ,  $h_n \varepsilon \mathfrak{E}_2$ ; setzen wir  $g = \lim_n g_n$ ,  $h = \lim_n h_n$ , so ist also auch  $g \varepsilon \mathfrak{E}^3$ ,  $h \varepsilon \mathfrak{E}_2$ . — Sei nun  $a \varepsilon A$  und  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben; da  $(f_n)$  gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert, gibt es ein  $n_\varepsilon$ , so daß  $\|f_{n+k} - f_n\| \leq \varepsilon$  für  $n \geq n_\varepsilon$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Sei  $n \geq n_\varepsilon$ ; wegen  $A = S_{i_1 i_2} \dots i_n B_{i_1 i_2} \dots i_n \subseteq S_{i_1 i_2} \dots i_n A_{i_1 i_2} \dots i_n$  gibt es eine Menge  $A_{i_1 i_2} \dots i_n$  mit  $n$  Indizes, so daß  $a \varepsilon A_{i_1 i_2} \dots i_n$ ; wegen  $A A_{i_1 i_2} \dots i_n = B_{i_1 i_2} \dots i_n$  ist dann  $f_n(x) = c_{i_1 i_2} \dots i_n$  für alle  $x \varepsilon B_{i_1 i_2} \dots i_n$ , also

$\|f_{n,k}(x) - c_{i_1, i_2, \dots, i_n}\| \leq \varepsilon$  für alle  $x \in B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ , also ist  $\|c_{i_1, i_2, \dots, i_{n+k}} - c_{i_1, i_2, \dots, i_n}\| \leq \varepsilon$  für alle  $c$ , deren erste  $n$  Indizes die festen Werte  $i_1, i_2, \dots, i_n$  haben, also ist auch:

$\|c'_{i_1, i_2, \dots, i_n} - c_{i_1, i_2, \dots, i_n}\| \leq \varepsilon, \|c''_{i_1, i_2, \dots, i_n} - c_{i_1, i_2, \dots, i_n}\| \leq \varepsilon,$   
mithin:

$\|c^*_{i_1, i_2, \dots, i_n} - c_{i_1, i_2, \dots, i_n}\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}, \|c^{**}_{i_1, i_2, \dots, i_n} - c_{i_1, i_2, \dots, i_n}\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n},$   
d. h.:

$\|g_n(a) - f_n(a)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}, \|h_n(a) - f_n(a)\| \leq \varepsilon + \frac{1}{n}$  für  $n \geq n_\varepsilon$ ,  
also  $g(a) = h(a) = f(a)$  für jedes  $a \in A$ , d. h.  $A \mid g = A \mid h = f$ .  
— Sei endlich  $a \in E - A$ ; wegen  $A = \bigcup_n A_n$  gibt es dann einen kleinsten Index  $n$ , so daß  $a \in E - A_n$ , mithin wegen  $A_{i_1, i_2, \dots, i_n} \subseteq A_n$  auch einen kleinsten Index  $n$ , so daß  $a \in E - \bigcup_{i_1, i_2, \dots, i_n} A_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ ; ist dieser kleinste Index  $= 1$ , so ist  $a \in E - A_{i_1}$ , also  $g_n(a) = -\infty, h_n(a) = +\infty$  für alle  $n$ , also  $g(a) = -\infty, h(a) = +\infty$ , also  $g(a) < h(a)$ ; ist dieser kleinste Index  $> 1$ , so gibt es ein  $A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ , so daß  $a \in A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}} - \bigcup_{i_n} A_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i_n}$ ; dann ist  $g_{n,k}(a) = c^*_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}, h_{n,k}(a) = c^{**}_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$  für alle  $k$ , also  $g(a) = c^*_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}, h(a) = c^{**}_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$ , also wieder  $g(a) < h(a)$ . Also ist  $g(a) < h(a)$  für alle  $a \in E - A$ .

Machen wir wieder Gebrauch von der Bezeichnungsweise (7), (7.1), so gilt:

**38-7.3.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein symmetrisches und völlig autarkes  $\gamma_1^1$ -System und  $A \subset A \subseteq E$ , so ist, damit die Funktion  $f$  auf  $A$  unvollständige Grenzfunktion einer Folge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{S}$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $A \in \mathfrak{P}_2$  und  $f \in (\mathfrak{S}_A)^*$  sei.

Notwendig: Daß  $A \in \mathfrak{P}_2$ , folgt aus 38-6.11; da  $f \in (A \mid \mathfrak{S})^*$ , und  $A \mid \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}_A$ , also  $(A \mid \mathfrak{S})^* \subseteq (\mathfrak{S}_A)^*$ , ist  $f \in (\mathfrak{S}_A)^*$ . Hinreichend: Sei  $A \in \mathfrak{P}_2, f \in (\mathfrak{S}_A)^*$ ; dann gibt es nach 38-7.2 ein  $g \in \mathfrak{S}^2$  und ein  $h \in \mathfrak{S}_2$ , so daß  $A \mid g = A \mid h = f$  und  $g < h$  auf  $E - A$ . Nach 38-5.32 gibt es in  $\mathfrak{S}$  eine Funktionenfolge  $((f_n))$  mit  $\lim_n f_n = g, \lim_n f_n = h$ ; also ist  $A$  die Konvergenzmenge von  $((f_n))$  und  $\lim_n f_n(x) = f(x)$  für alle  $x \in A$ .

Ist  $E$  insbesondere ein metrischer Raum, so gilt:

**38-7.4.** Ist  $A \subset A \subseteq E$ , so ist, damit die Funktion  $f$  auf  $A$  unvollständige Grenzfunktion einer Folge  $((f_n))$  aus  $\mathfrak{S}_2^2(E)$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $A \in \mathfrak{B}_{2+2}(E)$  und  $f \in \mathfrak{S}_{2+1}^{2+1}(A)$  sei.



Schreiben wir kurz  $\mathfrak{G}_i^{\xi}$  für  $\mathfrak{G}_i^{\xi}(E)$ , so ist nach 35-1-4  $\mathfrak{G}_i^{\xi}$  symmetrisch und völlig autark, und nach 38-5-22 ein  $\gamma_1^1$ -System; nach 35-2-21 ist  $\mathfrak{P} = \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_i^{\xi}) = \mathfrak{F}(\mathfrak{G}_i^{\xi}) = \mathfrak{B}_i^{\xi}(E)$ , also  $\mathfrak{P}_2 = \mathfrak{B}_{i+2}^{\xi}(E)$ ; nach 35-2-21 ist  $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}(\mathfrak{G}_i^{\xi}) = \mathfrak{G}(\mathfrak{G}_i^{\xi}) = \mathfrak{B}^{\xi}(E)$ , also nach 33-4-7  $A \mid \mathfrak{M} = \mathfrak{B}^{\xi}(A)$ , also nach (7-1) und 35-2-2:  $\mathfrak{S}_A = \mathfrak{S}(A \mid \mathfrak{M}, A \mid \mathfrak{M}) = \mathfrak{G}_i^{\xi}(A)$ . Nach 35-1-5 ist  $(\mathfrak{G}_i^{\xi}(A))^* = \mathfrak{G}_{i+1}^{\xi+1}(A)$ . Somit folgt die Behauptung aus 38-7-3.

Literatur: H. Fried, Monatsh. f. Math. u. Phys. 38 (1931) S. 306.

### § 39. Funktionen in Produkträumen.

1. Hilfsbetrachtungen. Seien  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k)}$  metrische Räume und sei  $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)}$  ihr Produktraum (§ 20), d. h. die Menge aller  $k$ -tupel  $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$  mit  $x_i \in E^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ). Sei  $A \subseteq E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)}$  und  $f$  eine Funktion auf  $A$ ; wir bezeichnen sie mit  $f(x)$  oder  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Dem näheren Studium solcher Funktionen schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus.

Sei  $E$  ein metrischer Raum und seien  $a_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ )  $n$  verschiedene Punkte von  $E$ ; wir definieren die Funktionen  $g(u), g_\nu(u)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) für alle  $u \in E$  durch:

$$(1) \quad g(u) = \min(u a_1, u a_2, \dots, u a_n), \quad g_\nu(u) = \max(2g(u) - u a_\nu, 0);$$

dann ist für  $u a_\nu \leq \frac{1}{2} \min_{\lambda} a_\lambda a_\nu$ :

$$(1.1) \quad g(u) = u a_\nu, \quad g_\nu(u) = u a_\nu;$$

$$\text{ferner für } u a_\nu \leq \frac{1}{3} a_\lambda a_\nu:$$

$$(1.11) \quad g_\lambda(u) = 0 \quad (\lambda \neq \nu);$$

denn dann ist  $u a_\lambda \geq a_\lambda a_\nu - u a_\nu \geq 2u a_\nu$ , also nach (1):  $u a_\lambda \geq 2g(u)$ , d. h.  $2g(u) - u a_\lambda \leq 0$ .

Seien nun  $t_1, t_2, \dots, t_n$  endliche reelle Zahlen; da in jedem von den  $a_\nu$  verschiedenen Punkte  $u \in E$  mindestens eine der  $n$  Funktionen  $g_\nu(u) > 0$  ist, können wir eine Funktion  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n)$  von  $u$  auf  $E$  definieren durch:

$$(1.2) \quad h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = \frac{t_1 g_1(u) + t_2 g_2(u) + \dots + t_n g_n(u)}{g_1(u) + g_2(u) + \dots + g_n(u)} \quad \text{für } u \neq a_\nu (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

$$h(a_\nu; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = t_\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots, n);$$

dann gilt für alle  $u \in E$ :

$$(1.3) \quad \min(t_1, t_2, \dots, t_n) \leq h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) \leq \max(t_1, t_2, \dots, t_n).$$

**39-1.1.** Es gibt ein  $\varrho > 0$ , so daß:  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = t_\nu$  für  $u \in K_{a_\nu, \varrho}$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ).

Dies folgt aus (1-11) für  $\varrho = \frac{1}{3} \min_{\lambda, \nu} a_\lambda a_\nu$ .

**39-1.2.** Die Funktion  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n)$  von  $u$  (bei festen  $a_1, \dots, a_n, t_1, \dots, t_n$ ) ist stetig für alle  $u \in E$ .

Dies folgt aus der Stetigkeit von  $g_\nu(u)$ , wenn  $u$  von allen  $a_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) verschieden, und aus 39-1.1 für  $u = a_\nu$ .

**39-1.3.** Ist  $\lim_{\mu} t_{\nu\mu} = t_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ), so konvergiert  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_{1\mu}, \dots, t_{n\mu})$  gleichmäßig auf  $E$  gegen  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n)$ .

Dies folgt wegen  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_{1\mu}, \dots, t_{n\mu}) - h(u; a_1, \dots, a_n; t_1, \dots, t_n) = h(u; a_1, \dots, a_n; t_{1\mu} - t_1, \dots, t_{n\mu} - t_n)$  aus (1-3).

Sei nun auch  $E'$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

**39-1.4.** Sind  $t_1(v), \dots, t_n(v)$  endliche stetige Funktionen auf  $E'$ , so ist  $h(u, v) = h(u; a_1, \dots, a_n; t_1(v), \dots, t_n(v))$  eine stetige Funktion auf  $E \times E'$ .

Wir haben zu zeigen: gilt  $(u_i, v_i) \rightarrow (u, v)$ , d. h. nach 20-1.1: gilt  $u_i \rightarrow u$ ,  $v_i \rightarrow v$ , so gilt  $h(u_i, v_i) \rightarrow h(u, v)$ . Nun ist  $\|h(u_i, v_i) - h(u, v)\| \leq \|h(u_i, v_i) - h(u_i, v)\| + \|h(u_i, v) - h(u, v)\|$ . Aus der Stetigkeit der  $t_\nu(v)$  folgt:  $\lim_i t_\nu(v_i) = t_\nu(v)$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ); nach 39-1.3 gibt es also zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $i_\varepsilon$ , so daß  $\|h(u, v_i) - h(u, v)\| < \varepsilon$  für  $i \geq i_\varepsilon$  und alle  $u \in E$ ; dann ist insbesondere  $\|h(u_i, v_i) - h(u_i, v)\| < \varepsilon$  für  $i \geq i_\varepsilon$ . Wegen 39-1.2 gilt  $h(u_i, v) \rightarrow h(u, v)$ , also  $\|h(u_i, v) - h(u, v)\| < \varepsilon$  für fast alle  $i$ . Also ist  $\|h(u_i, v_i) - h(u, v)\| < 2\varepsilon$  für fast alle  $i$ , d. h.  $h(u_i, v_i) \rightarrow h(u, v)$ , w. z. b. w.

**39-1.41.** Sind  $t_1(v), \dots, t_n(v)$  endliche  $\mathfrak{G}^\varepsilon$ -Funktionen (bzw.  $\mathfrak{G}_\varepsilon$ -Funktionen, bzw.  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\pm$ -Funktionen) auf  $E'$ , so ist  $h(u, v) = h(u; a_1, \dots, a_n; t_1(v), \dots, t_n(v))$  eine  $\mathfrak{G}^\varepsilon$ -Funktion (bzw. eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon$ -Funktion, bzw. eine  $\mathfrak{G}_\varepsilon^\pm$ -Funktion) auf  $E \times E'$ .

Sind die  $n$  Funktionenfolgen  $t_{\nu 1}(v), t_{\nu 2}(v), \dots, t_{\nu \mu}(v), \dots$  ( $\nu = 1, 2, \dots, n$ ) monoton wachsend (bzw. abnehmend), so gilt nach (1-2) dasselbe von der Funktionenfolge  $h(u; a_1, \dots, a_n; t_{1\mu}(v), \dots, t_{n\mu}(v))$  ( $\mu = 1, 2, \dots$ ); also folgt die Behauptung aus 39-1.3 und 39-1.4 für  $\xi = 1$ . Von da aus schließt man auf Grund von 39-1.3 weiter durch transfinite Induktion.

**39-1.5.** Ist die abzählbare Menge der Punkte  $a_1, a_2, \dots, a_\alpha, \dots$  dicht in  $E$  und ist  $f(u)$  eine endliche und stetige Funktion auf  $E$ , so ist:

$$f(u) = \lim_{\alpha} h(u; a_1, \dots, a_\alpha; f(a_1), \dots, f(a_\alpha)).$$

Ist  $u \in E$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  ein  $\rho > 0$ , so daß  $|f(u') - f(u)| < \varepsilon$  für  $u' u \leq 2\rho$ . Weil die Menge der  $a_\nu$  dicht in  $E$ , gibt es für fast alle  $n$  unter den Punkten  $a_1, a_2, \dots, a_n$  einen Punkt  $a_\nu$ , so daß  $a_\nu u < \rho$ ; dann ist in (1):  $g(u) < \rho$ ; für diejenigen  $\lambda (= 1, 2, \dots, n)$ , für die  $a_\lambda u > 2\rho$ , somit  $a_\lambda u > 2g(u)$ , ist also nach (1):  $g_\lambda(u) = 0$ ; wir können also die von diesen  $\lambda$  herrührenden Glieder in

$$h(u; a_1, \dots, a_n; f(a_1), \dots, f(a_n)) = \frac{\sum_{\lambda=1}^n f(a_\lambda) g_\lambda(u)}{\sum_{\lambda=1}^n g_\lambda(u)}$$

weglassen; da für die übrigen gilt:  $f(u) - \varepsilon < f(a_\lambda) < f(u) + \varepsilon$ , ist somit nach (1.3):  $f(u) - \varepsilon < h(u; a_1, \dots, a_n; f(a_1), \dots, f(a_n)) < f(u) + \varepsilon$  für fast alle  $n$ ; d. h. es gilt  $f(u) = \lim_n h(u; a_1, \dots, a_n; f(a_1), \dots, f(a_n))$ .

**2. Partiiell stetige Funktionen.** Sei  $A \subseteq E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)}$  und  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  eine Funktion auf  $A$ ; ist dann  $(a_1, a_2, \dots, a_k) \in A$ , so bezeichnen wir mit  $A^{(i)}$  die Menge aller  $(x_1, x_2, \dots, x_k) \in A$ , für die  $x_j = a_j$  ( $j \neq i$ ), und mit  $f_i(x_i)$  die Funktion  $A^{(i)} \ni f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ . Ist dann  $f_i$  stetig im Punkte  $a_i$ , so heißt  $f$  im Punkte  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  partiell stetig nach  $x_i$ ; ist  $f$  im Punkte  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$  partiell stetig nach  $x_i$  für  $i = 1, 2, \dots, k$ , so heißt  $f$  partiell stetig in  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ . Ist die Funktion  $f$  partiell stetig nach  $x_i$  (bzw. partiell stetig) in jedem Punkte von  $A$ , so heißt sie partiell stetig nach  $x_i$  (bzw. partiell stetig). Die Funktion  $f$  kann partiell stetig sein, ohne stetig zu sein; Beispiel im  $R_2 (= R_1 \times R_1)$ : durch  $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2}$  für  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ,  $f(0, 0) = 0$

ist eine Funktion im  $R_2$  definiert, die partiell stetig, im Punkte  $(0, 0)$  aber unstetig ist. — Wir werden nun zeigen, daß (unter sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Räume  $E^{(i)}$ ) jede partiell stetige Funktion auf  $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)}$  eine Bairesche Funktion ist.

**39-2-1.** Ist einer der Räume  $E^{(1)}, E^{(2)}$  separabel und  $f(x_1, x_2)$  eine partiell stetige Funktion auf  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist  $f \in \mathfrak{C}_2^2(E^{(1)} \times E^{(2)})$ .

Vermöge der Schränkungstransformation können wir beim Beweise ohne weiteres  $f(x_1, x_2)$  als endlich annehmen. Sei etwa  $E^{(1)}$  separabel; nach 13-1-§ gibt es eine abzählbare Menge von Punkten  $a_\nu \in E^{(1)}$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ), die in  $E^{(1)}$  dicht ist. Wir setzen:

$$h_n(x_1, x_2) = h(x_1; a_1, \dots, a_n; f(a_1, x_2), \dots, f(a_n, x_2));$$

da nach Annahme die Funktionen  $f(a_\nu, x_2)$  stetig auf  $E^{(2)}$  sind, ist nach 39-1-4  $h_n(x_1, x_2)$  stetig auf  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , d. h.  $h_n \in \mathfrak{C}_1^1(E^{(1)} \times E^{(2)})$ . Da nach Annahme  $f(x_1, x_2)$  partiell stetig nach  $x_1$ , gilt zufolge 39-1-5:

$f(x_1, x_2) = \lim_n h(x_1; a_1, \dots, a_n; f(a_1, x_2), \dots, f(a_n, x_2))$ , d. h.  $f(x_1, x_2) = \lim_n h_n(x_1, x_2)$ ; wegen  $h_n \in \mathfrak{G}_1^1(E^{(1)} \times E^{(2)})$  ist also  $f \in (\mathfrak{G}_1^1(E^{(1)} \times E^{(2)}))^*$ , also nach 35-1-5  $f \in \mathfrak{G}_2^2(E^{(1)} \times E^{(2)})$ .

**39-2-11.** Sind  $k-1$  der Räume  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k)}$  separabel und ist  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  eine partiell stetige Funktion auf  $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)}$ , so ist  $f \in \mathfrak{G}_k^k(E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)})$ .

Für  $k=2$  ist die Behauptung richtig nach 39-2-1; wir nehmen an, sie sei richtig für  $k-1$ , und zeigen, daß sie dann auch für  $k$  gilt. Wir können wieder  $f$  als endlich annehmen. Seien etwa die Räume  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(k-1)}$  separabel, und sei die Menge der Punkte  $a_\nu$  ( $\nu = 1, 2, \dots$ ) dicht in  $E^{(1)}$ . Wir setzen:

$$h_n(x_1, x_2, \dots, x_k) = h(x_1; a_1, \dots, a_n; f(a_1, x_2, \dots, x_k), \dots, f(a_n, x_2, \dots, x_k));$$
 nach Annahme ist  $f(a_i, x_2, \dots, x_k) \in \mathfrak{G}_{k-1}^{k-1}(E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)})$ , also ist nach 39-1-41  $h_n(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathfrak{G}_{k-1}^{k-1}(E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)})$ . Da  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  partiell stetig nach  $x_1$  ist, gilt zufolge 39-1-5  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = \lim_n h_n(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ; nach 35-1-5 ist also  $f \in \mathfrak{G}_k^k(E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(k)})$ .

**39-2-2.** Ist  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$  eine partiell stetige Funktion im  $R_k$ , und setzen wir  $f(x, x, \dots, x) = g(x)$ , so ist  $g(x) \in \mathfrak{G}_k^k(R_1)$ .

Aus 39-2-11 folgt für  $E^{(1)} = E^{(2)} = \dots = E^{(k)} = R_1$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathfrak{G}_k^k(R_k);$$

bezeichnen wir mit  $A$  die Gerade  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$  des  $R_k$ , so ist:

$$f(x, x, \dots, x) = A \mid f(x_1, x_2, \dots, x_k);$$

nach 35-3-3 ist also  $f(x, x, \dots, x) \in \mathfrak{G}_k^k(A)$ , und da die Abbildung, die dem Punkte  $(x, x, \dots, x) \in A$  den Punkt  $x \in R_1$  zuordnet, homöomorph ist, folgt daraus die Behauptung.

Wir werden in 39-2-31 zeigen, daß umgekehrt jede  $\mathfrak{G}_k^k$ -Funktion im  $R_1$  auf diese Weise aus einer im  $R_k$  partiell stetigen Funktion gewonnen werden kann. Zunächst beweisen wir:

**39-2-3.** Ist  $g(x) \in \mathfrak{G}_2^2(R_1)$  und  $\varrho > 0$ , so gibt es eine im  $R_2$  partiell stetige Funktion  $f(x_1, x_2)$ , so daß  $f(x, x) = g(x)$  und  $f(x_1, x_2) = 0$  in jedem Punkte  $(x_1, x_2)$ , der von der Geraden  $x_1 = x_2$  einen Abstand  $\geq \varrho$  hat.

Vermöge der Schränkungstransformation können wir  $|g| \leq 1$  annehmen. Da nach 35-1-5  $\mathfrak{G}_2^2 = (\mathfrak{G}_1^1)^*$ , gibt es eine Folge  $(g_n)$  stetiger Funktionen im  $R_1$ , so daß  $g_n \rightarrow g$ , wobei noch ohne weiteres angenommen werden kann:  $|g_n| \leq 1$ . Nach 25-7-31 gibt es ein  $\varrho_n > 0$ , so daß für je zwei Punkte  $x', x''$  aus  $[-n, n]$ :

$$(2) \quad |g_n(x') - g_n(x'')| < \frac{1}{n} \text{ wenn } |x' - x''| \leq \varrho_n;$$

dabei kann ohne weiteres angenommen werden:  $\varrho_{n-1} < \varrho_n < \varrho$ . Wir legen nun im  $R_2$  zur Geraden  $x_1 = x_2$  auf beiden Seiten Parallele  $P_n$  und  $P'_n$  im Abstände  $\varrho_{n-1}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), und definieren  $f(x_1, x_2)$  durch die Vorschrift: im Punkte  $x_1 = x, x_2 = x$  der Geraden  $x_1 = x_2$  sei  $f(x_1, x_2) = g(x)$ ; in den Schnittpunkten der in diesem Punkte errichteten Normalen der Geraden  $x_1 = x_2$  mit den Parallelen  $P_n, P'_n$  sei  $f(x_1, x_2) = g_n(x)$ ; auf dem zwischen zwei Parallelen  $P_n, P_{n+1}$  bzw.  $P'_n, P'_{n+1}$  liegenden Stück dieser Normalen sei  $f(x_1, x_2)$  linear; außerhalb des von  $P_1$  und  $P'_1$  begrenzten Streifens sei  $f(x_1, x_2) = 0$ . Wählen wir  $g_1(x) = 0$ , was ohne weiteres möglich ist, so ist, da  $\varrho_2 < \varrho$  war,  $f(x_1, x_2) = 0$  in allen Punkten  $(x_1, x_2)$ , die von der Geraden  $x_1 = x_2$  einen Abstand  $\geq \varrho$  haben, und es ist  $f(x_1, x_2)$  stetig in jedem nicht auf dieser Geraden gelegenen Punkte; bleibt also nur zu zeigen, daß  $f$  in jedem Punkte dieser Geraden partiell stetig ist. Sei also  $x_1 = \bar{x}, x_2 = \bar{x}$  ein Punkt der Geraden  $x_1 = x_2$ ; wir errichten in ihm die Normale zu dieser Geraden und bezeichnen den Schnittpunkt dieser Normalen und der Parallelen  $P_n$  mit  $(x_{1n}, x_{2n})$ . Sei  $\varepsilon > 0$  beliebig gegeben; wir wählen  $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$  so groß, daß für  $n \geq n_0$  das Intervall  $[\bar{x} - \varrho_n, \bar{x} + \varrho_n]$  ganz in  $[-n_0, n_0]$ , also auch ganz in  $[-n, n]$  liegt, und daß  $|g_n(\bar{x}) - g(\bar{x})| < \varepsilon$  für  $n \geq n_0$  (was wegen  $g_n \rightarrow g$  möglich ist). Wegen  $f(\bar{x}, \bar{x}) = g(\bar{x}), f(x_{1n}, x_{2n}) = g_n(\bar{x})$  ist dann:

$$(2.1) \quad |f(x_{1n}, x_{2n}) - f(\bar{x}, \bar{x})| < \varepsilon \text{ für } n \geq n_0.$$

Seien nun  $p_n, q_n$  die Schnittpunkte der Geraden  $P_n$  mit der Geraden  $x_1 = \bar{x}$  bzw.  $x_2 = \bar{x}$ ; wir betrachten das abgeschlossene Rechteck  $Q_n$ , das begrenzt wird von den Parallelen  $P_n, P_{n+1}$  und den in den Punkten  $p_n, q_n$  auf  $P_n$  errichteten Normalen; sei  $(x_1, x_2)$  ein Punkt der in  $P_n$  (bzw. in  $P_{n+1}$ ) liegenden Seite dieses Rechteckes, und sei  $(x^*, x^*)$  der Schnittpunkt der im Punkte  $(x_1, x_2)$  errichteten Normalen dieser Rechtecksseite mit der Geraden  $x_1 = x_2$ ; da  $P_n$  von der Geraden  $x_1 = x_2$  den Abstand  $\varrho_{n-1}$  hat, ist dann offenbar  $|x^* - \bar{x}| < \varrho_{n+1} < \varrho_n$ , und da nach Definition:  $f(x_1, x_2) = g_n(x^*)$  (bzw.  $= g_{n+1}(x^*)$ ),  $f(x_{1n}, x_{2n}) = g_n(\bar{x}), f(x_{1n+1}, x_{2n+1}) = g_{n+1}(\bar{x})$ , gelten auf den in  $P_n$  bzw.  $P_{n+1}$  liegenden Seiten des Rechteckes  $Q_n$  für  $n \geq n_0$  nach (2) die Ungleichungen:

$$|f(x_1, x_2) - f(x_{1n}, x_{2n})| < \varepsilon \text{ bzw. } |f(x_1, x_2) - f(x_{1n+1}, x_{2n+1})| < \varepsilon;$$

sobald  $n \geq n_0$ , gilt also nach (2.1) auf den beiden genannten Seiten dieses Rechteckes:  $|f(x_1, x_2) - f(\bar{x}, \bar{x})| < 2\varepsilon$ ; zufolge der Definition von  $f$  gilt dann aber diese Ungleichung im ganzen Rechteck  $Q_n$  für  $n \geq n_0$ ; sie gilt also auch auf dem vom Punkte  $(\bar{x}, \bar{x})$  und dem Punkte  $p_n$  bzw.  $q_n$  begrenzten Stücke der Geraden  $x_1 = \bar{x}$  bzw.  $x_2 = \bar{x}$ . Und da die Funktion  $f(x_1, x_2)$

in spiegelbildlich zur Geraden  $x_1 = x_2$  gelegenen Punkten denselben Wert hat, ist dadurch ihre partielle Stetigkeit im Punkte  $(x, x)$  bewiesen.

**39-2-31.** Ist  $g(x) \in \mathcal{G}_k^t(R_1)$  und  $\varrho > 0$ , so gibt es eine im  $R_k$  partiell stetige Funktion  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , so daß  $f(x, x, \dots, x) = g(x)$  und  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$  in jedem Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , der von der Geraden  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$  einen Abstand  $\geq \varrho$  hat.

Nach 39-2-3 ist die Behauptung richtig für  $k = 2$ ; wir nehmen sie als richtig an für  $k - 1$ , und zeigen, daß sie dann auch für  $k$  gilt. Vermöge der Schränkungstransformation können wir dabei  $g$  als endlich annehmen. Wir bezeichnen mit  $G$  die Gerade  $x_1 = x_2 = \dots = x_k$  des  $R_k$  und legen durch  $G$  einen  $R_{k-2}$ , der keine der  $k$  Koordinatenachsen des  $R_k$  enthält, und den wir mit  $H$  bezeichnen (im Falle  $k = 3$  ist  $H = G$ ); in dem durch  $H$  gehenden  $R_{k-1}$ -Büschel gibt es dann genau einen  $R_{k-1}$ , der die  $x_i$ -Achse enthält, und den wir mit  $K_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) bezeichnen; durch geeignete Wahl von  $H$  kann erreicht werden, daß keine zwei  $K_i$  zusammenfallen; seien  $K'_i, K''_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) weitere  $2k$  durch  $H$  gehende  $R_{k-1}$ , derart daß  $K'_1, K_1, K''_1, K'_2, K_2, K''_2, \dots, K'_k, K_k, K''_k$  zyklisch aufeinander folgen; das von  $K'_i$  und  $K''_i$  begrenzte abgeschlossene Dieder, das  $K_i$  enthält, bezeichnen wir mit  $D_i$ ; dann sind die Mengen  $D_i - H$  disjunkt. Wir definieren zunächst auf  $D_i$  eine partiell stetige Funktion  $f_i(x_1, x_2, \dots, x_k)$ , die  $= g(x)$  ist im Punkte  $x_1 = x, x_2 = x, \dots, x_k = x$  von  $G$ , und  $= 0$  ist auf  $K'_i - G$ , auf  $K''_i - G$  und in allen Punkten von  $D_i$ , die von  $G$  einen Abstand  $\geq \varrho$  haben; es genügt, diese Funktion in einem der beiden Keile zu definieren, in die  $D_i$  durch  $H$  zerlegt wird, da ihre Definition im anderen ganz analog erfolgen kann. Wir führen diese Definition etwa für  $i = k$  durch; sei also  $C$  einer der beiden Keile, in die  $D_k$  durch  $H$  zerlegt wird, z. B. der die positive Hälfte der  $x_k$ -Achse ( $x_k > 0$ ) enthaltende; sei ferner  $(\sigma_n)$  eine abnehmende Folge positiver Zahlen mit  $\sigma_1 < \varrho$  und  $\sigma_n \rightarrow 0$ ; sei  $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$  eine Folge untereinander und zu  $H$ , nicht aber zur  $x_k$ -Achse paralleler  $R_{k-1}$ , so daß  $P_n$  die Gerade  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1} = x_k - \sigma_n$  enthält. Da  $g(x) \in \mathcal{G}_k^t(R_1)$ , gibt es nach 35-1-5 in  $\mathcal{G}_{k-1}^{t-1}(R_1)$  eine Folge  $(g_n)$  mit  $\lim_n g_n = g$ , wobei wir noch ohne weiteres  $g_1 = 0$  setzen können; nach Annahme gibt es, wenn  $(\varrho_n)$  eine Folge positiver Zahlen mit  $\varrho_n \rightarrow 0$  bedeutet, im  $R_{k-1}$  eine partiell stetige Funktion  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ , so daß  $g_n(x, x, \dots, x) = g_n(x)$  und  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = 0$  für alle Punkte  $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ , die von der Geraden  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1}$  einen Abstand  $\geq \varrho_n$  haben, wobei ohne weiteres  $g_1(x_1, \dots, x_{k-1}) = 0$  angenommen werden kann; wir setzen nun:  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = g_n(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$  in allen Punkten von  $C \cap P_n$ ; war  $\varrho_n$  hinlänglich klein gewählt, so ist dann  $f_k = 0$  auf

$K'_k P_n$  und  $K''_k P_n$ ; auch in allen übrigen Punkten von  $K'_k C - G$  und  $K''_k C - G$  setzen wir  $f_k = 0$ ; auf  $G$  definieren wir  $f_k$  durch  $f_k(x, x, \dots, x) = g(x)$ ; um nun  $f_k$  auch in den Punkten  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  von  $C - (S P_n + K'_k + K''_k)$  zu definieren, legen wir durch einen solchen Punkt die zur  $x_k$ -Achse parallele Gerade; in ihren Schnittpunkten mit  $C P_n$ ,  $C K'_k$ ,  $C K''_k$  ist  $f_k$  schon definiert, und wir setzen nun fest, daß  $f_k$  zwischen zwei aufeinander folgenden dieser Schnittpunkte linear variieren soll; auf demjenigen der beiden Teile, in die  $C$  durch  $P_1$  zerlegt wird, der nicht an  $H$  grenzt, sei  $f_k = 0$ . Nun ist  $f_k$  auf ganz  $C$  definiert; da  $\sigma_1 < \varrho$ , also alle  $\sigma_n < \varrho$ , ist, wenn die  $\varrho_n$  hinlänglich klein gewählt werden,  $f_k = 0$  in allen Punkten von  $C$ , die von  $G$  einen Abstand  $\geq \varrho$  haben. Wir haben noch zu zeigen, daß  $f_k$  partiell stetig ist. In einem Punkte von  $C - H$  folgt die partielle Stetigkeit nach  $x_k$  unmittelbar aus der Definition, die partielle Stetigkeit nach  $x_i$  ( $i < k$ ) folgert man leicht aus der partiellen Stetigkeit der  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ . In den Punkten von  $H$  ist nur die partielle Stetigkeit nach  $x_k$  zu beweisen, da jede durch einen solchen Punkt gehende Parallele zu einer  $x_i$ -Achse ( $i \neq k$ ) ganz im Dieder  $D_i$  ( $i \neq k$ ) liegt, mithin mit  $C$  nur diesen Punkt gemein hat; ist zunächst  $p$  ein Punkt von  $G$ , etwa  $p = (x, x, \dots, x)$ , so folgt die Behauptung, da  $f_k(x, x, \dots, x, x + \sigma_n) = g_n(x, x, \dots, x) = g_n(x)$  ist, und da  $f(x, x, \dots, x, x_k)$  für  $x + \sigma_n \geq x_k \geq x + \sigma_{n+1}$  linear variiert, aus  $\lim_n g_n(x) = g(x)$ ; sei sodann  $p \in H - G$

und sei  $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ ; nach Definition ist dann  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = 0$ ; es können nicht  $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$  einen und denselben Wert  $x$  haben, da sonst die zur  $x_k$ -Achse parallele Verbindungsgerade des Punktes  $p$  mit dem Punkte  $(x, x, \dots, x)$  von  $G$ , mithin auch die  $x_k$ -Achse in  $H$  läge, entgegen der Wahl von  $H$ ; es liegt also der Punkt  $(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$  des  $R_{k-1}$  nicht auf der Geraden  $x_1 = x_2 = \dots = x_{k-1}$  des  $R_{k-1}$ , hat also von dieser Geraden positiven Abstand, und da  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = 0$  war in allen Punkten des  $R_{k-1}$ , die von dieser Geraden einen Abstand  $\geq \varrho_n$  haben, und da  $\varrho_n \rightarrow 0$  galt, ist  $g_n(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}) = 0$  für fast alle  $n$ ; also ist nach Definition auch  $f_k(x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k) = 0$  für alle hinlänglich nahe an  $x_k$  gelegenen  $x_k$ , d. h.  $f_k$  ist partiell stetig nach  $x_k$  im Punkte  $p = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ . — Nachdem in dieser Weise im Dieder  $D_i$  die gewünschte partiell stetige Funktion  $f_i$  definiert ist, definieren wir  $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$

im  $R_k$  durch:  $f = f_i$  in  $D_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ),  $f = 0$  in  $R_k - \bigcup_{i=1}^k D_i$ ; dann ist  $f$  partiell stetig; dies ist evident in jedem Punkte  $p \in R_k - H$ ; ist  $p \in H$ , so liegt die durch  $p$  gehende, zur  $x_i$ -Achse parallele Gerade ganz in  $D_i$ , so daß im Falle  $p \in H$  die partielle Stetigkeit von  $f$  aus der der  $f_i$  folgt. Und

offenbar ist  $f = 0$  in jedem Punkte, der von  $G$  einen Abstand  $\geq \varrho$  hat, da dies von den  $f_i$  galt.

Da es nach 35-8-1 im  $R_1$  Funktionen gibt, die genau  $\mathfrak{G}_k^1$ -Funktionen sind, lehrt 39-2-31, in Ergänzung zu 39-2-11, daß es im  $R_k$  partiell stetige Funktionen gibt, die genau  $\mathfrak{G}_k^1$ -Funktionen sind; denn wäre für jede im  $R_k$  partiell stetige Funktion:  $f(x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathfrak{G}_k^{k-1}(R_n) + \mathfrak{G}_{k-1}(R_n)$ , so wäre, wie der Beweis von 39-2-2 zeigt,  $f(x, x, \dots, x) \in \mathfrak{G}_k^{k-1}(R_1) + \mathfrak{G}_{k-1}(R_1)$ , im Widerspruche zu 39-2-31.

Literatur: R. Baire, Ann. di mat (3) 3 (1899) S. 87; H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 201.

**3. Stetigkeitspunkte partiell stetiger Funktionen.** Ist  $M \subseteq E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so bezeichnen wir die Projektion (§ 23, 6) von  $M$  in den Raum  $E^{(1)}$  (bzw.  $E^{(2)}$ ) mit  $M^{(1)}$  (bzw.  $M^{(2)}$ ); die Menge aller Punkte  $(x_1, x_2) \in M$  mit  $x_2 = a$  (bzw.  $x_1 = a$ ) bezeichnen wir mit  $M_a^{(1)}$  (bzw. mit  $M_a^{(2)}$ ).

Sei  $O$  offen in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  und  $f(x_1, x_2)$  eine Funktion auf  $O$ ; ist  $M \subseteq O$ , so bezeichnen wir mit  $\omega(M)$  die Schwankung von  $M$  1  $f$  (§ 26, 3); ist  $\bar{x}$  der Punkt  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  von  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  und  $\bar{x} \in O$ , so bezeichnen wir mit  $\omega(\bar{x})$  die Schwankung von  $f$  im Punkte  $\bar{x}$ , mit  $\omega_1(\bar{x})$  (bzw.  $\omega_2(\bar{x})$ ) die Schwankung von  $f(x_1, \bar{x}_2)$  im Punkte  $\bar{x}_1$  (bzw. die Schwankung von  $f(\bar{x}_1, x_2)$  im Punkte  $\bar{x}_2$ ); dann sind nach 26-3-2 die Punkte  $\bar{x} \in O$ , in denen  $f$  stetig, bzw. partiell stetig nach  $x_1$ , bzw. partiell stetig nach  $x_2$  ist, gegeben durch  $\omega(\bar{x}) = 0$ , bzw.  $\omega_1(\bar{x}) = 0$ , bzw.  $\omega_2(\bar{x}) = 0$ .

Die Funktion  $f$  auf  $O$  heiße eine  $B$ -Funktion auf  $O$ , wenn sie folgende Eigenschaft hat: ist  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in O$ , sind  $G^{(1)}$  und  $G^{(2)}$  offen in  $E^{(1)}$  bzw. in  $E^{(2)}$  und ist  $\bar{x}_1 \in G^{(1)}$ ,  $\bar{x}_2 \in G^{(2)}$ , so gibt es zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $H^{(1)} \subseteq G^{(1)}$  und ein  $x'_2 \in G^{(2)}$ , so daß  $\|f(x_1, x'_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| < \varepsilon$  für alle  $(x_1, x'_2) \in O$  mit  $x_1 \in H^{(1)}$ . Bemerken wir noch, daß dabei die Menge  $H^{(1)}$  und der Punkt  $x'_2 \in G^{(2)}$  immer so angenommen werden können, daß  $(x_1, x'_2) \in O$  für alle  $x_1 \in H^{(1)}$ . Denn sei  $\varrho > 0$ , und sei  $U$  die Umgebung  $2\varrho$  von  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$  in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ ,  $G'^{(1)}$  die Umgebung  $\varrho$  von  $\bar{x}_1$  in  $E^{(1)}$ ,  $G'^{(2)}$  die Umgebung  $\varrho$  von  $\bar{x}_2$  in  $E^{(2)}$ ; dann ist offenbar  $G'^{(1)} \times G'^{(2)} \subseteq U$ . Wählen wir  $\varrho$  hinlänglich klein, so ist  $G'^{(1)} \subseteq G^{(1)}$ ,  $G'^{(2)} \subseteq G^{(2)}$ ,  $U \subseteq O$ , also auch  $G'^{(1)} \times G'^{(2)} \subseteq O$ ; ist  $f$  eine  $B$ -Funktion auf  $O$ , so gibt es eine nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $H^{(1)} \subseteq G'^{(1)}$  und ein  $x'_2 \in G'^{(2)}$ , so daß  $\|f(x_1, x'_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)\| < \varepsilon$  für alle  $(x_1, x'_2) \in O$  mit  $x_1 \in H^{(1)}$ ; wegen  $H^{(1)} \subseteq G'^{(1)}$ ,  $G'^{(1)} \times G'^{(2)} \subseteq O$ ,  $x'_2 \in G'^{(2)}$  gilt nun aber  $(x_1, x'_2) \in O$  für alle  $x_1 \in H^{(1)}$ , und wegen  $G'^{(1)} \subseteq G^{(1)}$ ,  $G'^{(2)} \subseteq G^{(2)}$  ist auch  $H^{(1)} \subseteq G^{(1)}$ ,  $x'_2 \in G^{(2)}$ .

Ist  $f$  eine  $B$ -Funktion auf  $O$  und  $O' \subseteq O$ , so ist  $O'$  1  $f$  eine  $B$ -Funktion auf  $O'$ .



**39-3-1.** Ist  $f(x_1, x_2)$  eine  $B$ -Funktion auf  $O$  und ist für jede nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $G^{(1)} \subseteq O^{(1)}$ :  $\omega((G^{(1)} \times E^{(2)}) \cap O) \geq q$ , so ist die Menge aller  $x_1 \in O^{(1)}$  mit  $\omega(O_{x_1}^{(2)}) < q$  von erster Kategorie in  $O^{(1)}$ .

Es genügt zu zeigen: für jedes  $q' < q$  ist die Menge aller  $x_1 \in O^{(1)}$  mit  $\omega(O_{x_1}^{(2)}) < q'$  nirgends dicht in  $O^{(1)}$ . Sei  $G^{(1)}$  eine nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $\subseteq O^{(1)}$ ; nach 11-2-2 haben wir zu zeigen: es gibt eine nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $K^{(1)} \subseteq G^{(1)}$ , so daß  $\omega(O_{x_1}^{(2)}) \geq q'$  für alle  $x_1 \in K^{(1)}$ . Sei  $z$  das Infimum (§ 25, 4) der Funktion  $(G^{(1)} \times E^{(2)}) \cap O \mid f$  und sei  $z^* > z$ ; dann gibt es einen Punkt  $(x_1^*, x_2^*) \in (G^{(1)} \times E^{(2)}) \cap O$ , so daß  $f(x_1^*, x_2^*) < z^*$ , und weil  $f$  eine  $B$ -Funktion, gibt es eine nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $H^{(1)} \subseteq G^{(1)}$  und ein  $x_2' \in O^{(2)}$ , so daß  $(x_1, x_2') \in O$  und  $f(x_1, x_2') < z^*$  für alle  $x_1 \in H^{(1)}$ . Ist  $\bar{z}$  das Supremum von  $(H^{(1)} \times E^{(2)}) \cap O \mid f$  und  $\bar{z}^* < \bar{z}$ , so gibt es einen Punkt  $(x_1, x_2) \in (H^{(1)} \times E^{(2)}) \cap O$  mit  $f(x_1, x_2) > \bar{z}^*$ , und weil  $f$  eine  $B$ -Funktion, gibt es eine nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $K^{(1)} \subseteq H^{(1)}$  und ein  $x_2' \in O^{(2)}$ , so daß  $(x_1, x_2') \in O$  und  $f(x_1, x_2') > \bar{z}^*$  für alle  $x_1 \in K^{(1)}$ . Dann ist, wenn  $z^* < \bar{z}^*$  ist:  $\omega(O_{x_1}^{(2)}) > \|\bar{z}^* - z^*\|$  für alle  $x_1 \in K^{(1)}$ . Da  $q' < q$  und nach Voraussetzung  $q \leq \omega((H^{(1)} \times E^{(2)}) \cap O) \leq \|\bar{z} - z\|$ , können  $z^*$  und  $\bar{z}^*$  so gewählt werden, daß  $z^* < \bar{z}^*$  und  $\|\bar{z}^* - z^*\| > q'$ ; dann aber ist  $\omega(O_{x_1}^{(2)}) > q'$  für alle  $x_1 \in K^{(1)}$ , w. z. b. w.

**39-3-2.** Ist  $f(x_1, x_2)$  eine  $B$ -Funktion auf  $O$ , ist  $x_2 \in O^{(2)}$  und  $\omega(x) \geq q$  für alle  $x \in O_{x_2}^{(1)}$ , so ist die Menge aller  $x \in O_{x_2}^{(1)}$  mit  $\omega_2(x) < q$  von erster Kategorie in  $O_{x_2}^{(1)}$ .

Sei  $P^{(1)}$  die Projektion von  $O_{x_2}^{(1)}$  in den Raum  $E^{(1)}$  und  $G_n^{(2)}$  die Umgebung  $\frac{1}{n}$  von  $x_2$  in  $E^{(2)}$ . Da  $\omega(x) \geq q$  für alle  $x \in O_{x_2}^{(1)}$ , ist dann für jede nicht leere, in  $E^{(1)}$  offene Menge  $G^{(1)} \subseteq P^{(1)}$ :  $\omega((G^{(1)} \times G_n^{(2)}) \cap O) \geq q$ . Aus 39-3-1 folgt also, indem wir dort  $E^{(2)}$  durch  $G_n^{(2)}$  und  $O$  durch  $(P^{(1)} \times G_n^{(2)}) \cap O = O'_n$  ersetzen: die Menge  $A_n$  aller  $x_1 \in P^{(1)}$  mit  $\omega((O'_n)^{(2)}) < q$  ist von erster Kategorie in  $P^{(1)}$ . Also ist auch  $A = \bigcup_n A_n$  von erster Kategorie in  $P^{(1)}$ . Nach 26-3-1 ist aber  $\omega_2(x_1, x_2) = \lim_n \omega((O'_n)_{x_1}^{(2)})$ ; aus  $\omega_2(x_1, x_2) < q$  folgt also:

$x_1 \in A_n$  für fast alle  $n$ , also auch  $x_1 \in A$ ; die Menge aller  $x_1 \in P^{(1)}$  mit  $\omega_2(x_1, x_2) < q$  ist also von erster Kategorie in  $P^{(1)}$ , oder mit anderen Worten: die Menge aller  $x \in O_{x_2}^{(1)}$  mit  $\omega_2(x) < q$  ist von erster Kategorie in  $O_{x_2}^{(1)}$ .

**39-3-21.** Ist  $E^{(2)}$  separabel,  $f(x_1, x_2)$  eine  $B$ -Funktion auf  $O$  und  $\omega(x) \geq q$  für alle  $x \in O$ , so ist, wenn  $Q$  die Menge aller  $x \in O$  mit  $\omega_2(x) < q$  und  $Q'$  die Projektion von  $Q$  in den Raum  $E^{(1)}$  bedeutet,  $Q'$  von erster Kategorie in  $E^{(1)}$ .

Sei  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r, \dots$  eine abzählbare in  $E^{(2)}$  dichte Menge. Zu jedem  $x_1 \in Q'$  gibt es ein  $x_2 \in O_{x_1}^{(2)}$ , so daß  $\omega_2(x_1, x_2) < q$ ; da nach 36-3-11  $\omega_2(x_1, x_2)$

eine oberhalb stetige Funktion auf  $O_{\bar{x}_1}^{(2)}$  ist, gibt es also auch ein  $a_r$ , so daß  $\omega_2(\bar{x}_1, a_r) < q$ . Ist also  $Q_r$  die Projektion von  $Q \cap O_{\bar{x}_1}^{(1)}$  in den Raum  $E^{(1)}$ , so ist  $Q' = \bigcup_r Q_r$ ; nach 39-3-2 und 19-4-8 ist aber  $Q_r$  von erster Kategorie in  $E^{(1)}$ , also auch  $Q'$ .

**39-3-22.** Ist  $E^{(1)}$  ein Youngscher Raum, ist  $f$  eine B-Funktion auf  $O$  und ist  $f$  partiell stetig nach  $x_2$  für alle  $x \in O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ , so ist die Menge aller  $x \in O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ , in denen  $f$  unstetig ist, von erster Kategorie in  $O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ .

Nach 26-3-2 genügt es, zu zeigen: für jedes  $q > 0$  ist die Menge  $A_q$  aller  $x \in O_{\bar{x}_1}^{(1)}$  mit  $\omega(x) \geq q$  nirgends dicht in  $O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ . Nach 26-3-41 ist  $A_q$  abgeschlossen in  $O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ ; wäre  $A_q$  nicht nirgends dicht in  $O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ , so gäbe es also nach 11-2-111 eine in  $O_{\bar{x}_1}^{(1)}$  offene Menge  $G^{(1)} \supset A$ , so daß  $\omega(x) \geq q$  für alle  $x \in G^{(1)}$ ; nach 10-8-1 ist  $G^{(1)} = O_{\bar{x}_1}^{(1)} H$ , wo  $H$  offen in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ ; dabei kann ohne weiteres  $H \subseteq O$  angenommen werden; aus 39-3-2, angewendet auf  $H \mid f$  würde dann folgen, daß die Menge aller  $x \in G^{(1)}$  mit  $\omega_2(x) < q$  von erster Kategorie in  $G^{(1)}$  ist; dann aber gäbe es nach 19-7-511 einen Punkt  $x \in G^{(1)}$  mit  $\omega_2(x) \geq q$ , im Widerspruch zur Voraussetzung, daß  $f$  partiell stetig nach  $x_2$  für alle  $x \in O_{\bar{x}_1}^{(1)}$ .

Wir betrachten nun einen Produktraum  $E^{(1)} \times E^{(2)} \times \dots \times E^{(n)}$ , auf den sich, wo nichts anderes gesagt, die im folgenden auftretenden Relativbegriffe (wie offen, Umgebung usf.) beziehen.

**39-3-3.** Sind  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n-1)}$  Youngsche Räume, ist  $O$  offen, und ist  $f$  eine partiell stetige Funktion auf  $O$ , so gibt es zu jedem  $\bar{x} \in O$ , zu jedem  $\varepsilon > 0$  und zu jeder Umgebung  $U$  von  $\bar{x}$  eine nicht leere, offene Menge  $H \subseteq U$ , so daß  $\|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$  für alle  $x \in H$ .

Wir beweisen das durch Induktion. Die Behauptung ist trivial für  $n = 1$ ; wir nehmen an, sie gelte für  $n - 1$ , und zeigen, daß sie dann auch für  $n$  gilt. Setzen wir  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)} = E'$ , also  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n)} = E' \times E^{(n)}$ , und schreiben die Punkte  $(x_1, \dots, x_n)$  von  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n)}$  in der Form  $(y, x_n)$ , wo  $y = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in E'$ , so ist  $O$  eine offene Menge in  $E' \times E^{(n)}$  und  $f(x_1, \dots, x_n)$  kann in der Form  $f(y, x_n)$  geschrieben werden. Sei  $(y^*, x_n^*) \in O$ , wo  $y^* = (x_1^*, \dots, x_{n-1}^*)$ ; ist dann  $G'$  offen in  $E'$  und  $y^* \in G'$ , so gibt es, da nach Annahme die Behauptung für  $n - 1$  gilt, zu jedem  $\varepsilon > 0$  eine nicht leere, in  $E'$  offene Menge  $H' \subseteq G'$ , so daß  $\|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^*) - f(x_1^*, \dots, x_{n-1}^*, x_n^*)\| < \varepsilon$  für alle  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H'$ , d. h.  $\|f(y, x_n^*) - f(y^*, x_n^*)\| < \varepsilon$  für alle  $y \in H'$ , d. h.  $f(y, x_n)$  ist eine B-Funktion auf  $O$ . Sei nun  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in O$  und  $U$  eine Umgebung von  $\bar{x}$ ; wir bezeichnen mit  $U_{\bar{x}_n}$  die Menge aller  $(x_1, \dots, x_n) \in U$  mit  $x_n = \bar{x}_n$ ; da nach

Annahme die Behauptung für  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, \bar{x}_n)$  gilt, gibt es eine nicht leere, in  $U_{\bar{x}_n}$  offene Menge  $\bar{H}$ , so daß für alle  $(x_1, \dots, x_{n-1}, \bar{x}_n) \in \bar{H}$ :

$$(3) \quad \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da nach 20-2-71  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$  ein Youngscher Raum, ist nach 39-3-22 die Menge aller Punkte von  $U_{\bar{x}_n}$ , in denen  $f(y, x_n) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  unstetig ist, von erster Kategorie in  $U_{\bar{x}_n}$ ; da nach 20-4-1 und 19-1-2 auch  $U_{\bar{x}_n}$  eine Youngsche Menge, gibt es also nach 19-7-511 einen Punkt  $\bar{x} \in \bar{H}$ , in dem  $f$  stetig ist; es gibt also eine offene Menge  $H \subseteq U$ , so daß  $\|f(x) - f(\bar{x})\| < \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $x \in H$ . Wegen (3) ist aber  $\|f(\bar{x}) - f(\bar{x})\| < \frac{\varepsilon}{2}$ , also ist  $\|f(x) - f(\bar{x})\| < \varepsilon$  für alle  $x \in H$ .

**39-3-31.** Sind  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n-1)}$  Youngsche Räume, ist  $O$  offen und  $f$  eine partiell stetige Funktion auf  $O$ , so ist, wenn  $(x_1, \dots, x_{n-1}) = y$  und  $f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = f(y, x_n)$  gesetzt wird,  $f(y, x_n)$  eine B-Funktion auf  $O$ .

Dies folgt unmittelbar aus 39-3-3.

**39-3-32.** Sind  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n-1)}$  Youngsche Räume, ist  $O$  offen und  $f$  eine partiell stetige Funktion auf  $O$ , so ist, wenn  $O_{\bar{x}_n}$  die Menge aller  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in O$  mit  $x_n = \bar{x}_n$  bedeutet, die Menge aller Punkte von  $O_{\bar{x}_n}$ , in denen  $f$  unstetig ist, von erster Kategorie in  $O_{\bar{x}_n}$ .

Dies folgt aus 39-3-22 und 39-3-31.

Aus 39-3-32 entnimmt man, daß — unter den Voraussetzungen dieses Satzes — jede partiell stetige Funktion auf  $O$  Stetigkeitspunkte besitzt; und zwar liegen diese Stetigkeitspunkte nach 19-7-51 in jeder Menge  $O_{\bar{x}_n}$  dicht. Wir werden in 39-3-6 eine Verschärfung von 39-3-32 beweisen. Dazu benötigen wir zwei Hilfssätze.

**39-3-4.** Sind  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n-1)}$  Youngsche Räume, ist  $E^{(n)}$  in sich kompakt und ist  $f$  eine partiell stetige Funktion auf  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n)}$ , so gibt es eine in  $E^{(n)}$  dichte abzählbare Menge  $C$  und zu jedem  $\varrho > 0$  und zu jeder in  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$  offenen Menge  $G \supset \Lambda$  ein  $\sigma > 0$ , eine in  $G$  offene Menge  $H \supset \Lambda$  und eine Residualmenge  $H^*$  in  $H$ , so daß  $f$  für alle  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H^*$  und alle  $x_n \in C$  stetig in  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$  ist, und für alle  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H^*$  und alle  $x'_n \in E^{(n)}, x''_n \in E^{(n)}$  mit  $x'_n x''_n < \sigma$  die Ungleichung gilt:

$$\|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x''_n)\| \leq \varrho.$$

Nach 15-1-41 ist  $E^{(n)}$  separabel, es gibt also eine abzählbare in  $E^{(n)}$  dichte Menge  $C$ ; ihre Punkte seien  $c_1, c_2, \dots, c_r, \dots$ . Sei  $A$ , die Menge aller

$(x_1, \dots, x_{n-1}) \in G$ , für die  $(x_1, \dots, x_{n-1}, c_i)$  ein Unstetigkeitspunkt von  $f$  ist; nach 39-3-32 ist  $A_i$  von erster Kategorie in  $G$ , mithin auch  $\bigcup A_i$  von erster Kategorie in  $G$ , und  $B = G - \bigcup A_i$  eine Residualmenge in  $G$ . Weil  $f$  partiell stetig nach  $x_n$ , gibt es zufolge 25-7-31 zu jedem Punkte  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B$  ein  $\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}) > 0$ , so daß:

$$\|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x''_n)\| \leq \varrho$$

für alle  $x'_n \in E^{(n)}$ ,  $x''_n \in E^{(n)}$  mit  $x'_n x''_n < \sigma(x_1, \dots, x_{n-1})$ . Sei  $B_k$  die Menge aller  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in B$ , für die  $\sigma(x_1, \dots, x_{n-1}) = \frac{1}{k}$  angenommen werden kann; wir zeigen zunächst:  $B_k$  ist abgeschlossen in  $B$ . Sei  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in (B_k)^0 B$ ; wir haben zu zeigen: dann ist auch  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in B_k$ . Es gibt in  $B_k$  eine Folge von Punkten  $(x_1^i, \dots, x_{n-1}^i)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), so daß  $(x_1^i, \dots, x_{n-1}^i) \rightarrow (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$ ; sei  $x'_n \in C$ ,  $x''_n \in C$ ,  $x'_n x''_n < \frac{1}{k}$ ; nach Definition von  $B_k$  ist dann  $\|f(x_1^i, \dots, x_{n-1}^i, x'_n) - f(x_1^i, \dots, x_{n-1}^i, x''_n)\| \leq \varrho$ ; nach Definition von  $B$  ist  $f$  stetig in  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, x'_n)$  und in  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, x''_n)$ ; also gilt auch:

$$(3.1) \quad \|f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, x'_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, x''_n)\| \leq \varrho;$$

da (3.1) für alle  $x'_n \in C$ ,  $x''_n \in C$  mit  $x'_n x''_n < \frac{1}{k}$  gilt, da  $C$  dicht in  $E^{(n)}$  und  $f$  partiell stetig nach  $x_n$ , gilt (3.1) auch für alle  $x'_n \in E^{(n)}$ ,  $x''_n \in E^{(n)}$  mit  $x'_n x''_n < \frac{1}{k}$ , d. h.  $\sigma(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})$  kann  $= \frac{1}{k}$  angenommen werden, d. h.  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}) \in B_k$ , w. z. b. w. — Nun ist  $B = \bigcup_k B_k$ ; da  $B$  Residualmenge in  $G$ , also nach 19-7-7 nicht von erster Kategorie in  $G$ , ist mindestens ein  $B_k$ , etwa  $B_{k^*}$ , nicht nirgends dicht in  $G$ ; nach 11-3-7 gibt es also eine in  $G$  offene Menge  $H \supset A$ , so daß  $B_{k^*} H$  dicht in  $H$ ; da  $B_{k^*}$  abgeschlossen in  $B$ , ist dann  $B_{k^*} H = B H$ ; setzen wir  $B H = H^*$ , so gilt also nach Definition von  $B_{k^*}$  für alle  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H^*$  und alle  $x'_n \in E^{(n)}$ ,  $x''_n \in E^{(n)}$  mit  $x'_n x''_n < \frac{1}{k^*}$  die Ungleichung  $\|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x''_n)\| \leq \varrho$ , nach Definition von  $B$  ist  $f$  stetig in  $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ , wenn  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H^*$  und  $x_n \in C$ ; und weil  $B$  eine Residualmenge in  $G$  war, ist nach 19-7-3  $H^*$  eine Residualmenge in  $H$ .

**39-3-5.** Sind  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n-1)}$  Youngsche Räume, ist  $E^{(n)}$  in sich kompakt und  $f$  eine partiell stetige Funktion auf  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n)}$ , so ist für jedes  $q > 0$  die Projektion  $P$  der Menge  $\{\omega(\xi) \geq q\}$  in den Raum  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$  nirgends dicht in  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$ .

Nach 26-3-41 und 23-6-3 ist  $P$  abgeschlossen in  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$ ; nach 11-2-111 genügt es also zu zeigen: es gibt keine in  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$  offene Menge, die  $\supset A$  und  $\subseteq P$  wäre. Angenommen, es gäbe eine solche Menge  $G$ . Wir wählen in 39-3-4  $\varrho = \frac{q}{6}$  und haben:

$$(3.2) \quad \begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x'_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x''_n)\| \leq \frac{q}{6} \\ & \text{für } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in H^*, x'_n, x''_n < \sigma. \end{aligned}$$

Sei  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in H^*$ ; wegen  $H^* \subseteq G \subseteq P$  gibt es ein  $x_n \in E^{(n)}$ , so daß  $\omega(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \geq q$ . Da  $f$  partiell stetig nach  $x_n$ , gibt es ein  $c \in O$ , so daß:

$$(3.3) \quad \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, c) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)\| < \frac{q}{18}, \quad c, x_n < \frac{\sigma}{2}.$$

Da nach Definition von  $H^*$   $f$  stetig in  $(x_1, \dots, x_{n-1}, c)$ , gibt es eine in  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$  offene Menge  $O \subseteq H$ , so daß  $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in O$  und:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, c) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, c)\| < \frac{q}{18} \\ & \text{für } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O. \end{aligned}$$

Bezeichnet  $O^{(n)}$  die Menge aller  $x_n \in E^{(n)}$  mit  $x_n, \bar{x}_n < \frac{\sigma}{2}$ , so gibt es wegen  $\omega(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \geq q$  nach 26-3-12 einen Punkt  $(x_1^*, \dots, x_n^*) \in O \times O^{(n)}$ , so daß:

$$(3.5) \quad \|f(x_1^*, \dots, x_n^*) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\| > \frac{q}{3},$$

und weil  $f$  nach 39-3-31 eine  $B$ -Funktion, gibt es eine in  $O$  offene Menge  $O' \supset A$  und ein  $x_n^{**} \in O^{(n)}$ , so daß:

$$(3.6) \quad \begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{**}) - f(x_1^*, \dots, x_n^*)\| < \frac{q}{18} \\ & \text{für } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O'. \end{aligned}$$

Aus (3.3), (3.4), (3.5), (3.6) folgt:

$$(3.7) \quad \begin{aligned} & \|f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{**}) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, c)\| > \frac{q}{6} \\ & \text{für } (x_1, \dots, x_{n-1}) \in O'. \end{aligned}$$

Nach (3.3) war  $c, x_n < \frac{\sigma}{2}$ , nach Definition von  $O^{(n)}$  ist  $x_n^{**}, \bar{x}_n < \frac{\sigma}{2}$ , also ist  $x_n^{**}, c < \sigma$ ; da  $H^*$  eine Residualmenge in  $H$  und  $O' \subseteq O \subseteq H$ , ist nach 19-7-51  $O' \cap H^* \supset A$ , somit steht (3.7) im Widerspruche zu (3.2).

**39-3-6.** Sind  $E^{(1)}, E^{(2)}, \dots, E^{(n-1)}$  Youngsche Räume, ist  $E^{(n)}$  in sich kompakt und  $f$  eine partiell stetige Funktion auf  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n)}$ , so ist die Projektion  $P$  der Menge aller Unstetigkeitspunkte von  $f$  in den Raum  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$  von erster Kategorie in  $E^{(1)} \times \dots \times E^{(n-1)}$ .

## Fünftes Kapitel.

### Die analytischen Mengen.

#### § 40. Analytische Mengen.

1. Suslinsche Schemata. In Verallgemeinerung des Begriffes „dyadisches Schema“ (§ 18, 7) definieren wir: Ist  $\mathfrak{M}$  ein Mengensystem und ist jedem Komplex  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) natürlicher Zahlen eine Menge  $M_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{M}$  zugeordnet, so bilden die Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ein Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{M}$ . Die Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  mit  $k$  Indizes heißen die Mengen  $k$ -ter Stufe von  $\mathfrak{S}$ . Die Menge  $M_{n'_1 n'_2 \dots n'_k}$  heißt ein Nachfolger von  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ( $k < l$ ) (und umgekehrt  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ein Vorgänger von  $M_{n'_1 n'_2 \dots n'_k}$ ), wenn  $n'_1 = n_1, n'_2 = n_2, \dots, n'_k = n_k$ . Bei festem  $n_1, n_2, \dots, n_{k-1}$  heiße das System der Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_{k-1} n_k}$  ( $n_k = 1, 2, \dots$ ) ein Abschnitt  $k$ -ter Stufe von  $\mathfrak{S}$ , und zwar ein auf  $M_{n_1}$ , auf  $M_{n_1 n_2}$ , ..., auf  $M_{n_1 n_2 \dots n_{k-1}}$  folgender Abschnitt. Die Summe aller Mengen eines Abschnittes  $k$ -ter Stufe heiße eine Abschnittssumme  $k$ -ter Stufe.

Wir bilden zu jeder Folge  $\nu = ((n_k))$  natürlicher Zahlen den Durchschnitt:

$$(1) \quad M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_2} \cdot \dots \cdot M_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot \dots;$$

die Menge:

$$(1.1) \quad A(\mathfrak{S}) = \sum_\nu M_\nu$$

(wo die Summation über alle Folgen  $\nu$  natürlicher Zahlen zu erstrecken ist), heißt der Kern des Schemas  $\mathfrak{S}$ .

Das Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}$  heißt monoton, wenn in ihm stets  $M_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} \subseteq M_{n_1 \dots n_k}$ , d. h. wenn jeder Nachfolger Teil jedes Vorgängers ist.

Bezeichnen wir mit  $M^{(k)}$  die Summe aller Mengen  $k$ -ter Stufe des Schemas  $\mathfrak{S}$ :

$$M^{(k)} = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} M_{n_1 n_2 \dots n_k},$$

so gilt:

**40-1-1.** Sind im monotonen Suslinschen Schema  $\mathfrak{S}$  für jedes  $k \geq k_0$  die Abschnittsummen  $k$ -ter Stufe disjunkt, so ist  $A(\mathfrak{S}) = D M^{(k)}$ .

Da jedenfalls  $A(\mathfrak{S}) \subseteq D M^{(k)}$ , ist nur zu zeigen: ist  $a \in D M^{(k)}$ , so ist auch  $a \in A(\mathfrak{S})$ . Sei  $S_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die Summe der Mengen des auf  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  folgenden Abschnittes  $(k+1)$ -ter Stufe. Da  $a$  für  $k \geq k_0$  genau einer Abschnittsumme  $k$ -ter Stufe angehört, und da  $\mathfrak{S}$  monoton, also  $S_{n_1 n_2 \dots n_k} \supseteq S_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k+1}}$ , gibt es eine Folge  $((n_k^*))$ , so daß  $a \in S_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  für  $k \geq k_0$ ; wegen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k} \supseteq S_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ist dann auch  $a \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  für  $k \geq k_0$ , und wegen der Monotonie von  $\mathfrak{S}$  gilt dies für alle  $k$ . Also ist  $a \in M_{n_1^*} \cdot M_{n_2^*} \cdot \dots \cdot M_{n_k^*} \cdot \dots$ , d. h.  $a \in A(\mathfrak{S})$ , w. z. b. w.

**40-1-2.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so kann jedes Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{M}$  ersetzt werden durch ein monotonen Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}'$  in  $\mathfrak{M}$  von gleichem Kerne.

Seien  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die Mengen von  $\mathfrak{S}$ . Setzen wir  $M'_{n_1 n_2 \dots n_k} = M_{n_1} \cdot M_{n_2} \cdot \dots \cdot M_{n_k}$ , so ist, weil  $\mathfrak{M}$  ein Ring, auch  $M'_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{M}$ ; also ist das System  $\mathfrak{S}'$  der Mengen  $M'_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ein monotonen Suslinsches Schema in  $\mathfrak{M}$ . Setzen wir, wenn  $\nu$  die Folge  $((n_k))$  natürlicher Zahlen bedeutet:  $M'_\nu = M'_{n_1} \cdot M'_{n_2} \cdot \dots \cdot M'_{n_k} \cdot \dots$ , so ist nach (1):  $M_\nu = M'_\nu$ , also nach (1-1) auch  $A(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S}')$ .

Ist  $\mathfrak{S}$  ein Suslinsches Schema in  $\mathfrak{M}$ , so bilden die Nachfolger der Menge  $M_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{S}$  gleichfalls ein Suslinsches Schema in  $\mathfrak{M}$ , das wir mit  $\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bezeichnen.

**40-1-3.** Ist  $\mathfrak{S}$  monoton, so ist:

$$A(\mathfrak{S}) = \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k} A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k}); \quad A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k}) = \sum_n A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k n}).$$

Denn bei monotonem  $\mathfrak{S}$  ist in (1):

$$M_\nu = M_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} \cdot M_{n_1 \dots n_k n_{k+1} n_{k+2}} \cdot \dots \cdot M_{n_1 \dots n_k n_{k+1} \dots n_{k+\nu}} \cdot \dots;$$

also ist  $A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k})$  die Summe derjenigen Summanden in (1-1), für die die Folge  $\nu$  mit den Stellen  $n_1, n_2, \dots, n_k$  beginnt.

Die Mengen  $A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k}) = A_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bilden auch ihrerseits ein Suslinsches Schema, das aber i. a. kein Suslinsches Schema in  $\mathfrak{M}$  sein wird; wir bezeichnen es mit  $\bar{\mathfrak{S}}$ . Ist  $\mathfrak{S}$  monoton, so auch  $\bar{\mathfrak{S}}$ .

**40-1-4.** Ist  $\mathfrak{S}$  monoton, so ist  $A(\mathfrak{S}) = A(\bar{\mathfrak{S}})$ .

Denn da, wie wir bei Beweise von 40-1-3 sahen,  $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die Summe derjenigen Summanden in (1-1) ist, für die die Folge  $\nu$  mit den Stellen  $n_1, n_2, \dots, n_k$  beginnt, so ist:

$M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot M_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots \subseteq A_{n_1} \cdot A_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot A_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots$ ;  
und da, wenn  $\mathfrak{S}$  monoton, offenbar  $A_{n_1 n_1} \dots n_k \subseteq M_{n_1 n_1} \dots n_k$ , ist auch:  
 $A_{n_1} \cdot A_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot A_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots \subseteq M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot M_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots$ ;  
also ist:

$$(1.2) \quad A_{n_1} \cdot A_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot A_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot M_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots$$

Sei  $\mathfrak{N}$  ein Mengensystem, das die folgenden Eigenschaften hat:

1.  $\mathfrak{N}$  ist ein  $\sigma$ -System.

2. Ist  $N \in \mathfrak{N}$  und  $N' \subseteq N$ , so ist auch  $N' \in \mathfrak{N}$ .

Beispiele hierfür sind: die abzählbaren Mengen, die Mengen erster Kategorie eines metrischen Raumes. Schreiben wir:  $A (=) B$ , wenn  $A - B \in \mathfrak{N}$  und  $B - A \in \mathfrak{N}$ , so gilt:

**40.1.5.** Ist  $\mathfrak{S}$  das Suslinsche Schema der Mengen  $M_{n_1 n_1 \dots n_k}$  und  $\mathfrak{S}'$  das Suslinsche Schema der Mengen  $M'_{n_1 n_1 \dots n_k}$ , und ist  $M_{n_1 n_1 \dots n_k} (=) M'_{n_1 n_1 \dots n_k}$  für alle Komplexe  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$ , so ist auch  $A (\mathfrak{S}) (=) A (\mathfrak{S}')$ .

Nach Annahme ist:

$$M_{n_1 n_1 \dots n_k} - M'_{n_1 n_1 \dots n_k} \in \mathfrak{N}, \quad M'_{n_1 n_1 \dots n_k} - M_{n_1 n_1 \dots n_k} \in \mathfrak{N},$$

also, wenn:

$$C = S(M_{n_1 n_1 \dots n_k} - M'_{n_1 n_1 \dots n_k}) + S(M'_{n_1 n_1 \dots n_k} - M_{n_1 n_1 \dots n_k})$$

gesetzt wird (wo die Summation über alle Komplexe  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  zu erstrecken ist), auch  $C \in \mathfrak{N}$ . Setzen wir, wenn  $\nu$  die Folge  $((n_k))$  bedeutet:

$$M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot M_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots,$$

$$M'_\nu = M'_{n_1} \cdot M'_{n_1 n_1} \cdot \dots \cdot M'_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots,$$

so ist  $M_\nu - M'_\nu \subseteq (M_{n_1} - M'_{n_1}) + (M_{n_1 n_1} - M'_{n_1 n_1}) + \dots$ , also  $M_\nu - M'_\nu \subseteq C$ ,  
und ebenso  $M'_\nu - M_\nu \subseteq C$ . Da nach (1.1):  $A (\mathfrak{S}) = S_\nu M_\nu$ ,  $A (\mathfrak{S}') = S_\nu M'_\nu$ , ist  $A (\mathfrak{S}) - A (\mathfrak{S}') \subseteq S_\nu (M_\nu - M'_\nu)$ ,  
also  $A (\mathfrak{S}) - A (\mathfrak{S}') \subseteq C$ ,  $A (\mathfrak{S}') - A (\mathfrak{S}) \subseteq C$ , also  $A (\mathfrak{S}) - A (\mathfrak{S}') \in \mathfrak{N}$ ,  
 $A (\mathfrak{S}') - A (\mathfrak{S}) \in \mathfrak{N}$ , d. h.  $A (\mathfrak{S}) (=) A (\mathfrak{S}')$ .

**40.1.6.** Ist  $\mathfrak{S}$  das Suslinsche Schema der Mengen  $M_{n_1 n_1 \dots n_k}$  und ist  $M$  eine beliebige Menge, so ist  $M A (\mathfrak{S})$  der Kern des Suslinschen Schemas der Mengen  $M M_{n_1 n_1 \dots n_k}$ .

Denn nach (1.1) ist  $M A (\mathfrak{S}) = S_\nu M M_\nu$ , und nach (1) ist  $M M_\nu = (M M_{n_1}) \cdot (M M_{n_1 n_1}) \cdot \dots \cdot (M M_{n_1 n_1 \dots n_k}) \cdot \dots$ .

Literatur: M. Suslin, C.R. 164 (1917) S. 88; F. Hausdorff, Mengenlehre S. 90.  
Zu Satz 40.1.5: O. Nikodym, C. R. Vars. 19 (1926) S. 294.



2. Die analytischen Mengen über  $\mathfrak{M}$ . Den Kern  $A$  ( $\mathfrak{S}$ ) eines Suslinschen Schemas in  $\mathfrak{M}$  bezeichnen wir als eine analytische Menge über  $\mathfrak{M}$ . Das System aller analytischen Mengen über  $\mathfrak{M}$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{M}_A$ .

**40-2-1.** Es ist  $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M}_A$ .

Denn ist  $M \in \mathfrak{M}$ , und sind im Suslinschen Schema  $\mathfrak{S}$  sämtliche Mengen  $= M$ , so ist auch  $A(\mathfrak{S}) = M$ .

Wendet man den Prozeß, der von  $\mathfrak{M}$  zu  $\mathfrak{M}_A$  führt, neuerdings auf  $\mathfrak{M}_A$  an, d. h. bildet man das System  $(\mathfrak{M}_A)_A$  aller analytischen Mengen über  $\mathfrak{M}_A$ , so gilt:

**40-2-2.** Es ist  $(\mathfrak{M}_A)_A = \mathfrak{M}_A$ .

Aus 40-2-1 erhalten wir, indem wir  $\mathfrak{M}$  durch  $\mathfrak{M}_A$  ersetzen:  $\mathfrak{M}_A \subseteq (\mathfrak{M}_A)_A$ . Es ist also nur mehr zu zeigen: ist  $C \in (\mathfrak{M}_A)_A$ , so ist auch  $C \in \mathfrak{M}_A$ . Sei also  $C \in (\mathfrak{M}_A)_A$ ; dann ist:

$$C = \bigcup_{\nu} N_{\nu}, \text{ mit } N_{\nu} = N_{n_1} \cdot N_{n_1 n_2} \cdot \dots \cdot N_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot \dots,$$

wo  $N_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{M}_A$  und  $\nu = ((n_k))$  alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft. Wegen  $N_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{M}_A$  ist hierin:

$$N_{n_1 n_2 \dots n_k} = \bigcup_{\lambda} M_{\lambda}^{n_1 n_2 \dots n_k} \text{ mit } M_{\lambda}^{n_1 n_2 \dots n_k} = M_{i_1}^{n_1} \cdot M_{i_1 i_2}^{n_2} \cdot \dots \cdot M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{n_k} \cdot \dots,$$

wo  $M_{i_1 i_2 \dots i_k}^{n_k} \in \mathfrak{M}$  und  $\lambda = ((i_k))$  alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft.

Nach dem ersten Distributivgesetze (§ 2 (2-3)) ist also:

$$N_{\nu} = \bigcup_{\alpha, \beta, \gamma, \dots} M_{\alpha}^{n_1} M_{\beta}^{n_2} M_{\gamma}^{n_3} \dots,$$

wo  $M_{\alpha}^{n_1} = M_{a_1}^{n_1} M_{a_1 a_2}^{n_1} M_{a_1 a_2 a_3}^{n_1} \dots$ ,  $M_{\beta}^{n_2} = M_{b_1}^{n_2} M_{b_1 b_2}^{n_2} M_{b_1 b_2 b_3}^{n_2} \dots$  usf., und  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  je für sich alle Folgen natürlicher Zahlen durchlaufen. Also ist weiter:

$$C = \bigcup_{\nu, \alpha, \beta, \gamma, \dots} M_{a_1}^{n_1} M_{a_1 a_2}^{n_1} \dots M_{b_1}^{n_2} M_{b_1 b_2}^{n_2} \dots M_{c_1}^{n_3} M_{c_1 c_2}^{n_3} \dots$$

Hierin denken wir uns in jedem Summanden die Doppelfolge der Faktoren, etwa nach Diagonalen (§ 1, 6), in eine einfache Folge geordnet:

$$(2) \quad C = \bigcup_{\nu, \alpha, \beta, \gamma, \dots} M_{a_1}^{n_1} M_{a_1 a_2}^{n_1} M_{b_1}^{n_2} M_{a_1 a_2 a_3}^{n_1} M_{b_1 b_2}^{n_2} M_{c_1}^{n_3} \dots$$

Nun machen wir die Mengen  $M_{a_1}^{n_1}$  ( $n_1, a_1 = 1, 2, \dots$ ), indem wir sie irgendwie in eine Folge  $M_1, M_2, \dots$  ordnen, zu den Mengen erster Stufe eines Suslinschen Schemas; die Mengen  $M_{a_1 a_2}^{n_1}$  machen wir zu den Mengen zweiter Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß die Mengen  $M_{a_1 a_2}^{n_1}$  ( $a_2 = 1, 2, \dots$ ) den auf  $M_{a_1}^{n_1}$  folgenden Abschnitt zweiter Stufe bilden; die Mengen  $M_{b_1}^{n_2}$  machen wir zu den Mengen dritter Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß jeder auf  $M_{a_1}^{n_1}$  folgende Abschnitt dritter Stufe aus den (irgendwie in eine

einfache Folge geordneten) Mengen  $M_{b_1}^{n_1 n_2}$  ( $n_2, b_1 = 1, 2, \dots$ ) besteht; die Mengen  $M_{a_1 a_2 a_3}^{n_1}$  machen wir zu den Mengen vierter Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß jeder auf  $M_{a_1 a_2}^{n_1}$  folgende Abschnitt vierter Stufe aus den Mengen  $M_{a_1 a_2 a_3}^{n_1}$  ( $a_3 = 1, 2, \dots$ ) besteht; die Mengen  $M_{b_1}^{n_1 n_2}$  werden die Mengen fünfter, die Mengen  $M_{c_1}^{n_1 n_2 n_3}$  werden die Mengen sechster Stufe dieses Schemas, und zwar so, daß jeder auf  $M_{b_1}^{n_1 n_2}$  folgende Abschnitt fünfter Stufe aus den Mengen  $M_{b_1 b_2}^{n_1 n_2}$  ( $b_2 = 1, 2, \dots$ ), jeder auf  $M_{b_1 b_2}^{n_1 n_2}$  folgende Abschnitt sechster Stufe aus den (in eine Folge geordneten) Mengen  $M_{c_1}^{n_1 n_2 n_3}$  ( $n_3, c_1 = 1, 2, \dots$ ) besteht usf. Bezeichnen wir die Mengen  $k$ -ter Stufe des so entstehenden Suslinschen Schemas mit  $M_{p_1 p_2 \dots p_k}$ , so hat offenbar jeder Summand aus (2) die Gestalt:

$$(2.1) \quad M_\pi = M_{p_1} \cdot M_{p_1 p_2} \cdot \dots \cdot M_{p_1 p_2 \dots p_k} \cdot \dots,$$

und umgekehrt tritt jede Menge  $M_\pi$  der Gestalt (2.1) in (2) als Summand auf; es ist also  $C = \sum_{\pi} M_\pi$ , wo  $\pi = ((p_k))$  alle Folgen natürlicher Zahlen durchläuft; also ist, da  $M_{p_1}, M_{p_1 p_2}, \dots, M_{p_1 p_2 \dots p_k}, \dots$  Mengen aus  $\mathfrak{M}$  sind:  $C \in \mathfrak{M}_A$ , w. z. b. w.

Ist  $\mathfrak{M}_A = \mathfrak{M}$ , so nennen wir  $\mathfrak{M}$  ein Suslinsches Mengensystem. Dann gilt:

**40-2-21.**  $\mathfrak{M}_A$  ist das kleinste Suslinsche Mengensystem über  $\mathfrak{M}$ .

Sei  $\mathfrak{N}$  ein Suslinsches System über  $\mathfrak{M}$ , d. h. es sei  $\mathfrak{N}_A = \mathfrak{N}$  und  $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}$ ; dann ist auch  $\mathfrak{N}_A \supseteq \mathfrak{M}_A$ , also  $\mathfrak{N} \supseteq \mathfrak{M}_A$ . Und da nach 40-2-1, 40-2-2  $\mathfrak{M}_A$  ein Suslinsches System über  $\mathfrak{M}$  ist, so ist die Behauptung bewiesen.

**40-2-3.** Es ist  $\mathfrak{M}_\sigma \subseteq \mathfrak{M}_A$ .

Sei  $B \in \mathfrak{M}_\sigma$ ; dann ist  $B = \sum_n B_n$ , wo  $B_n \in \mathfrak{M}$ . Setzen wir  $M_{n_1} = M_{n_1 n_2} = \dots = M_{n_1 n_2 \dots n_k} = \dots = B_{n_1}$ , so entsteht ein Suslinsches Schema  $\mathfrak{C}$  in  $\mathfrak{M}$ , für das  $A(\mathfrak{C}) = B$ .

**40-2-31.** Es ist  $\mathfrak{M}_\delta \subseteq \mathfrak{M}_A$ .

Sei  $B \in \mathfrak{M}_\delta$ ; dann ist  $B = \bigcap_k B_k$ , wo  $B_k \in \mathfrak{M}$ . Setzen wir  $M_{n_1 n_2 \dots n_k} = B_k$  ( $n_1, n_2, \dots, n_k = 1, 2, \dots$ ), so entsteht ein Suslinsches Schema  $\mathfrak{C}$  in  $\mathfrak{M}$ , für das  $A(\mathfrak{C}) = B$ .

**40-2-4.**  $\mathfrak{M}_A$  ist sowohl ein  $\sigma$ - als auch ein  $\delta$ -System, und mithin ein Ring.

Denn nach 40-2-3, 40-2-2 gilt:  $\mathfrak{M}_A \subseteq (\mathfrak{M}_A)_\sigma \subseteq (\mathfrak{M}_A)_A = \mathfrak{M}_A$ , also  $(\mathfrak{M}_A)_\sigma = \mathfrak{M}_A$ ; und ebenso zeigt man:  $(\mathfrak{M}_A)_\delta = \mathfrak{M}_A$ .

Für das System  $\mathfrak{M}_B$  der Borelschen Mengen über  $\mathfrak{M}$  (§ 33, 1) gilt:

**40-2-41.** Es ist  $\mathfrak{M}_B \subseteq \mathfrak{M}_A$ .

Nach 40-2-1, 40-2-4 ist  $\mathfrak{M}_A$  ein Mengensystem über  $\mathfrak{M}$ , das sowohl  $\sigma$ -System als  $\delta$ -System ist; die Behauptung folgt also aus 33-1-52.

Literatur: Zu 40-2-2 vgl. F. Hausdorff, Mengenlehre S. 92.

**3. Die analytischen Mengen eines metrischen Raumes.** Sei nun insbesondere  $E$  ein metrischer Raum,  $\mathfrak{F}$  das System der in  $E$  abgeschlossenen,  $\mathfrak{G}$  das System der in  $E$  offenen Mengen. Dann ist:

$$(3) \quad \mathfrak{F}_A \subseteq (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A, \quad \mathfrak{G}_A \subseteq (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A.$$

Andererseits ist  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_\sigma$ ,  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}_\delta$ , also nach 40-2-3, 40-2-31:  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{F}_A$ ,  $\mathfrak{F} + \mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{G}_A$ , also auch  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteq (\mathfrak{F}_A)_A$ ,  $(\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteq (\mathfrak{G}_A)_A$ , und daher nach 40-2-2:

$$(3-1) \quad (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteq \mathfrak{F}_A, \quad (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A \subseteq \mathfrak{G}_A.$$

Aus (3), (3-1) folgt:

$$(3-2) \quad \mathfrak{F}_A = \mathfrak{G}_A = (\mathfrak{F} + \mathfrak{G})_A.$$

Wir bezeichnen die Mengen des Systems (3-2) als die analytischen Mengen in  $E$ . Das System (3-2) aller analytischen Mengen in  $E$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{A}(E)$ .

**40-3-1.** Ist  $\mathfrak{P}$  ein die in  $E$  abgeschlossenen (bzw. offenen) Mengen enthaltendes System analytischer Mengen in  $E$ , so ist  $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{A}(E)$ .

Wir setzen abkürzend  $\mathfrak{A}(E) = \mathfrak{A}$ . Nach Annahme ist  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{A}$ , also auch  $\mathfrak{F}_A \subseteq \mathfrak{P}_A \subseteq \mathfrak{A}_A$ ; hierin ist  $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{A}$  und nach 40-2-2 auch  $\mathfrak{A}_A = \mathfrak{A}$ ; also folgt daraus  $\mathfrak{P}_A = \mathfrak{A}$ .

**40-3-2.** Ist  $E$  separabel und  $\mathfrak{H}$  ein abzählbares, ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen, so ist  $\mathfrak{H}_A = \mathfrak{A}(E)$ .

Da wegen  $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$  auch  $\mathfrak{H}_A \subseteq \mathfrak{G}_A$ , d. h.  $\mathfrak{H}_A \subseteq \mathfrak{A}$  ist, ist nur zu zeigen:  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}_A$ . Nach 13-1-1 ist  $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}_\sigma$ , also nach 40-2-3  $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{H}_A$ , also  $\mathfrak{G}_A \subseteq (\mathfrak{H}_A)_A$ , d. h. nach 40-2-2:  $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{H}_A$ , w. z. b. w.

Ist  $\mathfrak{B}(E)$  das System der Borelschen Mengen in  $E$  (§ 33, 4), so gilt:

**40-3-3.** Es ist  $\mathfrak{B}(E) \subseteq \mathfrak{A}(E)$ .

Dies folgt wegen § 33 (4-41) aus 40-2-41.

**40-3-4.** Ist  $E$  ein separabler unendlicher Raum, so hat das System  $\mathfrak{A}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Sei  $\alpha$  die Mächtigkeit des Systemes  $\mathfrak{A}(E)$ . Da  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{A}(E)$ , und da nach 13-2-51  $\mathfrak{F}$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, ist  $\alpha \geq \aleph$ . Es ist also nur zu zeigen:  $\alpha \leq \aleph$ . Da nach 5-1-21 die Menge aller endlichen Komplexe  $(n_1, n_2, \dots, n_k)$  natürlicher Zahlen die Mächtigkeit  $\aleph_0$  hat, können die Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  eines Suslinschen Schemas in eine Folge geordnet werden; und da nach 13-2-51 das System  $\mathfrak{F}$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, gibt es nach 5-2-43 in  $\mathfrak{F}$   $\aleph$  Suslinsche Schemata. Also gibt es höchstens  $\aleph$  analytische Mengen über  $\mathfrak{F}$ ; und da  $\mathfrak{F}_A = \mathfrak{A}(E)$ , ist  $\alpha \leq \aleph$ , w. z. b. w.

**40-3-41.** Ist  $E$  ein separabler unendlicher Raum, so hat das System  $\mathfrak{B}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Sei  $b$  die Mächtigkeit des Systemes  $\mathfrak{B}(E)$ . Da  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{B}(E)$ , und da nach 13-2-51  $\mathfrak{F}$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, ist  $b \geq \aleph$ . Da nach 40-3-3  $\mathfrak{B}(E) \subseteq \mathfrak{A}(E)$ , und da nach 40-3-4  $\mathfrak{A}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, ist auch  $b \leq \aleph$ .

Für das System  $\mathfrak{C}(E)$  der Baireschen Funktionen auf  $E$  gilt:

**40-3-42.** *Ist  $E$  ein separabler unendlicher Raum, so hat das System  $\mathfrak{C}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .*

Sei  $c$  die Mächtigkeit von  $\mathfrak{C}(E)$ . Da die charakteristische Funktion einer Borelschen Menge nach 35-2-42 eine Bairesche Funktion ist, und da nach 40-3-41 das System  $\mathfrak{B}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, ist  $c \geq \aleph$ . Es ist also nur zu zeigen:  $c \leq \aleph$ . Sei  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die Menge der rationalen Zahlen. Nach 30-1-31 ist eine Funktion  $f$  auf  $E$  völlig bestimmt durch die Mengen  $[f(x) < r_n]$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Ist  $f$  eine Bairesche Funktion, so sind nach 35-2-3 diese Mengen Borelsche Mengen; also ist eine Bairesche Funktion auf  $E$  völlig bestimmt durch eine Folge Borelscher Mengen in  $E$ . Da nach 40-3-41 das System  $\mathfrak{B}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, so hat nach 5-2-43 auch die Menge aller Folgen aus  $\mathfrak{B}(E)$  die Mächtigkeit  $\aleph$ , also ist  $c \leq \aleph$ , w. z. b. w.

Wir nennen das aus Punktmengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  des metrischen Raumes  $E$  bestehende Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}$  regulär in  $E$ , wenn es folgende Eigenschaften hat:

1. Es ist monoton (§ 40, 1).
2. Jede Menge  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ist abgeschlossen in  $E$ .
3. Bedeutet  $d_k$  das Supremum der Durchmesser der Mengen  $k$ -ter Stufe von  $\mathfrak{S}$ , so gilt  $d_k \rightarrow 0$ .

Ist  $\mathfrak{S}$  ein reguläres Suslinsches Schema und  $\nu$  die Folge  $((n_k))$  natürlicher Zahlen, so ist der Durchschnitt  $M_\nu = M_{n_1} M_{n_2} \dots M_{n_{n_1}} \dots$  entweder leer, oder er besteht aus einem einzigen Punkte  $a$ , den wir als den Punkt  $a_\nu$  bezeichnen.

**40-3-5.** *Ist  $E$  separabel, so ist jede analytische Menge in  $E$  Kern eines regulären Suslinschen Schemas in  $E$ .*

Da jede analytische Menge in  $E$  Kern eines aus in  $E$  abgeschlossenen Mengen bestehenden Suslinschen Schemas ist, ist nur zu zeigen: Jedes aus in  $E$  abgeschlossenen Mengen bestehende Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}$  kann ersetzt werden durch ein in  $E$  reguläres Schema  $\mathfrak{S}^*$  von gleichem Kerne. — Sei  $F$  eine in  $E$  abgeschlossene Menge, und sei  $\rho > 0$  beliebig gegeben. Zu jedem  $a \in F$  bilden wir die abgeschlossene Kugel  $\bar{K}_{a, \frac{\rho}{2}}$  (§ 10, 2); nach 13-3-1 gibt es im System der abgeschlossenen Mengen  $F \bar{K}_{a, \frac{\rho}{2}}$  ein  $F$  überdeckendes abzählbares Teilsystem; also ist  $F$  Summe abzählbar vieler in  $E$  abgeschlos-

sener Mengen von einem Durchmesser  $\leq \varrho$ . Jede Menge  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$   $k$ -ter Stufe aus  $\mathfrak{S}$  ist also in der Form darstellbar:  $F_{n_1 n_2 \dots n_k} = \bigcup_n F_{n_1 n_2 \dots n_k}^n$ , wo  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}^n$  abgeschlossen in  $E$  und  $d(F_{n_1 n_2 \dots n_k}^n) \leq \frac{1}{k}$ . Wir bilden nun aus den Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}^n$  ein Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}'$  in folgender Weise: die (in eine Folge geordneten) Mengen  $F_{n_1}^n$  ( $n_1, n = 1, 2, \dots$ ) seien die Mengen erster Stufe von  $\mathfrak{S}'$ ; der auf  $F_{n_1}^n$  folgende Abschnitt zweiter Stufe von  $\mathfrak{S}'$  bestehe aus den Mengen  $F_{n_1 n_2}^{\nu}$  ( $n_2, \nu = 1, 2, \dots$ ); der auf die Menge  $F_{n_1 n_2}^{\nu}$  folgende Abschnitt dritter Stufe von  $\mathfrak{S}'$  bestehe aus den Mengen  $F_{n_1 n_2 n_3}^{\nu}$  ( $n_3, \nu = 1, 2, \dots$ ) usw. Dann haben die Schemata  $\mathfrak{S}$  und  $\mathfrak{S}'$  denselben Kern, und das Schema  $\mathfrak{S}'$  hat die Eigenschaften 2. und 3. eines regulären Schemas. Verwandeln wir, wie beim Beweise von 40-1-2, das Schema  $\mathfrak{S}'$  in ein monotonen Schema von gleichem Kerne, so entsteht das gewünschte reguläre Schema  $\mathfrak{S}^*$ .

**4. Absolut analytische Mengen.** Sei  $E$  eine ganz beliebige Menge,  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen von  $E$ . Wir machen wieder Gebrauch von der in § 32, 3 eingeführten Bezeichnungsweise. In Analogie zu 33-3-2 gilt:

**40-4-1.** Ist  $E' \subseteq E$ , so ist  $(E' \mid \mathfrak{M})_A = E' \mid \mathfrak{M}_A$ .

Dies folgt unmittelbar aus 40-1-6.

Ist insbesondere  $E$  ein metrischer Raum, so gilt in Analogie zu 33-4-7:

**40-4-11.** Ist  $E' \subseteq E$ , so ist  $\mathfrak{A}(E') = E' \mid \mathfrak{A}(E)$ .

Denn ist  $\mathfrak{F}$ , bzw.  $\mathfrak{F}'$  das System der in  $E$ , bzw. in  $E'$  abgeschlossenen Mengen, so ist nach 10-8-1:  $\mathfrak{F}' = E' \mid \mathfrak{F}$ . Da  $\mathfrak{A}(E) = \mathfrak{F}_A$ ,  $\mathfrak{A}(E') = \mathfrak{F}'_A$ , folgt die Behauptung aus 40-4-1.

**40-4-2.** Ist  $A \subseteq E' \subseteq E$  und  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ , so ist auch  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E')$ .

Dies folgt unmittelbar aus 40-4-11.

**40-4-21.** Ist  $A \subseteq E' \subseteq E$  und  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E')$ ,  $E' \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ , so ist auch  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ .

Nach 40-4-11 ist  $A = E' \mid A'$  mit  $A' \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ ; da auch  $E' \varepsilon \mathfrak{A}(E)$  und  $\mathfrak{A}(E)$  nach 40-2-4 ein Ring, ist auch  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ .

Läßt man in 40-4-21 die Voraussetzung  $E' \varepsilon \mathfrak{A}(E)$  weg, so kann nicht mehr geschlossen werden, daß  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ ; wohl aber gilt:

**40-4-3.** Ist  $E'$  vollständig,  $A \subseteq E'$ ,  $A \subseteq E$  und  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E')$ , so ist auch  $A \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ .

Der Beweis ist analog dem von 33-5-1.

Nach 40-4-3 ist jede in einem vollständigen Raum  $E'$  analytische Menge auch analytisch in jedem Raume  $E \supseteq A$ ; wir nennen deshalb eine solche Menge eine absolut analytische Menge.

**40-4-31.** Ist  $A$  analytisch in  $A'$  und ist  $A'$  absolut analytisch, so ist auch  $A$  absolut analytisch.

Dies folgt unmittelbar aus 40-4-21.

**40-4-4.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein aus absolut analytischen Mengen  $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bestehendes Suslinsches Schema in  $E$ , so ist auch der Kern  $A(\mathfrak{S})$  absolut analytisch.

Nach 18-4-6 gibt es einen vollständigen Raum  $E^* \supseteq E$ ; sei  $\mathfrak{F}$  das System der in  $E^*$  abgeschlossenen Mengen. Da  $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$  absolut analytisch, ist  $A_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{A}(E^*)$ , d. h.  $A_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{F}_A$ ; also ist  $A(\mathfrak{S}) \in (\mathfrak{F}_A)_A$ , mithin nach 40-2-2:  $A(\mathfrak{S}) \in \mathfrak{F}_A$ , d. h.  $A(\mathfrak{S}) \in \mathfrak{A}(E^*)$ ; und da  $E^*$  vollständig, ist  $A(\mathfrak{S})$  absolut analytisch.

Literatur: F. Hausdorff, Mengenlehre S. 179.

**5. Abbildungssätze.** Seien  $A$  und  $B$  metrische Räume. In Analogie zu 33-6-1 gilt:

**40-5-1.** Ist  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$  und ist  $C$  eine analytische Menge in  $B$ , so ist  $P^{-1}(C)$  eine analytische Menge in  $A$ .

In der Tat,  $C$  ist der Kern eines Suslinschen Schemas in  $B$  abgeschlossener Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ . Daher ist nach 2-1-3 und § 2 (1-9)  $P^{-1}(C)$  Kern des aus den Mengen  $P^{-1}(F_{n_1 n_2 \dots n_k})$  bestehenden Suslinschen Schemas, und nach 23-2-11 sind die Mengen  $P^{-1}(F_{n_1 n_2 \dots n_k})$  abgeschlossen in  $A$ .

**40-5-2.** Ist  $Q$  eine homöomorphe Abbildung von  $B$  auf  $A$ , und ist  $M$  eine analytische Menge in  $B$ , so ist  $Q(M)$  eine analytische Menge in  $A$ .

Dies folgt aus 40-5-1 für  $P = Q^{-1}$ .

**40-5-21.** Jede mit einer absolut analytischen Menge homöomorphe Menge ist absolut analytisch.

Der Beweis ist analog dem von 33-6-3.

Sei  $\mathfrak{S}$  ein aus den Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bestehendes Suslinsches Schema; ist  $\nu$  eine Folge  $((n_k))$  natürlicher Zahlen, so setzen wir:  $M_\nu = M_{n_1} \cdot M_{n_2} \cdot \dots \cdot M_{n_k} \cdot \dots$ ; die Menge aller  $\nu \in R_0$ , für die  $M_\nu \supset A$  ist, nennen wir die dem Schema  $\mathfrak{S}$  entsprechende Menge des  $R_0$ .

**40-5-3.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein reguläres Suslinsches Schema im vollständigen Raume  $E$ , so ist die dem Schema  $\mathfrak{S}$  entsprechende Menge  $C$  des  $R_0$  abgeschlossen.

Sei  $\bar{\nu} \in R_0 - C$  und  $\bar{\nu} = ((\bar{n}_k))$ ; da  $M_{\bar{\nu}} = A$ , und da nach 18-5-11 alle  $M_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \dots \bar{n}_k}$  vollständig sind, ist nach 18-6-1 eine der Mengen  $M_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \dots \bar{n}_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) leer, etwa  $M_{\bar{n}_1 \bar{n}_2 \dots \bar{n}_{k_0}}$ ; dann aber ist  $M_\nu = A$  (und mithin  $\nu \in R_0 - C$ ) für alle mit  $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_{k_0}$  beginnenden Folgen  $\nu$ ; da diese Folgen nach § 33 (8) eine offene Menge des  $R_0$  bilden, ist  $R_0 - C$  offen, also  $C$  abgeschlossen.

**40-5-31.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein reguläres Suslinsches Schema in  $E$ , so ist der Kern  $A$  von  $\mathfrak{S}$  eindeutiges stetiges Bild der dem Schema  $\mathfrak{S}$  entsprechenden Menge  $C$  des  $R_0$ .

Sei  $\nu \in C$ ; ist  $\nu$  die Folge  $((n_k))$ , so ist die Menge  $M_\nu = M_{n_1} M_{n_2} \dots M_{n_{n_1} \dots n_k} \dots$  nicht leer, besteht somit, da  $\mathfrak{S}$  regulär, aus einem einzigen Punkte  $a_\nu$ . Wir setzen  $P(\nu) = a_\nu$ . Durchläuft  $\nu$  die Menge  $C$ , so durchläuft  $a_\nu$  die Menge  $A$ . Es ist nur mehr zu zeigen, daß die Abbildung  $P$  von  $C$  auf  $A$  stetig ist. Sei  $((\nu_i))$  eine Punktfolge aus  $C$  mit  $\nu_i \rightarrow \nu$ ; ist  $\nu_i$  die Folge  $((n_k^i))$  natürlicher Zahlen, so gibt es nach 17-3-7 zu jedem  $k$  ein  $i_k$ , so daß  $n_1^i = n_1$ ,  $n_2^i = n_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k^i = n_k$  für  $i \geq i_k$ ; also ist  $a_{\nu_i} \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  für  $i \geq i_k$ ; und da auch  $a_\nu \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  und da  $d(M_{n_1 n_2 \dots n_k}) \rightarrow 0$ , gilt  $a_{\nu_i} \rightarrow a_\nu$ ; also ist die Abbildung  $P$  stetig.

**40-5-32.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein reguläres Suslinsches Schema im vollständigen Raume  $E$ , dessen Kern  $A \supset \Lambda$  ist, so ist  $A$  eindeutiges stetiges Bild des  $R_0$ .

Wir können ohne weiteres annehmen, daß  $A M_{n_1} \supset \Lambda$  für alle Mengen erster Stufe  $M_{n_1}$  des Schemas  $\mathfrak{S}$ ; denn ist  $A M_{n_1}^* = \Lambda$ ,  $A M_{n_1}^{**} \supset \Lambda$ , so können wir, ohne den Kern von  $\mathfrak{S}$  zu ändern, jede Menge  $M_{n_1}^* n_2 \dots n_k$  ersetzen durch  $M_{n_1}^{**} n_2 \dots n_k$ . In jeder Menge  $A M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , die  $\supset \Lambda$  ist, wählen wir einen Punkt  $a_{n_1 n_2 \dots n_k}$  aus. Sei wieder  $C$  die dem Schema  $\mathfrak{S}$  entsprechende Menge des  $R_0$  und  $P$  die im Beweise von 40-5-31 angegebene Abbildung von  $C$  auf  $A$ . Wir erweitern sie zu einer Abbildung  $Q$  des  $R_0$  auf  $A$ , indem wir setzen:  $Q(\nu) = P(\nu)$  für  $\nu \in C$ , während  $Q(\nu)$  für  $\nu \in R_0 - C$  in folgender Weise definiert wird: ist  $\nu \in R_0 - C$  und  $\nu = ((n_k))$ , so gibt es nach 18-6-1 in der Folge der Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) eine leere; und da diese Folge monoton abnimmt, und da nach Annahme  $A M_{n_1} \supset \Lambda$  ist, gibt es in der Folge der Mengen  $A M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) eine letzte, die  $\supset \Lambda$  ist; ist dies die Menge  $A M_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}}$ , so setzen wir:  $Q(\nu) = a_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}}$ . Die so definierte Abbildung  $Q$  des  $R_0$  auf  $A$  hat offenbar folgende Eigenschaft: ist  $\nu = ((n_k))$  und ist  $A M_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset \Lambda$ , so ist  $Q(\nu) \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ . — Es ist noch zu zeigen, daß  $Q$  stetig ist, d. h. wir haben zu zeigen: sind  $\nu = ((n_k))$  und  $\nu_i = ((n_k^i))$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) Punkte des  $R_0$  und gilt  $\nu_i \rightarrow \nu$ , so auch  $Q(\nu_i) \rightarrow Q(\nu)$ . — Sei zunächst  $\nu \in C$ ; nach 17-3-7 gibt es ein  $i_k$ , so daß  $n_1^i = n_1$ ,  $n_2^i = n_2$ ,  $\dots$ ,  $n_k^i = n_k$  für  $i \geq i_k$ ; wegen  $\nu \in C$  ist  $A M_{n_1 n_2 \dots n_k} \supset \Lambda$  für alle  $k$ ; also ist, wie vorhin bemerkt:  $Q(\nu) \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ,  $Q(\nu_i) \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  für  $i \geq i_k$ ; wegen  $d(M_{n_1 n_2 \dots n_k}) \rightarrow 0$  folgt daraus  $Q(\nu_i) \rightarrow Q(\nu)$ . — Sei sodann  $\nu \in R_0 - C$ ; ist dann  $A M_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}}$  die letzte unter den Mengen  $A M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), die  $\supset \Lambda$  ist, so ist  $Q(\nu) = a_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}}$ ; für  $i \geq i_{k^*+1}$  ist dann  $A M_{n_1^i n_2^i \dots n_k^i} = A M_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}}$

$\supset A$  wenn  $k \leq k^*$ , und  $A M_{n_1 n_2 \dots n_{k^*+1}} = A M_{n_1 n_2 \dots n_{k^*+1}} = A$ ; also ist  $A M_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}}$  die letzte unter den Mengen  $A M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ), die  $\supset A$  ist, mithin  $Q(v_i) = a_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}} = a_{n_1 n_2 \dots n_{k^*}} = Q(v)$  für  $i \geq k^*+1$ ; also gilt wieder  $Q(v_i) \rightarrow Q(v)$ .

**40-5-4.** Damit die Menge  $A \supset A$  eindeutiges stetiges Bild des  $R_0$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie separabel und absolut analytisch sei.

Notwendig: Sei  $P$  eine stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $A$ . Da der  $R_0$  nach 18-1-322 separabel, so ist dann nach 23-1-31 auch  $A$  separabel. Nach 18-4-6 können wir annehmen,  $A$  sei Punktmenge eines vollständigen Raumes  $E$ . Wir bezeichnen mit  $R_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die Menge aller mit  $n_1, n_2, \dots, n_k$  beginnenden Folgen  $((n_i))$  natürlicher Zahlen, und mit  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die abgeschlossene Hülle in  $E$  von  $P(R_{n_1 n_2 \dots n_k})$ . Sei  $\mathfrak{S}$  das Suslinsche Schema der Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ; es genügt, zu zeigen, daß  $A = A(\mathfrak{S})$ , denn dann ist  $A$  eine analytische Menge in  $E$ , also, da  $E$  vollständig, absolut analytisch. — Sei  $v = ((n_k))$ ,  $M_v = M_{n_1} M_{n_2} \dots M_{n_k} \dots$ ; da  $A(\mathfrak{S}) = \bigcup M_v$ , wo sich die Summation über alle Folgen  $v$  natürlicher Zahlen erstreckt, genügt es weiter, zu zeigen, daß  $M_v = \{P(v)\}$ . Da  $v \in R_{n_1 n_2 \dots n_k}$  für alle  $k$ , ist  $P(v) \in P(R_{n_1 n_2 \dots n_k})$ , also auch  $P(v) \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  für alle  $k$ , und somit  $P(v) \in M_v$ . Nun ist nur mehr zu zeigen, daß  $P(v)$  der einzige Punkt von  $M_v$ . Sei  $a \in M_v$ , also  $a \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  für alle  $k$ ; da  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die abgeschlossene Hülle von  $P(R_{n_1 n_2 \dots n_k})$ , gibt es ein  $a_k \in P(R_{n_1 n_2 \dots n_k})$ , so daß  $a_k a < \frac{1}{k}$ ; dann gibt es ein  $v_k \in R_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , so daß  $a_k = P(v_k)$ ; dann gilt  $v_k \rightarrow v$ , und wegen der Stetigkeit von  $P$  auch  $P(v_k) \rightarrow P(v)$ , d. h.  $a_k \rightarrow P(v)$ ; wegen  $a_k a < \frac{1}{k}$  ist also  $a = P(v)$ , w. z. b. w. Hinreichend: Sei  $A$  separabel und absolut analytisch; nach 18-4-61 gibt es einen separablen vollständigen Raum  $E \supseteq A$ ; da  $A$  eine analytische Menge in  $E$ , ist  $A$  nach 40-3-5 Kern eines regulären Suslinschen Schemas in  $E$ , also nach 40-5-32 stetiges Bild des  $R_0$ .

**40-5-5.** Ist  $B$  eindeutiges stetiges Bild der separablen, absolut analytischen Menge  $A$ , so ist auch  $B$  separabel und absolut analytisch.

Nach Annahme gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $Q$  von  $A$  auf  $B$ ; nach 40-5-4 gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $A$ ; dann ist nach 23-1-4  $P|Q$  eine eindeutige stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $B$ , also ist  $B$  nach 40-5-4 separabel und absolut analytisch.

Literatur: W. Sierpiński, Bull. Crac. 1918 S. 161. N. Lusin, Leq. s. l. ensembles analytiques (Paris 1930) S. 135ff.



**6. Projektion.** Wir betrachten nun einen Produktraum  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ . Es gilt:

**40-6-1.** Ist  $A$  eine separable, absolut analytische Menge des Raumes  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist auch die Projektion von  $A$  in den Raum  $E^{(1)}$  separabel und absolut analytisch.

Dies folgt aus 23-6-1 und 40-5-5.

**40-6-11.** Ist  $E^{(1)}$  separabel,  $E^{(2)}$  separabel und vollständig und  $A$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist die Projektion  $B$  von  $A$  in den Raum  $E^{(1)}$  eine analytische Menge in  $E^{(1)}$ .

Nach 18-4-61 gibt es einen separablen, vollständigen Raum  $E \supseteq E^{(1)}$ . Nach 40-4-11 ist  $A = A' \cdot (E^{(1)} \times E^{(2)})$ , wo  $A'$  eine analytische Menge in  $E \times E^{(2)}$ . Nach 20-2-4 und 20-2-7 ist der Raum  $E \times E^{(2)}$  separabel und vollständig; also ist  $A'$  eine separable, absolut analytische Menge; nach 40-6-1 ist also auch die Projektion  $B'$  von  $A'$  in den Raum  $E$  absolut analytisch. Da  $B = E^{(1)} B'$ , ist also nach 40-4-11  $B$  eine analytische Menge in  $E^{(1)}$ .

**40-6-2.** Jede im separablen Raume  $E$  analytische Menge  $A$  ist die Projektion in den Raum  $E$  einer in  $E \times R_0$  abgeschlossenen Menge.

Nach 18-4-61 gibt es einen separablen, vollständigen Raum  $\bar{E} \supseteq E$ . Nach 40-4-11 ist  $A = \bar{A} \cdot E$ , wo  $\bar{A}$  eine analytische Menge in  $\bar{E}$ . Es genügt, zu zeigen, daß  $\bar{A}$  die Projektion in den Raum  $E$  einer in  $E \times R_0$  abgeschlossenen Menge  $\bar{B}$  ist; denn dann ist die Menge  $B = \bar{B} \cdot (E \times R_0)$  abgeschlossen in  $E \times R_0$ , und  $A$  ist die Projektion in den Raum  $E$  von  $B$ . — Da  $\bar{A}$  separabel und absolut analytisch, gibt es nach 40-5-4 eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $\bar{A}$ . Wir bilden zu jedem  $v \in R_0$  den Punkt  $(P(v), v) \in \bar{E} \times R_0$ ; ist  $\bar{B}$  die Menge aller dieser Punkte, so ist  $\bar{A}$  die Projektion von  $\bar{B}$  in den Raum  $\bar{E}$ , und nach 35-9-4 ist  $\bar{B}$  abgeschlossen in  $\bar{E} \times R_0$ .

**40-6-3.** Jede im separablen Raume  $E$  analytische Menge  $A$  ist die Projektion in den Raum  $E$  einer  $G_\delta$ -Menge in  $E \times R_1$ .

Nach 24-2-2 gibt es eine homöomorphe Abbildung  $Q$  des  $R_0$  auf die Menge  $I$  der irrationalen Punkte des  $R_1$ ; ordnen wir jedem Punkte  $(a, v) \in E \times R_0$  den Punkt  $(a, Q(v)) \in E \times R_1$  zu, so entsteht eine homöomorphe Abbildung  $Q'$  von  $E \times R_0$  auf  $E \times I$ . Nach 40-6-2 gibt es eine in  $E \times R_0$  abgeschlossene Menge  $B$ , deren Projektion in den Raum  $E$  die Menge  $A$  ist; nach 24-1-2 wird  $B$  durch  $Q'$  übergeführt in eine in  $E \times I$  abgeschlossene Menge  $B'$ , deren Projektion in den Raum  $E$  offenbar wieder die Menge  $A$  ist. Da  $I$  ein  $G_\delta$  im  $R_1$ , ist nach 20-2-13  $E \times I$  ein  $G_\delta$  in  $E \times R_1$ ; und da  $B'$  abgeschlossen, also ein  $G_\delta$  in  $E \times I$ , ist nach 18-9-2  $B'$  ein  $G_\delta$  in  $E \times R_1$ .

Nach 40-6-3 ist jede analytische Menge des  $R_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) die Projektion einer  $G_\delta$ -Menge des  $R_{k+1}$ . Da es, wie wir in 40-9-2 sehen werden, im  $R_k$  analytische Mengen gibt, die nicht Borelsche Mengen sind, so sehen wir hieraus, daß die Projektion einer Borelschen Menge des  $R_{k+1}$  in den  $R_k$  nicht notwendig eine Borelsche Menge des  $R_k$  ist.

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88. W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 155.

**7. Analytische Mengen in Produkträumen.** In Analogie zu 33-7-1 gilt:

**40-7-1.** Ist  $A$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist jede Schicht  $A_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) eine analytische Menge in  $E^{(1)}$ .

Sei  $A$  Kern des Suslinschen Schemas der in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  abgeschlossenen Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Die Schichten  $(M_{n_1, n_2, \dots, n_k})_b^{(1)}$  bilden nach 20-4-1 ein Suslinsches Schema in  $E^{(1)}$  abgeschlossener Mengen, dessen Kern offenbar  $A_b^{(1)}$  ist.

**40-7-2.** Ist  $A_1$  eine analytische Menge in  $E^{(1)}$ ,  $A_2$  eine analytische Menge in  $E^{(2)}$ , so ist  $A_1 \times A_2$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ .

Sei  $A_1$  Kern des Suslinschen Schemas der in  $E^{(1)}$  abgeschlossenen Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ; die Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \times E^{(2)}$  bilden dann nach 20-2-1 ein Suslinsches Schema in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  abgeschlossener Mengen, dessen Kern offenbar  $A_1 \times E^{(2)}$  ist; also ist  $A_1 \times E^{(2)}$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ . Ebenso sieht man, daß  $E^{(1)} \times A_2$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  ist. Da  $A_1 \times A_2 = (A_1 \times E^{(2)}) \cdot (E^{(1)} \times A_2)$ , ist nach 40-2-4 auch  $A_1 \times A_2$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ .

**40-7-21.** Ist  $A_1 \times A_2 \supset A$  und ist  $A_1 \times A_2$  eine analytische Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist  $A_1$  eine analytische Menge in  $E^{(1)}$  und  $A_2$  eine analytische Menge in  $E^{(2)}$ .

Der Beweis ist analog dem von 33-7-21.

**40-7-3.** Sind  $A$  und  $B$  absolut analytische Mengen, so ist auch  $A \times B$  eine absolut analytische Menge.

Der Beweis ist analog dem von 33-7-3.

Als Anwendung von 40-7-2 beweisen wir noch:

**40-7-4.** Sind  $A$  und  $B$  analytische Mengen des  $R_1$ , so ist auch die Menge  $C$  aller Zahlen  $a + b$  ( $a \in A$ ,  $b \in B$ ) eine analytische Menge des  $R_1$ .

Setzen wir  $D = A \times B$ , so ist  $D$  die Menge aller Punkte  $(x, y) \in R_2$  mit  $x \in A$ ,  $y \in B$ , und nach 40-7-2 ist  $D$  eine analytische Menge des  $R_2$ . Ordnen wir jedem Punkte  $(a, b) \in D$  den Punkt  $a + b \in C$  zu, so haben wir eine eindeutige stetige Abbildung von  $D$  auf  $C$ , also ist nach 40-5-5  $C$  eine analytische Menge des  $R_1$ .

8. **Universalmengen.** In Analogie zu 33-8-3 beweisen wir:

**40-8-1.** Ist  $E$  ein separabler Raum, so gibt es eine analytische Menge  $G$  in  $E \times R_0$ , unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  ( $a \in R_0$ ) alle analytischen Mengen in  $E$  vorkommen.

Wir setzen  $E^{(1)} = E \times R_0$ ,  $E^{(2)} = R_0$ . Da nach 20-2-4  $E^{(1)}$  separabel ist, gibt es nach 33-8-2 eine in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  ( $= E \times R_0 \times R_0$ ) abgeschlossene Menge  $F$ , unter deren Schichten  $F_a^{(1)}$  ( $a \in E^{(2)}$ ) alle in  $E^{(1)}$  abgeschlossenen Mengen vorkommen. Sei  $G$  die Projektion von  $F$  in den Raum  $E \times E^{(2)}$ . Nach 40-6-11 ist  $G$  eine analytische Menge in  $E \times E^{(2)}$  ( $= E \times R_0$ ). Die Schicht  $G_a^{(1)}$  von  $G$  ist nun aber die Projektion in den Raum  $E$  der Menge  $F_a^{(1)} \subseteq E \times R_0$ ; die Behauptung folgt also aus 40-6-2.

**40-8-11.** Ist  $E^{(1)}$  ein separabler,  $E^{(2)}$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset \Lambda$  ist, so gibt es eine analytische Menge  $G$  in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , unter deren Schichten  $G_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) alle analytischen Mengen in  $E^{(1)}$  vorkommen.

Der Beweis ist analog dem von 33-8-31.

Literatur: N. Lusin, C. R. 181 (1925) S. 95; Leç. s. l. ensembles analytiques S. 146. W. Sierpiński, Fund. math. 12 (1928) S. 75; Fund. math. 14 (1929) S. 82. O. Nikodym, Fund. math. 14 (1929) S. 145. E. Szpilrajn, C. R. Congr. Math. Slaves Vars. 1929, S. 295.

9. **Existenzsatz.** Ist  $E$  ein metrischer Raum, so ist nach 40-8-3 jede Borelsche Menge in  $E$  auch eine analytische Menge in  $E$ . Wir zeigen nun, unter geeigneten Voraussetzungen über  $E$ , daß die Umkehrung hiervon nicht gilt.

Eine Menge  $A \subseteq E$ , deren Komplement  $E - A$  eine analytische Menge in  $E$  ist, nennen wir eine komplementär-analytische Menge in  $E$ . Das System aller komplementär-analytischen Mengen in  $E$  bezeichnen wir mit  $\mathfrak{K}(E)$ .

**40-9-1.** Es gibt im  $R_0$  eine komplementär-analytische Menge, die keine analytische Menge ist.

Nach 40-8-1 gibt es eine Menge  $G \in \mathfrak{A}(R_0 \times R_0)$ , unter deren Schichten  $G_a^{(1)}$  alle analytischen Mengen des  $R_0$  vorkommen. Sei  $F$  die Menge aller  $(x, y) \in R_0 \times R_0$  ( $x \in R_0$ ,  $y \in R_0$ ) mit  $x = y$ ; da  $F$  abgeschlossen, also eine analytische Menge in  $R_0 \times R_0$ , ist  $F G \in \mathfrak{A}(R_0 \times R_0)$ , also nach 40-4-2 auch  $F G \in \mathfrak{A}(F)$ . Sei  $P$  die homöomorphe Abbildung von  $F$  auf den  $R_0$ , die jedem Punkte  $(x, x) \in F$  den Punkt  $x \in R_0$  zuordnet, und sei  $A' = P(FG)$ ; dann ist nach 40-5-2  $A' \in \mathfrak{A}(R_0)$ . Wir setzen  $R_0 - A' = A$ ; dann ist  $A \in \mathfrak{K}(R_0)$ ; wir haben zu zeigen, daß  $A \notin \mathfrak{A}(R_0)$ . Wäre  $A \in \mathfrak{A}(R_0)$ , so gäbe es ein  $a \in R_0$ , so daß  $A = G_a^{(1)}$ ; wegen  $A = R_0 - A'$  sind nun die

Aussagen  $a \in A$  und  $(a, a) \sim \varepsilon G$  äquivalent; die Aussage  $(a, a) \sim \varepsilon G$  ist aber äquivalent mit  $a \sim \varepsilon G_a^{(1)}$ ; es sind also die Aussagen  $a \in A$  und  $a \sim \varepsilon G_a^{(1)}$  äquivalent, also kann nicht  $A = G_a^{(1)}$  sein; also ist  $A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$ , w. z. b. w.

**40-9-11.** Ist  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es in  $E$  eine komplementär-analytische Menge, die keine analytische Menge ist.

Nach 19-2-1 gibt es in  $E$  ein dyadisches Diskontinuum, also auch ein reduziertes dyadisches Diskontinuum  $B$  (§ 24, 2); nach 24-2-4 ist  $B$  ein  $G_\delta$  in  $E$ , also nach 40-3-3  $B \in \mathfrak{A}(E)$ . Nach 40-9-1 gibt es eine Menge  $M \in \mathfrak{R}(R_0) - \mathfrak{A}(R_0)$ . Setzen wir  $M' = R_0 - M$ , so ist  $M' \in \mathfrak{A}(R_0)$ . Nach 24-2-41 gibt es eine homöomorphe Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $B$ . Setzen wir  $A' = P(M')$ , so ist nach 40-5-2  $A' \in \mathfrak{A}(B)$ , also wegen  $B \in \mathfrak{A}(E)$  nach 40-4-21 auch  $A' \in \mathfrak{A}(E)$ ; setzen wir  $A = E - A'$ , so ist somit  $A \in \mathfrak{A}(E)$ . Wir haben zu zeigen, daß  $A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ . Wäre  $A \in \mathfrak{A}(E)$ , so wäre nach 40-4-11 auch  $A B \in \mathfrak{A}(B)$ ; wegen  $A = E - A'$ ,  $A' = P(M')$ ,  $M' = R_0 - M$  ist nun  $AB = B - A' = P(R_0 - M') = P(M)$ , d. h.  $M = P^{-1}(AB)$ ; nach 40-5-1 wäre also auch  $M \in \mathfrak{A}(R_0)$ , während doch  $M \sim \varepsilon \mathfrak{A}(R_0)$  war. Also ist  $A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ , w. z. b. w.

**40-9-2.** Ist  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es in  $E$  eine analytische Menge, die keine Borelsche Menge ist.

Nach 40-9-11 gibt es eine Menge  $A \in \mathfrak{A}(E)$ , so daß  $E - A \sim \varepsilon \mathfrak{A}(E)$ . Dann aber ist  $A \sim \varepsilon \mathfrak{B}(E)$ ; denn wäre  $A \in \mathfrak{B}(E)$ , so wäre nach 33-4-2 auch  $E - A \in \mathfrak{B}(E)$ , also nach 40-3-3 auch  $E - A \in \mathfrak{A}(E)$ .

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88.

## § 41. Eigenschaften analytischer Mengen.

**1. Die Bairesche Eigenschaft.** Sei  $E$  ein metrischer Raum. Dann gilt in Verallgemeinerung von 19-9-3:

**41-1-1.** Jede analytische Menge in  $E$  ist offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $E$ .

Sei  $A$  eine analytische Menge in  $E$ ; dann ist  $A$  Kern eines Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$  in  $E$  abgeschlossener Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , und nach 40-1-2 kann  $\mathfrak{S}$  als monoton angenommen werden. Dann ist nach 40-1-3  $A = S A_{n_1}$ , wo  $A_{n_1} = A(\mathfrak{S}_{n_1})$ ; nach 19-5-34 ist  $S(A_{n_1})_{II_i}$  dicht in  $A_{II_i}$ , und da nach 19-5-1:  $(A_{n_1})_{II} \subseteq A_{II}$ , also  $(A_{n_1})_{II_i} \subseteq A_{II_i}$ , ist nach 11-3-2 auch  $S(A_{n_1})_{II_i}$

nicht in  $A_{IIi}$ , und da  $S(A_{n_i})_{IIi}$  offen, ist nach 11.2.51  $B = A_{IIi} - S(A_{n_i})_{IIi}$  nirgends dicht in  $A_{IIi}$ . Ebenso ist wegen 40.1.3, wenn  $A_{n_1 n_2 \dots n_k} = A(\mathfrak{S}_{n_1 n_2 \dots n_k})$  gesetzt wird, die Menge:

$$B_{n_1 n_2 \dots n_k} = (A_{n_1 n_2 \dots n_k})_{IIi} - S(A_{n_1 n_2 \dots n_k n_{k-1}})_{IIi}$$

nirgends dicht in  $(A_{n_1 n_2 \dots n_k})_{IIi}$ , und da  $A_{n_1 n_2 \dots n_k} \subseteq A$ , also auch  $(A_{n_1 n_2 \dots n_k})_{IIi} \subseteq A_{IIi}$ , ist nach 11.3.21  $B_{n_1 n_2 \dots n_k}$  auch nirgends dicht in  $A_{IIi}$ . Also ist  $C = B + S_{n_1} B_{n_1} + S_{n_1 n_2} B_{n_1 n_2} + \dots + S_{n_1 n_2 \dots n_k} B_{n_1 n_2 \dots n_k} + \dots$  von erster Kategorie in  $A_{IIi}$ . Sei nun  $a \in A_{IIi} - C$ ; dann ist  $a \sim \varepsilon B$ , also  $a \in S(A_{n_1})_{IIi}$ , d. h. es gibt ein  $n_1^*$ , so daß  $a \in (A_{n_1^*})_{IIi}$ ; ebenso ist  $a \sim \varepsilon B_{n_1^*}$ , also  $a \in S(A_{n_1^* n_2})_{IIi}$ , d. h. es gibt ein  $n_2^*$ , so daß  $a \in (A_{n_1^* n_2^*})_{IIi}$ ; und indem man so weiter schließt, erhält man eine Folge  $((n_k^*))$ , so daß  $a \in (A_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})_{IIi}$  für alle  $k$ . Da  $\mathfrak{S}$  monoton, ist aber  $A_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \subseteq F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$ , also auch  $(A_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})_{IIi} \subseteq (F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})_{IIi}$ ; da aber nach 19.5.12  $(F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})_{IIi} \subseteq F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  ist, so ist  $(A_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*})_{IIi} \subseteq F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$ ; also ist  $a \in F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  für alle  $k$ , mithin  $a \in A$ . Wir haben also gezeigt: aus  $a \in A_{IIi} - C$  folgt  $a \in A$ , d. h. es ist  $A_{IIi} - C \subseteq A$ , und mithin  $A_{IIi} - A \subseteq C$ . Da  $C$  von erster Kategorie in  $A_{IIi}$  war, ist also  $A_{IIi}$  eine Residualmenge in  $A_{IIi}$ , also ist nach 19.3.2  $A_{IIi} \subseteq A_{III}$ , mithin ist nach 19.3.5  $A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie.

Als Ergänzung zu 19.3.21 zeigen wir nun:

**41.1.2.** Die bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Mengen des Raumes  $E$  bilden ein Suslinsches System.

Sei  $\mathfrak{R}$  das System der bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Mengen des Raumes  $E$ , und sei  $\mathfrak{S}$  ein Suslinsches Schema von Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k} \in \mathfrak{R}$ . Nach 19.3.1 ist  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  auch abgeschlossen bis auf eine Menge erster Kategorie; setzen wir also  $A(=)B$ , wenn  $A - B$  und  $B - A$  von erster Kategorie in  $E$  sind, so gibt es eine in  $E$  abgeschlossene Menge  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , so daß  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}(=)F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ . Bezeichnet  $\mathfrak{S}'$  das Suslinsche Schema der Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , so ist nach 40.1.5:  $A(\mathfrak{S})(=)A(\mathfrak{S}')$ . Da nach 41.1.1  $A(\mathfrak{S}')$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie ist, so wegen  $A(\mathfrak{S})(=)A(\mathfrak{S}')$  offenbar auch  $A(\mathfrak{S})$ , also ist auch  $A(\mathfrak{S}) \in \mathfrak{R}$ ; d. h. es ist  $\mathfrak{R}_A \subseteq \mathfrak{R}$ , und da nach 40.2.1:  $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{R}_A$ , ist  $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{R}$ , d. h.  $\mathfrak{R}$  ist ein Suslinsches System (§ 40, 2).

Wir sagen: die Menge  $A \subseteq E$  hat die Bairesche Eigenschaft, wenn für jedes  $M \subseteq E$  gilt:  $M \cap A$  ist eine bis auf eine Menge erster Kategorie offene Menge des Raumes  $M$ .

**41.1.3.** *Damit die Menge  $A \subseteq E$  die Bairesche Eigenschaft habe, ist notwendig und hinreichend, daß für jede in  $E$  perfekte Menge  $P$  gelte:  $PA$  ist eine bis auf eine Menge erster Kategorie offene Menge des Raumes  $P$ .*

Notwendig: Dies ist trivial. Hinreichend: Sei  $F$  abgeschlossen in  $E$  und  $P = F_k$  der perfekte Kern von  $F$  (§ 12, 7); dann ist  $F - P = F_k$ . Nach 12.7.1 ist  $F_k$  separiert, nach 12.7.5 offen in  $F$ . Nach Annahme ist  $PA$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $P$ , also nach 19.9.6 auch in  $F$ ; nach 19.9.7 ist  $F_k A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $F_k$ , also nach 19.9.6 auch in  $F$ ; wegen  $F A = P A + F_k A$  ist also nach 19.9.21  $FA$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $F$ . — Sei nun  $M$  eine ganz beliebige Menge  $\subseteq E$ ; da  $M^0$  abgeschlossen in  $E$ , ist — wie eben gezeigt —  $M^0 A$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $M^0$ . Nach 19.9.31 ist  $M^0 A = A' + A''$ , wo  $A'$  ein  $G_\delta$  in  $M^0$  und  $A''$  von erster Kategorie in  $M^0$ ; also ist  $MA = MA' + MA''$ , wo  $MA'$  ein  $G_\delta$  in  $M$  und nach 19.4.32  $MA''$  von erster Kategorie in  $M$ ; also ist nach 19.9.31  $MA$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $M$ .

**41.1.4.** *Hat die Menge  $A \subseteq E$  die Bairesche Eigenschaft, so auch die Menge  $E - A$ .*

Sei  $M \subseteq E$ ; ist dann  $MA$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $M$ , so nach 19.9.2 auch  $M - A = M(E - A)$ .

**41.1.41.** *Die Mengen  $A \subseteq E$ , die die Bairesche Eigenschaft haben, bilden ein Suslinsches System.*

Sei  $\mathfrak{S}$  ein Suslinsches Schema von Mengen  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , die sämtlich die Bairesche Eigenschaft haben, und sei  $A = A(\mathfrak{S})$ . Ist  $M \subseteq E$ , so ist nach 40.1.6  $MA$  der Kern des Suslinschen Schemas der Mengen  $M B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ; nach Annahme ist  $M B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $M$ ; nach 41.1.2 gilt daher dasselbe von  $MA$ . Also hat auch  $A$  die Bairesche Eigenschaft.

**41.1.42.** *Das System  $\mathfrak{M}$  der Mengen  $A \subseteq E$ , die die Bairesche Eigenschaft haben, ist ein  $\sigma$ -Körper.*

Nach 41.1.41 und 40.2.4 ist  $\mathfrak{M}$  ein  $\sigma$ -Ring. Da  $E \in \mathfrak{M}$ , und da nach 41.1.4 neben  $A \in \mathfrak{M}$  auch  $E - A \in \mathfrak{M}$  gilt, ist nach 3.3.1  $\mathfrak{M}$  ein Körper.

**41.1.5.** *Jede analytische Menge in  $E$  hat die Bairesche Eigenschaft.*

Sei  $A$  eine analytische Menge in  $E$  und  $M \subseteq E$ . Nach 40.4.11 ist  $MA$  eine analytische Menge in  $M$ , also nach 41.1.1 eine bis auf eine Menge erster Kategorie offene Menge des Raumes  $M$ .

**41.1.51.** *Jede komplementär-analytische Menge in  $E$  hat die Bairesche Eigenschaft.*

Dies folgt aus 41.1.5 und 41.1.4.

Wir erkennen nun, daß die Bairesche Eigenschaft nicht charakteristisch ist für die analytischen Mengen in  $E$ ; denn ist  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es nach 40-9-11 eine komplementär-analytische Menge in  $E$ , die nicht analytisch in  $E$  ist.

Wir sagen: die Funktion  $f$  auf  $E$  hat die Bairesche Eigenschaft, wenn für jedes  $M \subseteq E$  die Funktion  $M \mid f$  stetig ist bis auf eine Menge erster Kategorie.

**41-1-6.** *Damit die charakteristische Funktion der Menge  $A \subseteq E$  die Bairesche Eigenschaft habe, ist notwendig und hinreichend, daß  $A$  die Bairesche Eigenschaft habe.*

Dies folgt aus 27-4-92.

Nach 35-5-21 hat jede Bairesche Funktion in  $E$  die Bairesche Eigenschaft; doch ist die Bairesche Eigenschaft nicht charakteristisch für die Baireschen Funktionen in  $E$ ; denn ist  $E$  ein Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es nach 40-9-2 in  $E$  eine analytische Menge  $A$ , die keine Borelsche Menge ist; die charakteristische Funktion  $f$  von  $A$  ist nach 35-2-42 keine Bairesche Funktion, doch hat sie nach 41-1-5 und 41-1-6 die Bairesche Eigenschaft. — Ferner ist, wie der Beweis von 35-5-22 zeigt, wenn  $f$  wieder die eben betrachtete Funktion und  $M$  eine  $G_\delta$ -Menge in  $E$  bedeutet, die Funktion  $M \mid f$  punktweise unstetig bei Vernachlässigung von Mengen erster Kategorie; es gilt also auch von 35-5-22 keine Umkehrung.

Literatur: R. Baire, Acta math. 30 (1906) S. 27; H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 188; O. Nicodým, Fund. math. 7 (1925) S. 149.

**2. Perfekte Teile analytischer Mengen.** Jede abzählbare separable Youngsche Menge enthält nach 19-2-21, 19-2-1, 18-9-3 einen nicht leeren perfekten Teil. Dies ist ein spezieller Fall des Satzes:

**41-2-1.** *Jede unabzählbare, separable, in  $E$  analytische Menge  $A$  enthält einen nicht leeren, in  $E$  perfekten Teil.*

Sei  $A = A(\mathfrak{S})$ , wo  $\mathfrak{S}$  ein Suslinsches Schema von in  $E$  abgeschlossenen Mengen  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  bedeutet, und sei  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A(\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ ; nach 40-1-2 können wir  $\mathfrak{S}$  als monoton annehmen; dann ist  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Sei ferner  $(\varrho_n)$  eine abnehmende Folge positiver Zahlen mit endlicher Summe  $\sum_n \varrho_n$ ; setzen wir dann  $\sigma_n = \sum_{\lambda \geq n} \varrho_\lambda$ , so gilt  $\sigma_n \rightarrow 0$ . Nach 18-5-42 gibt es einen Punkt  $a \in A_n$ . Dann ist  $A K_{a \varrho_{m_1}} (m_1 = 1, 2, \dots)$  unabzählbar, und da nach 40-1-3  $A = \bigcup_{n_1} A_{n_1}$ , ist auch für mindestens einen Summanden  $A_{n_1}$  der Durchschnitt  $A_{n_1} K_{a \varrho_{m_1}}$  unabzählbar; einen solchen Summanden bezeichnen wir mit  $A'_{m_1}$ , die Menge  $F_{n_1}$  von gleichem Index  $n_1$

mit  $F'_{m_1}$ . Weil  $A'_{m_1} K_{a_{m_1}}$  un abzählbar, gibt es nach 13.5.42 in  $K_{a_{m_1}}$  einen Punkt  $a_{m_1} \in (A'_{m_1})_r$ ; dabei kann nach 13.5.6 ohne weiteres angenommen werden:  $a_{m_1} \neq a_{m'_1}$  (für  $m_1 \neq m'_1$ ). Nun ist  $A'_{m_1} K_{a_{m_1} e_{m_1 - m_2}}$  ( $m_2 = 1, 2, \dots$ ) un abzählbar, und wegen  $A'_{m_1} = A_{n_1} = \bigcup_{n_1} A_{n_1, n_1}$  ist auch für mindestens einen dieser Summanden  $A_{n_1, n_1}$  der Durchschnitt  $A_{n_1, n_1} K_{a_{m_1} e_{m_1 - m_2}}$  un abzählbar; einen solchen Summanden bezeichnen wir mit  $A'_{m_1, m_2}$ , die entsprechende Menge  $F_{n_1, n_2}$  mit  $F'_{m_1, m_2}$ ; dabei ist  $F'_{m_1, m_2}$  einer der Nachfolger von  $F'_{m_1}$  im Schema  $\mathfrak{S}$ . Weil  $A'_{m_1, m_2} K_{a_{m_1} e_{m_1 - m_2}}$  un abzählbar, gibt es in  $K_{a_{m_1} e_{m_1 - m_2}}$  einen Punkt  $a_{m_1, m_2} \in (A'_{m_1, m_2})_r$ ; dabei kann noch ohne weiteres angenommen werden  $a_{m_1, m_2} \neq a_{m'_1, m'_2}$  (für  $m_2 \neq m'_2$ ). Indem wir so weiterschließen, kommen wir zu einer Menge von Punkten  $a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k} \in A$  ( $k = 1, 2, \dots$ ;  $m_1 = 1, 2, \dots$ ;  $m_2 = 1, 2, \dots$ ;  $\dots$ ), die wir mit  $Q$  bezeichnen, und es kann  $a_{m_1, m_2} \dots a_{m_{k-1}, m_k} \neq a_{m_1, m_2} \dots a_{m_{k-1}, m'_k}$  (für  $m_k \neq m'_k$ ) angenommen werden; ferner gehört  $a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k}$  zu einer Menge  $A_{n_1, n_2} \dots n_k$ , die wir mit  $A'_{m_1, m_2} \dots m_k$  bezeichnen; die entsprechende Menge  $F_{n_1, n_2} \dots n_k$  bezeichnen wir mit  $F'_{m_1, m_2} \dots m_k$ ; dabei ist  $F'_{m_1, m_2} \dots m_k$  einer der Nachfolger von  $F'_{m_1, m_2} \dots m_k$  im Schema  $\mathfrak{S}$ ; endlich ist der Abstand  $a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k, m_{k+1}} a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k} < \varrho_{m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1}}$ , also:

$$(2) \quad a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k, m_{k+1}} \dots a_{m_k, m_{k+1}} < \varrho_{m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1}} + \dots + \varrho_{m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1}} < \sigma_{m_1 + m_2 + \dots + m_{k+1}}.$$

Aus (2) folgt sofort:  $\lim_{m_{k+1}} a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k, m_{k+1}} = a_{m_1, m_2} \dots a_{m_k}$ ; die Menge  $Q$  ist also insichdicht, also ist nach 12.5.4  $Q^1$  perfekt. Wir haben also nur mehr zu zeigen:  $Q^1 \subseteq A$ , und dazu genügt es nach 17.3.61, zu zeigen: ist  $((b_i))$  eine aus durchweg verschiedenen Punkten bestehende Punktfolge aus  $Q$  mit  $b_i \rightarrow b$ , so ist  $b \in A$ . Sei  $b_i = a_{m_1^i, m_2^i} \dots a_{m_{k_i}^i}$ ; kommen dann unter den  $m_1^i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) unendlich viele verschiedene vor, so ist, da nach (2):

$$b_i a \leq a_{m_1^i, m_2^i} \dots a_{m_{k_i}^i} a_{m_1^i} + a_{m_1^i} a < \sigma_{m_1^i + m_2^i} + \varrho_{m_1^i},$$

sicherlich  $b = a$ , also  $b \in A$ . Wir nehmen also an, unter den  $m_1^i$  gibt es nur endlich viele verschiedene. Dann gibt es gewiß einen Index  $m_1^i$ , etwa  $m_1^i$ , so daß unter den  $b_i$  unendlich viele der Gestalt  $b_i = a_{m_1^i, m_2^i} \dots a_{m_{k_i}^i}$  vorkommen; wir bezeichnen sie mit  $b_j^1$  ( $j = 1, 2, \dots$ ); gibt es unter den Indizes  $m_2^i$  dieser  $b_j^1$  unendlich viele verschiedene, so ist, da nach (2):

$$a_{m_1^i, m_2^i} \dots a_{m_{k_i}^i} a_{m_1^i} < \sigma_{m_1^i + m_2^i},$$

sicherlich  $b = a_{m_1^i}$ , also  $b \in A$ . Wir nehmen also an, unter den Indizes  $m_2^i$



der  $b_j^1$  gibt es nur endlich viele verschiedene. Dann gibt es gewiß einen Index  $m_2^1$ , etwa  $m_2^2$ , so daß unter den  $b_j^1$  unendlich viele der Gestalt  $b_i = a_{m_1^1 m_1^2 \dots m_{k_i}^1}$  vorkommen; wir bezeichnen sie mit  $b_j^2$  ( $j = 1, 2, \dots$ ); gibt es unter den Indizes  $m_3^1$  dieser  $b_j^2$  unendlich viele verschiedene, so folgt wieder aus (2), daß  $b = a_{m_1^1 m_1^2}$ , also  $b \in A$ . Indem man so weiterschließt, kommt man entweder nach endlich vielen Schritten zur Feststellung, daß  $b = a_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1}$  und mithin  $b \in A$ , oder man erhält eine Indizesfolge  $((m_k^1))$ , so daß es für jedes  $k$  unter den  $b_i$  unendlich viele der Gestalt  $a_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1 m_{k+1}^1 \dots m_{k+l}^1}$  gibt; wegen

$$a_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1 m_{k+1}^1 \dots m_{k+l}^1} \in A'_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1 m_{k+1}^1 \dots m_{k+l}^1},$$

$$A'_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1 m_{k+1}^1 \dots m_{k+l}^1} \subseteq F'_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1 m_{k+1}^1 \dots m_{k+l}^1} \subseteq F'_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1}$$

ist aber dann, weil  $F'_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1}$  abgeschlossen, auch  $b \in F'_{m_1^1 m_1^2 \dots m_k^1}$ . Es ist dann also  $b \in F'_{m_1^1} \cdot F'_{m_1^2} \cdot \dots \cdot F'_{m_1^k} \cdot \dots$ , also  $b \in A$  ( $\odot$ ), d. h.  $b \in A$ , w. z. b. w.

**41.2.2.** Jede unabzählbare, separable, absolut analytische Menge hat die Mächtigkeit  $\aleph$ .

Denn nach 13.2-1 ist ihre Mächtigkeit  $\leq \aleph$ , und nach 41.2-1 und 19.3-1 ist sie  $\geq \aleph$ .

Ob Analoga der Sätze 41.2-1, 41.2-2 für komplementär-analytische Mengen gelten, ist nicht bekannt. Keinesfalls kann, wie wir nun in 41.2-31 zeigen werden, aus dem in 41.1-51 bewiesenen Bestehen der Baireschen Eigenschaft für jede komplementär-analytische Menge auf die Gültigkeit eines zu 41.2-1 analogen Satzes für komplementär-analytische Mengen geschlossen werden.

**41.2-3.** Es gibt im  $R_0$  eine unabzählbare Punktmenge  $B$  von folgender Eigenschaft: für jede insichdichte Menge  $P$  des  $R_0$  ist  $BP$  von erster Kategorie in  $P$ .

Nach 8.4-41 gibt es zu jeder Ordinalzahl  $\alpha < \omega_1$  eine Folge  $\nu_\alpha$  natürlicher Zahlen, so daß  $\nu_\alpha < \nu_{\alpha'}$ , für  $\alpha < \alpha'$ . Die Menge  $B$  aller dieser  $\nu_\alpha$  ( $\alpha < \omega_1$ ) ist eine unabzählbare Punktmenge des  $R_0$ , die, wie wir zeigen wollen, das Verlangte leistet. Sei also  $P$  eine insichdichte Menge des  $R_0$ ; wir haben zu zeigen:  $BP$  ist von erster Kategorie in  $P$ . Da  $BP$  als Punktmenge des  $R_0$  separabel ist, gibt es einen abzählbaren in  $BP$  dichten Teil  $B'$  von  $BP$ . Da  $B'$  abzählbar, gibt es nach 8.4-1 eine Ordinalzahl  $\beta < \omega_1$ , so daß  $\alpha < \beta$  für alle  $\nu_\alpha \in B'$ . Sei  $B''$  die Menge aller  $\nu_\alpha \in BP$  mit  $\alpha < \beta$ ; da  $B'' \supseteq B'$ , ist auch  $B''$  dicht in  $BP$ , und da  $B''$  abzählbar, ist  $B''$  nach 19.4-5 von erster Kategorie in  $P$ . Um zu zeigen, daß  $BP$  von erster Kategorie in  $P$ , genügt es also, zu zeigen, daß die Menge  $C = BP - B''$  von erster Kategorie

in  $P$  ist. — Für alle  $v_\alpha \in C$  ist  $\alpha \geq \beta$ , also gilt  $v_\alpha \geq v_\beta$  für alle  $v_\alpha \in C$ ; ist  $v_\alpha$  die Folge  $n_{\alpha_1}, n_{\alpha_2}, \dots, n_{\alpha_i}, \dots$  und  $v_\beta$  die Folge  $n_{\beta_1}, n_{\beta_2}, \dots, n_{\beta_i}, \dots$ , so gibt es also zu jedem  $v_\alpha \in C$  ein  $i_\alpha$ , so daß  $n_{\alpha_i} \geq n_{\beta_i}$  für  $i \geq i_\alpha$ ; bezeichnen wir mit  $C_j$  die Menge aller  $v_\alpha \in C$ , für die  $n_{\alpha_i} \geq n_{\beta_i}$  für  $i \geq j$ , so ist demnach  $C = \bigcup_j C_j$ . Um nachzuweisen, daß  $C$  von erster Kategorie in  $P$ , genügt es also, nachzuweisen, daß  $C_j$  nirgends dicht in  $P$ . Nach 11.3.7 haben wir also zu zeigen: ist  $G$  eine in  $P$  offene Menge  $\supset A$ , so kann nicht  $C_j G$  dicht in  $G$  sein. — Da  $B''$  dicht in  $P$ , gibt es nach 11.1.3 einen Punkt  $v_{\alpha^*} \in B'' G$ ; wäre  $C_j G$  dicht in  $G$ , so gäbe es nach 17.3.63 in  $C_j$  eine Punktfolge  $((v_{\alpha_k}))$  mit  $v_{\alpha_k} \rightarrow v_{\alpha^*}$ . Wir haben also nur mehr zu zeigen: für keine Punktfolge  $((v_{\alpha_k}))$  aus  $C_j$  kann gelten:  $v_{\alpha_k} \rightarrow v_{\alpha^*}$ . Nun ist wegen  $v_{\alpha^*} \in B''$  nach Definition von  $B''$ :  $\alpha^* < \beta$ ; es gibt also ein  $i^*$ , so daß  $n_{\alpha^* i} < n_{\beta i}$  für  $i \geq i^*$ ; nach Definition von  $C_j$  aber ist  $n_{\alpha_k i} \geq n_{\beta i}$  für  $i \geq j$ ; setzen wir  $i^{**} = \max(i^*, j)$ , so ist also  $n_{\alpha_k i} > n_{\alpha^* i}$  für  $i \geq i^{**}$  und alle  $k$ : nach 17.3.7 kann also nicht  $v_{\alpha_k} \rightarrow v_{\alpha^*}$  gelten, w. z. b. w.

**41.2.31.** Es gibt im  $R_0$  eine un abzählbare, total imperfekte Menge, die die Bairesche Eigenschaft hat.

Die Menge  $B$  von 41.2.3 ist total imperfekt; denn ist  $P$  eine nicht leere perfekte Menge des  $R_0$ , so ist  $B P$  von erster Kategorie in  $P$ , also kann nach 19.7.6 nicht  $B P = P$  sein, d. h. es ist nicht  $P \subseteq B$ . Und da  $B P$  von erster Kategorie in  $P$ , ist  $B P$  auch offen bis auf eine Menge erster Kategorie in  $P$ , also hat nach 41.1.3  $B$  die Bairesche Eigenschaft.

Auf Grund von 24.2.41 können die Sätze 41.2.3, 41.2.31 vom  $R_0$  auf jeden Youngschen Raum übertragen werden, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist.

Literatur: P. Alexandroff, C. R. 164 (1916) S. 323. F. Hausdorff, Math. Ann. 77 (1916) S. 430. M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88. W. Sierpiński, Fund. math. 5 (1924) S. 166. W. Hurewicz, Fund. math. 12 (1923) S. 78. Zu Satz 41.2.3: N. Lusin, Fund. math. 2 (1921) S. 155.

**3. Die Wertmenge einer Funktion.** Ist  $f(x)$  eine Funktion auf  $A$ , so bezeichnen wir die Menge aller Zahlen  $f(x)$  ( $x \in A$ ) als die Wertmenge der Funktion  $f(x)$ . Ist  $A$  separabel und absolut analytisch, und ist  $f(x)$  stetig, so ist nach 40.5.5 die Wertmenge von  $f(x)$  eine analytische Menge des  $\bar{R}_1$ . Allgemein gilt:

**41.3.1.** Ist  $f(x)$  eine Bairesche Funktion auf der separablen, absolut analytischen Menge  $A$ , so ist ihre Wertmenge eine analytische Menge des  $\bar{R}_1$ .

Nach 18.4.61 gibt es einen separablen vollständigen Raum  $E \supseteq A$ . Sei  $[f(x) = y]$  die die Funktion  $f$  darstellende Punktmenge  $\subseteq A \times \bar{R}_1$  (§ 35, 9). Nach 35.9.3 ist  $[f(x) = y]$  eine Borelsche, also auch eine analytische Menge in  $A \times \bar{R}_1$ ; nach 40.7.2 ist  $A \times \bar{R}_1$  eine analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , nach 40.4.21 ist also auch  $[f(x) = y]$  eine analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ . Die Wertmenge von  $f$  ist die Projektion von  $[f(x) = y]$  in den Raum  $\bar{R}_1$ ; die Behauptung folgt also aus 40.6.11.

Umgekehrt gilt:

**41.3.2.** Jede nicht leere analytische Menge des  $R_1$  ist die Wertmenge einer stetigen Funktion im  $R_0$ .

Dies ist ein Spezialfall von 40.5.4.

Für stetige Funktionen im  $R_n$  ( $n \neq 0$ ) gilt das Analogon von 41.3.2 nicht; denn der  $R_n$  ( $n \neq 0$ ) ist halbkompakt, und aus 23.3.1 und 15.2.22 folgt sofort, daß die Wertmenge einer stetigen Funktion auf einer halbkompakten Menge ein  $F_\sigma$  ist. Wohl aber gilt:

**41.3.21.** Jede nicht leere analytische Menge  $B$  des  $\bar{R}_1$  ist die Wertmenge einer oberhalb (bzw. unterhalb) stetigen Funktion im  $R_1$ .

Sei  $b = \sup B$ ; wir beweisen die Behauptung zuerst für den Fall, daß  $b \in B$ . Sei  $I$  die Menge aller irrationalen Punkte des  $R_1$ ; da nach 24.2.2  $I$  homöomorph dem  $R_0$  ist, so gibt es nach 41.3.2 eine stetige Funktion  $g$  auf  $I$ , deren Wertmenge  $B$  ist. Die obere Schrankenfunktion  $\bar{g}$  von  $g$  (§ 26, 2) ist dann nach 36.3.1 eine oberhalb stetige Funktion im  $R_1$ , und weil  $g$  stetig, ist nach 26.2.4:  $\bar{g}(x) = g(x)$  für alle  $x \in I$ . Für jedes  $x \in R_1$  ist wegen  $b \in B$  und  $\bar{g}(x) \leq b$  die Menge  $B_x$  aller  $y \in B$  mit  $y \geq \bar{g}(x)$  nicht leer. Setzen wir  $\inf B_x = g^*(x)$ , so ist  $g^*(x) \geq \bar{g}(x)$  für alle  $x \in R_1$ , und wegen  $g(x) \in B$  ist  $g^*(x) = \bar{g}(x) = g(x)$  für alle  $x \in I$ . Wir zeigen nun, daß  $g^*(x)$  eine oberhalb stetige Funktion im  $R_1$  ist; dazu genügt es nach 36.1.1, zu zeigen: zu jedem  $z > g^*(x)$  gibt es eine Umgebung  $U_x$ , so daß  $g^*(x') < z$  für alle  $x' \in U_x$ . Wir unterscheiden zwei Fälle, je nachdem es ein der Ungleichung  $g^*(x) < y < z$  genügendes  $y \in B$  gibt, oder nicht. 1. Fall: Sei  $y \in B$  und  $g^*(x) < y < z$ ; da  $\bar{g}(x) \leq g^*(x)$  und  $\bar{g}$  oberhalb stetig, gibt es nach 36.1.1 ein  $U_x$ , so daß  $\bar{g}(x') < y$  für alle  $x' \in U_x$ ; wegen  $g^*(x') = \inf B_{x'}$ ,  $y \in B_{x'}$  ist aber dann  $g^*(x') \leq y < z$  für alle  $x' \in U_x$ , w. z. b. w. 2. Fall: In diesem Falle ist wegen  $g^*(x) = \inf B_x$  notwendig  $g^*(x) \in B$ . Wegen  $\bar{g}(x) \leq g^*(x) < z$  gibt es nach 26.2.11 eine Umgebung  $U_x$ , so daß  $g(x') < z$  für alle  $x' \in I \cap U_x$ ; weil  $g(x') \in B$ , und weil es kein  $y \in B$  mit  $g^*(x) < y < z$  gibt, folgt nun aber daraus weiter:  $g(x') \leq g^*(x)$  für alle  $x' \in I \cap U_x$ , also nach 26.2.11 auch  $\bar{g}(x') \leq g^*(x)$  für alle  $x' \in U_x$ , und wegen  $g^*(x) \in B$

und  $g^*(x') = \inf B_{x'}$ , ist auch  $g^*(x') \leq g^*(x) < z$  für alle  $x' \in U_x$ , w. z. b. w. Damit ist gezeigt, daß  $g^*$  oberhalb stetig. — Sei nun  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die Menge aller rationalen Punkte des  $R_1$ ; wegen  $g^*(r_n) = \inf B_{r_n}$  gibt es ein  $y_n \in B$ , so daß  $y_n \geq g^*(r_n)$  und  $\|y_n - g^*(r_n)\| < \frac{1}{n}$ . Wir definieren nun eine Funktion  $f$  im  $R_1$  durch  $f(x) = g^*(x)$  ( $= g(x)$ ) für  $x \in I$ , und  $f(r_n) = y_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Da  $B$  die Wertmenge von  $g$  und  $y_n \in B$  ist, so ist  $B$  auch die Wertmenge von  $f$ . Sei nun  $((x_n))$  eine Punktfolge im  $R_1$  mit  $x_n \rightarrow x$  und  $x_n \neq x$ . Weil  $g^*$  oberhalb stetig, ist (§ 36, 1)  $\overline{\lim}_n g^*(x_n) \leq g^*(x) \leq f(x)$ ; wie aus der Definition von  $f$  unmittelbar folgt, ist  $\lim_n \|f(x_n) - g^*(x_n)\| = 0$ , also  $\overline{\lim}_n f(x_n) = \overline{\lim}_n g^*(x_n)$ , also gilt auch  $\overline{\lim}_n f(x_n) \leq f(x)$ , d. h.  $f$  ist oberhalb stetig. Damit ist die Behauptung für den Fall bewiesen, daß  $b \in B$ . — Sei nun  $b \sim \varepsilon B$ . Um zu zeigen, daß auch in diesem Falle  $B$  Wertmenge einer oberhalb stetigen Funktion im  $R_1$  ist, genügt es, da die Halbgerade  $x > 0$  des  $R_1$  homöomorph dem  $R_1$  ist, zu zeigen:  $B$  ist Wertmenge einer oberhalb stetigen Funktion auf der Halbgeraden  $x > 0$ . Da  $b = \sup B$  und  $b \sim \varepsilon B$ , gibt es in  $B$  eine wachsende Folge von Zahlen  $((b_n))$  mit  $b_n \rightarrow b$ ; bezeichnet  $B_n$  die Menge aller  $y \in B$  mit  $y \leq b_n$ , so ist  $B = \bigcup_n B_n$ , ferner ist  $b_n = \sup B_n$  und  $b_n \in B_n$ . Wie schon gezeigt, gibt es also eine oberhalb stetige Funktion im  $R_1$ , deren Wertmenge  $B_n$  ist; und da das Intervall  $(n-1, n)$  homöomorph dem  $R_1$ , gibt es also auch eine oberhalb stetige Funktion  $f_n$  auf  $(n-1, n)$ , deren Wertmenge  $B_n$  ist. Definieren wir nun die Funktion  $f$  auf der Halbgeraden  $x > 0$  durch:  $f = f_n$  in  $(n-1, n)$ ,  $f(n) = b_{n-1}$ , so ist  $f$  oberhalb stetig, und die Wertmenge von  $f$  ist  $B$ .

Literatur: N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 5; Leç. s. l. ensembles analytiques S. 135. W. Sierpiński, Bull. Crac. 1918, S. 179; Fund. math. 10 (1927) S. 169; Bull. Crac. 1927, S. 697; Congr. Math. Slaves Vars. 1929, S. 52.

**4. Mehrfache Punkte einer Abbildung.** Sei  $P$  eine Abbildung von  $A$  auf  $B$ . Wir nennen den Punkt  $y \in B$  einen  $k$ -fachen (bzw. mindestens  $k$ -fachen) Punkt von  $P$ , wenn es genau  $k$  (bzw. mindestens  $k$ ) verschiedene  $x \in A$  mit  $P(x) = y$  gibt. Gibt es unendlich viele (bzw. un abzählbar viele) verschiedene  $x \in A$  mit  $P(x) = y$ , so heißt  $y$  ein Punkt unendlicher (bzw. unabzählbarer) Vielfachheit von  $P$ .

**41-4-1.** Ist  $A$  separabel und absolut analytisch, und ist  $P$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so ist für jedes  $k$  die Menge  $B_k$  aller mindestens  $k$ -fachen Punkte von  $P$  absolut analytisch.

Sei  $\mathfrak{S}$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen (§ 13, 1). Damit  $b \in B_k$  sei, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß es in  $\mathfrak{S}$  ein  $k$ -tupel  $H_1, H_2, \dots, H_k$  disjunkter Mengen gebe, so daß  $b \in P(H_1)P(H_2) \dots P(H_k)$ . Man erhält also  $B_k$ , indem man zu jedem  $k$ -tupel  $H_1, H_2, \dots, H_k$  disjunkter Mengen aus  $\mathfrak{S}$  den Durchschnitt  $P(H_1)P(H_2) \dots P(H_k)$  bildet und sodann die Summe aller dieser Durchschnitte bildet. Nach 40-4-31 ist jede Menge  $H \in \mathfrak{S}$  absolut analytisch, nach 40-5-5 ist also auch jede Menge  $P(H)$  ( $H \in \mathfrak{S}$ ) absolut analytisch, also nach 40-2-4 auch jeder Durchschnitt  $P(H_1)P(H_2) \dots P(H_k)$ , und da es in  $\mathfrak{S}$  nur abzählbar viele  $k$ -tupel gibt, ist nach 40-2-4 auch  $B_k$  absolut analytisch.

41-4-2. Ist  $A$  separabel und absolut analytisch, und ist  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so ist die Menge  $B'$  aller Punkte unendlicher Vielfachheit von  $P$  absolut analytisch.

Ist  $B_k$  die Menge der mindestens  $k$ -fachen Punkte von  $P$ , so ist  $B' = \bigcup_k B_k$ . Die Behauptung folgt also aus 40-2-4 und 41-4-1.

Um zu zeigen, daß ein analoger Satz für die Punkte unabzählbarer Vielfachheit gilt, schicken wir einige Hilfsbetrachtungen voraus. Sei  $E$  ein separabler, vollständiger Raum,  $A$  eine analytische Menge in  $E$ . Nach 40-8-5 gibt es ein reguläres Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}$  in  $E$  abgeschlossener Mengen  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , dessen Kern  $A$  ist. Wir bilden wie in § 40, 1 das Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}$  der Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A(\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ . Dann ist  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ; das Schema  $\mathfrak{S}$  ist monoton, und wegen Eigenschaft 3. der regulären Suslinschen Schemata gilt für das Supremum  $d_k$  der Durchmesser  $d(A_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ :  $d_k \rightarrow 0$ . Ist  $A$  unabzählbar, so ist für jedes  $k$  wegen 40-1-3 auch eine der Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  unabzählbar.

41-4-3. Unter den Nachfolgern einer unabzählbaren Menge  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  in  $\mathfrak{S}$  gibt es zwei unabzählbare, zu einander fremde.

Nach 13-5-42 und 13-5-6 gibt es zwei Verdichtungspunkte  $c \neq c'$  von  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Ist  $0 < \varrho < \frac{1}{2}cc'$ , so kann, weil für das Supremum  $d_{k+l}$  der Durchmesser  $d(A_{n_1, n_2, \dots, n_{k+l}})$  gilt:  $\lim_{l \rightarrow \infty} d_{k+l} = 0$ ,  $l$  so gewählt werden, daß je zwei Nachfolger  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+l}}$  von  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , von denen einer einen Punkt von  $K_{c, \varrho}$ , der andere einen Punkt von  $K_{c', \varrho}$  enthält, fremd sind; da aber  $c$  und  $c'$  Verdichtungspunkte von  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  sind,  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cap K_{c, \varrho}$  und  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cap K_{c', \varrho}$  unabzählbar; mithin gibt es nach 40-1-3 unter den Nachfolgern  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+l}}$  von  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  einen unabzählbaren.

der einen Punkt von  $K_{c,q}$  enthält, und einen unabzählbaren, der einen Punkt von  $K_{c,q}$  enthält.

Sei nun jedem dyadischen Komplexe  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$  (§ 18, 7) eine Menge  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  zugeordnet. Wir sagen: diese Mengen bilden ein disjunktes dyadisches Teilschema von  $\bar{\mathfrak{S}}$ , wenn sie folgenden Bedingungen genügen:

1. Jede Menge  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  ist eine unabzählbare Menge  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  aus  $\mathfrak{S}$ .

2.  $B_{i_1, i_2, \dots, i_{n-1}}$  ist ein Nachfolger von  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  in  $\bar{\mathfrak{S}}$ .

3. Je zwei Mengen  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  mit gleichviel Indizes sind fremd.

Wegen 2. gilt für jede dyadische Folge  $((i_n))$ :  $d(B_{i_1, i_2, \dots, i_n}) \rightarrow 0$ . Aus 41.4.8 folgt leicht, daß es, wenn  $A$  unabzählbar, solche disjunkte dyadische Teilschemata von  $\bar{\mathfrak{S}}$  gibt.

Sei  $\mathfrak{X}$  ein disjunktes dyadisches Teilschema von  $\bar{\mathfrak{S}}$ , bestehend aus den Mengen  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ . Dann gilt:

**41.4.31.** Zu jeder dyadischen Folge  $((i_n))$  gibt es einen Punkt  $a \in A$ , so daß:  $B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \cdot \dots \cdot B_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \dots = \{a\}$ .

Nach Definition von  $\mathfrak{X}$  gibt es eine Folge  $((n_k))$  natürlicher Zahlen, so daß  $B_{i_1}, B_{i_1, i_2}, \dots, B_{i_1, i_2, \dots, i_n}, \dots$  eine Teilfolge aus  $A_{n_1}, A_{n_1, n_2}, \dots, A_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \dots$  Da  $\bar{\mathfrak{S}}$  monoton, nimmt diese Folge monoton ab; also ist:  $B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \cdot \dots \cdot B_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \dots = A_{n_1} \cdot A_{n_1, n_2} \cdot \dots \cdot A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \dots$ . Da die Mengen  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n} \supset A$ , sind auch die Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supset A$ ; wegen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ist also auch  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k} \supset A$ ; nach 18.5-11 ist also  $F_{n_1}, F_{n_1, n_2}, \dots, F_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \dots$  eine monoton abnehmende Folge nicht leerer, vollständiger Mengen; nach 18.6.1 gibt es somit einen Punkt  $a$ , so daß  $F_{n_1} \cdot F_{n_1, n_2} \cdot \dots \cdot F_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \dots = \{a\}$ , und wegen  $A = A(\mathfrak{S})$  ist  $a \in A$ . Da nach § 40 (1.2):

$F_{n_1} \cdot F_{n_1, n_2} \cdot \dots \cdot F_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \dots = A_{n_1} \cdot A_{n_1, n_2} \cdot \dots \cdot A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \dots$ ,  
ist auch  $A_{n_1} \cdot A_{n_1, n_2} \cdot \dots \cdot A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot \dots = \{a\}$ , also auch  $B_{i_1} \cdot B_{i_1, i_2} \cdot \dots \cdot B_{i_1, i_2, \dots, i_n} \cdot \dots = \{a\}$ .

Nach 41.4.31 ist jeder dyadischen Folge  $((i_n))$  ein bestimmter Punkt von  $A$  zugeordnet; wir bezeichnen ihn mit  $a_{((i_n))}$ . Durchläuft  $((i_n))$  alle dyadischen Folgen, so durchläuft der Punkt  $a_{((i_n))}$  eine Punktmenge, die wir die durch das disjunkte dyadische Teilschema  $\mathfrak{X}$  von  $\mathfrak{S}$  erzeugte Menge  $M(\mathfrak{X})$  nennen.

**41.4.32.** Die durch ein disjunktes dyadisches Teilschema  $\mathfrak{X}$  von  $\bar{\mathfrak{S}}$  erzeugte Menge  $M(\mathfrak{X})$  ist ein unabzählbarer Teil von  $A$ .

Nach 41.4-31 ist  $M(\mathfrak{I}) \subseteq A$ . Wegen Eigenschaft 3. von  $\mathfrak{I}$  liefern verschiedene dyadische Folgen  $((i_n))$  verschiedene Punkte  $a_{((i_n))} \in A$ ; und da es nach 5.2-2  $\aleph$  dyadische Folgen gibt, hat  $M(\mathfrak{I})$  die Mächtigkeit  $\aleph$ .

**41.4-33.** Zu jedem in  $E$  perfekten Teile  $C \supset A$  von  $A$  gibt es ein disjunktes dyadisches Teilschema  $\mathfrak{I}$  von  $\mathfrak{E}$ , so daß  $M(\mathfrak{I}) \subseteq C$ .

Da  $C$  nach 19.3-1 un abzählbar, gibt es nach 13.5-42, 13.5-6 zwei Verdichtungspunkte  $c \neq c'$  von  $C$ . Da nach 40.1-3:  $C = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_k} C_{A_{n_1, n_2, \dots, n_k}}$ , und da für das Supremum  $d_k$  der Durchmesser  $d(A_{n_1, n_2, \dots, n_k})$  gilt:  $d_k \rightarrow 0$ , folgt daraus, daß, bei hinlänglich großem  $k$ , unter den Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  zwei zueinander fremde vorkommen müssen, für die  $C_{A_{n_1, n_2, \dots, n_k}}$  un abzählbar ist; es gibt also in  $\mathfrak{E}$  zwei fremde Mengen  $B_{i_1}$  ( $i_1 = 0, 1$ ), so daß  $C B_{i_1}$  un abzählbar. Ebenso gibt es unter den Nachfolgern von  $B_{i_1}$  in  $\mathfrak{E}$  zwei fremde  $B_{i_1, i_2}$  ( $i_2 = 0, 1$ ), so daß  $C B_{i_1, i_2}$  un abzählbar usw. Man erhält so ein disjunktes dyadisches Teilschema  $\mathfrak{I}$  von  $\mathfrak{E}$ , bestehend aus Mengen  $B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ , für die  $C B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$  un abzählbar. Sei  $((i_n))$  eine dyadische Folge und sei  $a_n \in C B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ ; da auch  $a_{((i_n))} \in B_{i_1, i_2, \dots, i_n}$ , ist  $a_n a_{((i_n))} \leq d(B_{i_1, i_2, \dots, i_n})$ , und wegen  $d(B_{i_1, i_2, \dots, i_n}) \rightarrow 0$  gilt  $a_n \rightarrow a_{((i_n))}$ . Da  $a_n \in C$  und  $C$  abgeschlossen, ist auch  $a_{((i_n))} \in C$ , d. h.  $M(\mathfrak{I}) \subseteq C$ .

**41.4-4.** Ist  $A$  separabel und absolut analytisch, und ist  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so ist die Menge  $B^*$  aller Punkte un abzählbarer Vielfachheit von  $P$  absolut analytisch.

Die Behauptung ist trivial, wenn  $A$  abzählbar, also  $B^* = A$ ; sei also  $A$  un abzählbar. Nach 18.4-61 gibt es einen separablen, vollständigen Raum  $E \supseteq A$  und nach 40.3-5 ein reguläres Suslinsches Schema  $\mathfrak{E}$  in  $E$  mit  $A(\mathfrak{E}) = A$ ; sei  $\mathfrak{E}$  das zugehörige Suslinsche Schema der Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A(\mathfrak{E}_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ . Da  $A$  un abzählbar, gibt es disjunkte dyadische Teilschemata von  $\mathfrak{E}$ . Da es nur abzählbar viele Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  gibt, gibt es in allen möglichen disjunkten dyadischen Teilschemata  $\mathfrak{I}$  von  $\mathfrak{E}$  nur abzählbar viele verschiedene erste Zeilen<sup>1)</sup>, die wir mit  $\mathfrak{I}_{n_1}$  ( $n_1 = 1, 2, \dots$ ) bezeichnen. In den Schemata  $\mathfrak{I}$ , deren erste Zeile  $\mathfrak{I}_{n_1}$  ist, treten nur abzählbar viele verschiedene zweite Zeilen auf, die wir mit  $\mathfrak{I}_{n_1, n_2}$  ( $n_2 = 1, 2, \dots$ ) bezeichnen usw. In dieser Weise erhalten wir ein Suslinsches Schema bestehend aus Systemen  $\mathfrak{I}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  von  $2^k$  Mengen aus  $\mathfrak{E}$ ; jede Folge  $((n_k))$  natürlicher

<sup>1)</sup> Unter der  $k$ -ten Zeile eines dyadischen Schemas  $\mathfrak{I}$  verstehen wir das System seiner  $2^k$  Mengen  $k$ -ter Stufe (§ 18, 7).

Zahlen liefert ein disjunktes dyadisches Teilschema  $\mathfrak{T}_{((n_k))}$  von  $\mathfrak{S}$ , dessen Zeilen  $\mathfrak{Z}_{n_1}, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2}, \dots, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \dots n_k}, \dots$  sind; durchläuft  $((n_k))$  alle Folgen natürlicher Zahlen, so durchläuft  $\mathfrak{T}_{((n_k))}$  alle disjunkten dyadischen Teilschemata von  $\mathfrak{S}$ . Die  $2^k$  Mengen von  $\mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bezeichnen wir für den Augenblick mit  $C_1, C_2, \dots, C_{2^k}$ , den Durchschnitt ihrer Bilder  $P(C_1)P(C_2) \dots P(C_{2^k})$  mit  $P_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ; da die Mengen  $A_{n_1 n_2 \dots n_k}$  aus  $\mathfrak{S}$  separabel und absolut analytisch sind, so nach 40.5-5 auch  $P_{n_1 n_2 \dots n_k}$ . Die  $P_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bilden ein Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}^*$ , und nach 40.4-4 ist  $A(\mathfrak{S}^*)$  absolut analytisch. Wir zeigen nun, daß  $B^* = A(\mathfrak{S}^*)$ , womit die Behauptung bewiesen sein wird. — Sei  $b \in B^*$ . Nach Definition von  $B^*$  ist die Menge  $P^{-1}(b)$  aller Urbilder von  $b$  un abzählbar; nach 23.2-11 ist sie abgeschlossen in  $A$ , also nach 40.4-31 absolut analytisch, enthält also nach 41.2-1 einen in  $E$  perfekten Teil  $\supset A$ , und daher gibt es nach 41.4-33 ein disjunktes dyadisches Teilschema  $\mathfrak{T}$  von  $\mathfrak{S}$ , so daß  $M(\mathfrak{T}) \subseteq P^{-1}(b)$ . Besteht  $\mathfrak{T}$  aus den Zeilen  $\mathfrak{Z}_{n_1}, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2}, \dots, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \dots n_k}, \dots$ , so ist  $b \in P_{n_1} \cdot P_{n_1 n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot \dots$ , also  $b \in A(\mathfrak{S}^*)$ ; damit ist gezeigt, daß  $B^* \subseteq A(\mathfrak{S}^*)$ . Sei nun umgekehrt  $b \in A(\mathfrak{S}^*)$ ; dann gibt es eine Folge  $((n_k))$  natürlicher Zahlen, so daß  $b \in P_{n_1} \cdot P_{n_1 n_2} \cdot \dots \cdot P_{n_1 n_2 \dots n_k} \cdot \dots$ ; ist dann  $\mathfrak{T}_{((n_k))}$  das aus den Zeilen  $\mathfrak{Z}_{n_1}, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2}, \dots, \mathfrak{Z}_{n_1 n_2 \dots n_k}, \dots$  bestehende disjunkte dyadische Teilschema von  $\mathfrak{S}$ , so gibt es in jeder Menge  $B_{i_1 i_2 \dots i_n} \in \mathfrak{T}_{((n_k))}$  einen Punkt  $a_{i_1 i_2 \dots i_n}$  mit  $P(a_{i_1 i_2 \dots i_n}) = b$ . Sei  $M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$  die durch  $\mathfrak{T}_{((n_k))}$  erzeugte Menge, und  $a \in M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$ ; nach Definition von  $M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$  ist  $a = a_{((i_n))}$ , wo  $((i_n))$  eine dyadische Folge; dann ist  $a \in B_{i_1 i_2 \dots i_n}$  für alle  $n$ , und da auch  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \in B_{i_1 i_2 \dots i_n}$  war und  $d(B_{i_1 i_2 \dots i_n}) \rightarrow 0$  gilt, so gilt  $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \rightarrow a_{((i_n))}$ . Wegen der Stetigkeit von  $P$  folgt also aus  $P(a_{i_1 i_2 \dots i_n}) = b$  auch  $P(a_{((i_n))}) = b$ ; es gilt also  $P(a) = b$  für alle  $a \in M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$ , und da nach 41.4-32  $M(\mathfrak{T}_{((n_k))})$  ein un abzählbarer Teil von  $A$ , ist  $b \in B^*$ . Es ist also auch  $A(\mathfrak{S}^*) \subseteq B^*$ . Somit ist  $B^* = A(\mathfrak{S}^*)$ , w. z. b. w.

Eine stetige Funktion  $f$  auf  $A$  liefert eine eindeutige, stetige Abbildung von  $A$  auf eine Punktmenge  $B$  des  $\bar{R}_1$ . Jede Zahl  $y \in \bar{R}_1$ , zu der es  $k$  Punkte (bzw. mindestens  $k$  Punkte)  $x \in A$  mit  $f(x) = y$  gibt, heißt ein  $k$ -facher (bzw. mindestens  $k$ -facher) Wert von  $f$ ; jede Zahl  $y \in \bar{R}_1$ , zu der es unendlich viele (bzw. un abzählbar viele)  $x \in A$  mit  $f(x) = y$  gibt, heißt ein Wert unendlicher (bzw. un abzählbarer) Vielfachheit von  $f$ . Als Spezialfall von 41.4-1, 41.4-2, 41.4-4 erhalten wir:



**41.4.5.** Ist  $f$  eine stetige Funktion auf der separablen, absolut analytischen Menge  $A$ , so ist die Menge aller mindestens  $k$ -fachen Werte (aller Werte unendlicher Vielfachheit, aller Werte unabzählbarer Vielfachheit) von  $f$  eine analytische Menge des  $\bar{R}_1$ .

Umgekehrt gilt:

**41.4.51.** Jede analytische Menge  $B$  des  $\bar{R}_1$  ist die Menge aller mindestens  $k$ -fachen ( $k > 1$ ) Werte (aller Werte unendlicher Vielfachheit, aller Werte unabzählbarer Vielfachheit) einer stetigen Funktion im  $R_0$ .

Die Behauptung ist richtig, wenn  $B = A$ ; denn nach 24.2.2 ist der  $R_0$  homöomorph der Menge  $I$  aller irrationalen Punkte des  $R_0$ ; jede homöomorphe Abbildung des  $R_0$  auf  $I$  liefert aber eine Funktion, für die die Menge aller mindestens  $k$ -fachen ( $k > 1$ ) Werte (aller Werte unendlicher Vielfachheit, aller Werte unabzählbarer Vielfachheit) leer ist. Sei also  $B \supset A$ . Sei  $A_n$  die Menge aller Punkte des  $R_0$ , die durch Folgen  $((n_i))$  natürlicher Zahlen dargestellt werden, die mit  $n_1 = n$  beginnen. Dann ist  $A_n$  homöomorph dem  $R_0$ ; ebenso ist  $\bigcup_{n \geq k} A_n$  homöomorph dem  $R_0$ . Nach 41.3.2 gibt es eine stetige Funktion  $f_n$  auf  $A_n$ , deren Wertmenge  $B$  ist, sowie eine stetige Funktion  $f^*$  auf  $\bigcup_{n \geq k} A_n$ , deren Wertmenge  $B$  ist. Setzen wir  $f = f_n$  auf  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots, k-1$ ),  $f = f^*$  auf  $\bigcup_{n \geq k} A_n$ , so ist  $f$  eine stetige Funktion im  $R_0$  und  $B$  die Menge ihrer mindestens  $k$ -fachen Werte. Setzen wir  $f = f_n$  auf  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), so ist  $f$  eine stetige Funktion im  $R_0$  und  $B$  die Menge ihrer Werte unendlicher Vielfachheit. — Sei sodann  $g$  eine stetige Funktion im  $R_0$ , deren Wertmenge  $B$  ist. Ordnen wir jedem Punkte  $x = ((n_i))$  des  $R_0$  den Punkt  $z(x) = ((n'_i))$  mit  $n'_i = n_{2i}$  zu, so ist dies eine stetige Abbildung des  $R_0$  auf sich selbst, für die jeder Punkt  $z$  ein Punkt unabzählbarer Vielfachheit ist; setzen wir also  $f(x) = g(z(x))$ , so ist  $f$  eine stetige Funktion im  $R_0$ , für die  $B$  die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit ist.

Betrachten wir statt der stetigen Funktionen im  $R_0$  nun die stetigen Funktionen im  $R_n$  ( $n > 0$ ), so gilt:

**41.4.6.** Ist  $f$  eine stetige Funktion im  $R_n$  ( $n > 0$ ), so ist die Menge  $A_k$  aller mindestens  $k$ -fachen Werte von  $f$  Summe einer im  $\bar{R}_1$  offenen und einer abzählbaren Menge.

Sei  $A'$  die Menge aller derjenigen Funktionswerte  $f(x) \in A_k$ , die zugleich Maxima oder Minima von  $f$  sind; nach 25.4.2<sup>1)</sup> ist  $A'$  abzählbar. Sei

<sup>1)</sup> Siehe Nachtrag S. 399.

nun  $y \in A_k - A'$ ; dann gibt es  $k$  Punkte  $x_i \in R_n$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ), so daß  $f(x_i) = y$ ; wir wählen  $\varrho > 0$  so klein, daß die  $k$  Kugeln  $K_{x_i, \varrho}$  disjunkt sind; da  $y \sim \varepsilon A'$ , gibt es in  $K_{x_i, \varrho}$  zwei Punkte  $x'_i, x''_i$ , so daß  $f(x'_i) < y < f(x''_i)$ ; setzen wir  $y' = \max(f(x'_1), f(x'_2), \dots, f(x'_k))$ ,  $y'' = \min(f(x''_1), f(x''_2), \dots, f(x''_k))$ , so ist  $y' < y < y''$  und nach 25-7-4 gibt es zu jedem  $z \in (y', y'')$  einen Punkt  $x_i^* \in K_{x_i, \varrho}$  mit  $f(x_i^*) = z$ ; jedes  $z \in (y', y'')$  ist also mindestens  $k$ -facher Wert von  $f$ , d. h. es ist  $(y', y'') \subseteq A_k$ . Zu jedem  $y \in A_k - A'$  gibt es also ein offenes Intervall  $I_y$  des  $\bar{R}_1$ , das  $\subseteq A_k$  ist. Setzen wir  $G = \bigcup_{y \in A_k - A'} I_y$ , so ist  $G$  eine offene Menge des  $\bar{R}_1$ , die  $\subseteq A_k$  ist, und da  $A_k - G \subseteq A'$ , ist  $A_k - G$  abzählbar.

**41.4-61.** Ist  $f$  eine stetige Funktion im  $R_n$  ( $n > 0$ ), so ist die Menge  $A_\infty$  aller Punkte unendlicher Vielfachheit von  $f$  Summe einer  $G_\delta$ -Menge im  $\bar{R}_1$  und einer abzählbaren Menge.

Ist  $A_k$  die Menge aller mindestens  $k$ -fachen Werte von  $f$ , so ist nach 41.4-6  $A_k = G_k + A'_k$ , wo  $G_k$  offen im  $\bar{R}_1$  und  $A'_k$  abzählbar. Wegen  $A_\infty = \bigcap_k A_k$  ist also  $A_\infty = \bigcap_k G_k + A''$ , wo  $A'' \subseteq \bigcup_k A'_k$  und mithin abzählbar ist.

Hingegen gilt im  $R_1$  wie im  $R_0$ :

**41.4-62.** Jede analytische Menge  $B$  des  $\bar{R}_1$  ist die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit einer stetigen Funktion im  $R_1$ .

Sei  $S$  die Schränkungstransformation und  $B' = S(B)$ . Nach 24-2-2, 24-2-12 ist der  $R_0$  homöomorph der Menge  $I$  aller irrationalen Punkte von  $[-1, 1]$ . Nach 41.4-51 gibt es also eine stetige Funktion  $g$  auf  $I$ , für die  $B$  die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit ist. Setzen wir  $S(g) = g'$ , so ist  $|g'| \leq 1$ , und  $B'$  ist die Menge aller Werte unabzählbarer Vielfachheit von  $g'$ . Wir betrachten nun die Menge  $M$  aller Punkte  $(x, y)$  des  $R_2$  mit  $x \in I, y = g'(x)$ ; sie liegt im Quadrat  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$  des  $R_2$ ; dann ist  $B'$  die Menge aller  $y \in R_1$ , für die die Schicht  $M_y^{(1)}$  von  $M$  unabzählbar ist. Sei  $M^0$  die abgeschlossene Hülle von  $M$  im  $R_2$ ; aus der Stetigkeit von  $g'$  auf  $I$  folgt, daß  $M^0 - M$  nur Punkte  $(x, y)$  mit rationaler Abszisse  $x$  enthalten kann; also ist jede Schicht  $(M^0 - M)_y^{(1)}$  abzählbar, und somit ist  $B'$  auch die Menge aller  $y \in R_1$ , für die die Schicht  $(M^0)_y^{(1)}$  unabzählbar ist. Sei  $C$  ein dyadisches Diskontinuum im  $R_1$ ; wie wir in § 23, 3 sahen, gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  von  $C$  auf das Quadrat  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$  des  $R_2$ , bei der jeder Punkt dieses Quadrates höchstens vier Urbilder hat; nach

23-2.11 ist  $P^{-1}(M^0)$  ein abgeschlossener Teil  $F$  von  $C$ . Wir definieren nun eine Funktion  $h(t)$  auf  $F$  durch die Festsetzung: ist  $t \in F$  und ist  $P(t) = (x(t), y(t))$  der Bildpunkt von  $t$  in  $M^0$ , so sei  $h(t) = y(t)$ . Dann ist  $|h(t)| \leq 1$  und aus der Stetigkeit von  $P$  folgt, daß  $h(t)$  stetig ist; da  $B'$  die Menge aller  $y$  war, für die die Schicht  $(M^0)_y^{(1)}$  un abzählbar ist, so ist  $B'$  auch die Menge aller Werte un abzählbarer Vielfachheit von  $h(t)$ . Wir erweitern nun  $h(t)$  zu einer stetigen Funktion  $f(t)$  im  $R_1$ : das Komplement  $R_1 - F$  besteht nach 16-5.4 aus einer Halbgeraden  $t < a$ , einer Halbgeraden  $t > b$  und abzählbar vielen Intervallen  $(a_\nu, b_\nu)$ , wobei  $a \in F$ ,  $b \in F$ ,  $a_\nu \in F$ ,  $b_\nu \in F$ ; wir setzen:  $f(t) = h(t)$  für  $t \in F$ ,  $f(t) = h(a) + c' \frac{t-a}{t-a-1}$  für  $t < a$ ,  $f(t) = h(b) + c'' \frac{t-b}{t-b+1}$  für  $t > b$ , und:

$$f(t) = f(a_\nu) + \frac{t-a_\nu}{b_\nu-a_\nu} (f(b_\nu) - f(a_\nu)) \text{ in } (a_\nu, b_\nu), \text{ falls } f(a_\nu) \neq f(b_\nu),$$

$$f(t) = f(a_\nu) + c_\nu (t-a_\nu) (t-b_\nu) \text{ in } (a_\nu, b_\nu), \text{ falls } f(a_\nu) = f(b_\nu),$$

wobei die Konstanten  $c', c'', c_\nu$  so zu wählen sind, daß durchweg  $|f| \leq 1$  und  $f$  eine stetige Funktion im  $R_1$  wird; dann ist  $B'$  die Menge aller Werte un abzählbarer Vielfachheit von  $f$ ; also ist auch  $S^{-1}(f)$  eine stetige Funktion im  $R_1$  und  $B$  die Menge aller Werte un abzählbarer Vielfachheit von  $S^{-1}(f)$ .

41-4.7. Sind die Räume  $E^{(1)}, E^{(2)}$  separabel und vollständig und ist  $A$  analytisch in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so ist die Menge aller  $y \in E^{(2)}$ , für die die Schicht  $A_y^{(1)}$  von  $A$  aus mindestens  $k$  (aus unendlich vielen, aus un abzählbar vielen) Punkten besteht, absolut analytisch.

Nach 20-2.4, 20-2.7 ist  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  separabel und vollständig; also ist  $A$  separabel und absolut analytisch. Da die Projektion von  $A$  in den Raum  $E^{(2)}$  eine eindeutige, stetige Abbildung ist, folgt die Behauptung aus 41-4.1, 41-4.2, 41-4.4.

41-4.8. Zu jeder analytischen Menge  $B$  des  $R_1$  gibt es eine im  $R_2$  abgeschlossene Menge  $F$ , so daß  $B$  die Menge aller  $y \in R_1$  ist, für die die Schicht  $F_y^{(1)}$  von  $F$  un abzählbar ist.

Da der  $R_1$  nach 25-3.2 homöomorph ist der Menge  $E = R_1 - \{+\infty, -\infty\}$ , ist nach 40-5.2  $B$  analytisch in  $E$ , also nach 40-4.21 auch im  $\bar{R}_1$ . Nach 41-4.62 gibt es also eine stetige Funktion  $f$  im  $R_1$ , für die  $B$  die Menge aller Werte un abzählbarer Vielfachheit ist. Nach 35-9.41 ist die die Funktion  $f$  darstellende Menge  $M = [f(x) = y]$  abgeschlossen in  $R_1 \times \bar{R}_1$ . Setzen wir  $F = M(R_1 \times E)$ , so ist  $F$  abgeschlossen in  $R_1 \times E$ , also, da  $E$  homöomorph dem  $R_1$ , auch abgeschlossen im  $R_2$ . Da offenbar  $B$  die Menge aller  $y \in R_1$  ist, für die die Schicht  $F_y^{(1)}$  un abzählbar ist, ist die Behauptung bewiesen.

Literatur: St. Mazurkiewicz u. W. Sierpiński, Fund. math. 6 (1924) S. 161. W. Sierpiński, Fund. math. 8 (1926) S. 370; C. R. Vars. 24 (1931) S. 57; Mathem. Cluj 5 (1931) S. 49. W. Hurewicz, Fund. math. 15 (1930) S. 4. K. Borsuk, Fund. math. 11 (1928) S. 278. C. Kuratowski u. E. Szpilrajn, Fund. math. 18 (1932) S. 160.

## § 42. Analytische und Borelsche Mengen.

1. **Trennbarkeit.** Sei  $E$  ein metrischer Raum,  $\mathfrak{B}(E)$  das System der Borelschen Mengen in  $E$ . Wir nennen zwei Mengen  $M, M'$  in  $E$   $\mathfrak{B}$ -trennbar, wenn es zwei fremde Borelsche Mengen  $B, B'$  in  $E$  gibt, so daß  $M \subseteq B, M' \subseteq B'$ . Da nach 33.4.2 aus  $B \in \mathfrak{B}(E)$  auch folgt:  $E - B \in \mathfrak{B}(E)$ , ist dies gleichbedeutend mit: es gibt ein  $B \in \mathfrak{B}(E)$ , so daß  $M \subseteq B, M' \subseteq E - B$ . Die Mengen  $M$  und  $E - M$  sind demnach dann und nur dann  $\mathfrak{B}$ -trennbar, wenn  $M \in \mathfrak{B}(E)$ . Die Mengen  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) heißen  $\mathfrak{B}$ -trennbar, wenn es ein disjunktes System von Mengen  $B_n \in \mathfrak{B}(E)$  gibt, so daß  $M_n \subseteq B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

42.1.1. Sind je zwei der Mengen  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $\mathfrak{B}$ -trennbar, so sind die Mengen  $M_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ )  $\mathfrak{B}$ -trennbar.

Nach Annahme gibt es für  $m \neq n$  zwei fremde Borelsche Mengen  $B_{mn}, B_{nm}$  in  $E$ , so daß  $M_m \subseteq B_{mn}, M_n \subseteq B_{nm}$ ; bezeichnen wir mit  $B_n$  den Durchschnitt der Mengen  $B_{nm}$  ( $m = 1, 2, \dots, m \neq n$ ), so sind die  $B_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) disjunkt, es ist  $B_n \in \mathfrak{B}(E)$  und  $M_n \subseteq B_n$ .

42.1.11. Sind (für jedes Indizespaar  $m, n$ ) die beiden Mengen  $M_m, M'_n$   $\mathfrak{B}$ -trennbar, so sind auch die Mengen  $M = \bigcup_m M_m, M' = \bigcup_n M'_n$   $\mathfrak{B}$ -trennbar.

Nach Annahme gibt es zwei fremde Borelsche Mengen  $B_{mn}, B'_{nm}$ , so daß  $M_m \subseteq B_{mn}, M'_n \subseteq B'_{nm}$ ; setzen wir  $B = \bigcap_m \bigcup_n B_{mn}, B' = \bigcap_n \bigcup_m B'_{nm}$ , so ist  $B \cap B' = \emptyset, B \in \mathfrak{B}(E), B' \in \mathfrak{B}(E)$  und  $M \subseteq B, M' \subseteq B'$ .

42.1.2. Je zwei fremde separable, absolut analytische Mengen  $A, A'$  in  $E$  sind  $\mathfrak{B}$ -trennbar.

Wir beweisen die gleichbedeutende Behauptung: sind  $A$  und  $A'$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar, so ist  $A \cap A' \neq \emptyset$ . Nach 40.5.4 gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  bzw.  $P'$  des  $R_0$  auf  $A$  bzw.  $A'$ . Bezeichnen wir mit  $R_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die Menge aller mit  $n_1, n_2, \dots, n_k$  beginnenden Folgen  $((n_i))$  natürlicher Zahlen, so ist  $A = \bigcup_{n_1} P(R_{n_1}), A' = \bigcup_{n_1} P'(R_{n_1})$ . Sind  $A, A'$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar, so gibt es nach 42.1.11 ein  $n_1^*$  und ein  $n_1^{**}$ , so daß auch  $P(R_{n_1^*})$  und  $P'(R_{n_1^{**}})$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar. Da  $P(R_{n_1^*}) = \bigcup_{n_2} P(R_{n_1^* n_2}), P'(R_{n_1^{**}}) = \bigcup_{n_2} P'(R_{n_1^{**} n_2})$ , gibt es dann nach 42.1.11 ein  $n_2^*$  und ein  $n_2^{**}$ , so daß auch  $P(R_{n_1^* n_2^*})$  und  $P'(R_{n_1^{**} n_2^{**}})$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar. Indem man so weiterschließt, erhält man

zwei Indizesfolgen  $((n_k^{**}), (n_k^{**}))$ , so daß (für jedes  $k$ )  $P(R_{n_1^{**} n_1^{**} \dots n_k^{**}})$  und  $P(R_{n_1^{**} n_1^{**} \dots n_k^{**}})$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar. Setzen wir  $((n_k^{**})) = v^*$ ,  $((n_k^{**})) = v^{**}$ , so ist dann aber  $P(v^*) = P'(v^{**})$ ; denn wäre  $P(v^*) \neq P'(v^{**})$ , so gäbe es zwei fremde, in  $E$  offene Mengen  $G, G'$ , so daß  $P(v^*) \in G$ ,  $P'(v^{**}) \in G'$ ; nach 23-1-2 wäre dann für fast alle  $k$ :  $P(R_{n_1^{**} n_1^{**} \dots n_k^{**}}) \subseteq G$ ,  $P'(R_{n_1^{**} n_1^{**} \dots n_k^{**}}) \subseteq G'$ , und es wären also  $P(R_{n_1^{**} n_1^{**} \dots n_k^{**}})$  und  $P'(R_{n_1^{**} n_1^{**} \dots n_k^{**}})$  für fast alle  $k$   $\mathfrak{B}$ -trennbar, entgegen dem Bewiesenen. Aus  $P(v^*) = P'(v^{**})$  folgt aber, da  $P(v^*) \in A$ ,  $P'(v^{**}) \in A'$ , daß  $A \cap A' \neq \emptyset$ .

**42-1-21.** Sind  $A, A'$  fremde separable, absolut analytische Mengen in  $E$ , so sind  $A$  und  $A'$  Borelsche Mengen in  $A + A'$ .

Denn nach 42-1-2 gibt es zwei fremde Mengen  $B \in \mathfrak{B}(E)$ ,  $B' \in \mathfrak{B}(E)$ , so daß  $A \subseteq B$ ,  $A' \subseteq B'$ ; dann ist  $A = B \cap (A + A')$ ,  $A' = B' \cap (A + A')$ ; also ist nach 33-4-7:  $A \in \mathfrak{B}(A + A')$ ,  $A' \in \mathfrak{B}(A + A')$ .

**42-1-3.** Ist  $E$  separabel und absolut analytisch, so ist, damit die in  $E$  analytische Menge  $A$  eine Borelsche Menge in  $E$  sei, notwendig und hinreichend, daß auch  $E - A$  eine analytische Menge in  $E$  sei.

Notwendig: Ist  $A \in \mathfrak{B}(E)$ , so ist auch  $E - A \in \mathfrak{B}(E)$ , also nach 40-3-8 auch  $E - A \in \mathfrak{A}(E)$ . Hinreichend: Nach 40-4-31 sind  $A$  und  $E - A$  absolut analytisch, also sind nach 42-1-2  $A$  und  $E - A$   $\mathfrak{B}$ -trennbar in  $E$ ; also ist  $A \in \mathfrak{B}(E)$ .

Bedeutet  $\mathfrak{K}(E)$  das System der komplementär-analytischen Mengen in  $E$  (§ 40, 9), so gilt:

**42-1-31.** Ist  $E$  separabel und absolut analytisch, so ist  $\mathfrak{B}(E) = \mathfrak{A}(E) \cdot \mathfrak{K}(E)$ .

Dies folgt unmittelbar aus 42-1-3.

Literatur: M. Suslin, C. R. 164 (1917) S. 88. N. Lusin, Fund. math. 10 (1927) S. 52. W. Sierpiński, C. R. Vars. 24 (1931) S. 57.

**2. Disjunkte Suslinsche Schemata.** Sei  $\mathfrak{M}$  ein ganz beliebiges Mengensystem. Das Suslinsche Schema  $\odot$  der Mengen  $M_{n_1 n_1 \dots n_k} \in \mathfrak{M}$  heißt disjunkt, wenn für je zwei verschiedene Folgen  $((n_k))$  natürlicher Zahlen die Durchschnitte  $M_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots M_{n_1 n_1 \dots n_k} \dots$  fremd sind.

**42-2-1.** Ist jede der disjunkten Mengen  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in  $\mathfrak{M}$ , so auch  $A = \bigcup_n A_n$ .

Sei  $A_n$  Kern des disjunkten Suslinschen Schemas der Mengen  $M_{n_1 n_1 \dots n_k}^n$ . Wir bilden die Menge der Paare  $(n, n_1)$  eineindeutig ab auf die Menge der natürlichen Zahlen, und setzen, wenn dabei das Paar  $(n, n_1)$  auf die Zahl  $m$  abgebildet wird:  $M_{n_1 n_1 \dots n_k}^n = M_{m n_1 \dots n_k}$ . Dann bilden die Mengen

$M_{n_1, \dots, n_k}$  ein Suslinsches Schema in  $\mathfrak{R}$ , das offenbar disjunkt, und dessen Kern  $A$  ist.

**42-2-11.** Ist jede der Mengen  $A_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in  $\mathfrak{R}$ , so auch  $A = \bigcap_n A_n$ .

Sei  $A_n$  Kern des disjunkten Suslinschen Schemas der Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}^n$ . Ist  $\nu$  die Folge  $\langle (n_k) \rangle$  natürlicher Zahlen und  $M_\nu^n = M_{n_1}^n \cdot M_{n_2}^n \cdot \dots \cdot M_{n_k}^n \cdot \dots$ , so ist nach § 40 (1-1):  $A_n = \bigcap_\nu M_\nu^n$ . Also ist nach dem ersten Distributivgesetze § 2 (2-3):

$$A = \bigcap_n A_n = \bigcap_{\alpha, \beta, \gamma, \dots} M_\alpha^1 \cdot M_\beta^2 \cdot M_\gamma^3 \cdot \dots,$$

wo  $M_\alpha^1 = M_{a_1}^1 \cdot M_{a_1 a_2}^1 \cdot M_{a_1 a_2 a_3}^1 \cdot \dots$ ,  $M_\beta^2 = M_{b_1}^2 \cdot M_{b_1 b_2}^2 \cdot M_{b_1 b_2 b_3}^2 \cdot \dots$ ,  $M_\gamma^3 = M_{c_1}^3 \cdot M_{c_1 c_2}^3 \cdot M_{c_1 c_2 c_3}^3 \cdot \dots$  usf., und  $\alpha = \langle (a_k) \rangle$ ,  $\beta = \langle (b_k) \rangle$ ,  $\gamma = \langle (c_k) \rangle$ , ... für sich alle Folgen natürlicher Zahlen durchlaufen; es ist also ausführlicher geschrieben:

$$A = \bigcap_{\alpha, \beta, \gamma, \dots} M_{a_1}^1 \cdot M_{a_1 a_2}^1 \cdot M_{a_1 a_2 a_3}^1 \cdot \dots \cdot M_{b_1}^2 \cdot M_{b_1 b_2}^2 \cdot M_{b_1 b_2 b_3}^2 \cdot \dots \cdot M_{c_1}^3 \cdot M_{c_1 c_2}^3 \cdot M_{c_1 c_2 c_3}^3 \cdot \dots$$

Wir ordnen in jedem Summanden die Doppelfolge der Faktoren nach Diagonalen (§ 1, 6) in eine einfache Folge:

$$A = \bigcap_{\alpha, \beta, \gamma, \dots} M_{a_1}^1 \cdot M_{a_1 a_2}^1 \cdot M_{b_1}^2 \cdot M_{a_1 a_2 a_3}^1 \cdot M_{b_1 b_2}^2 \cdot M_{c_1}^3 \cdot \dots$$

Nun machen wir die Mengen  $M_{a_1}^1$  ( $a_1 = 1, 2, \dots$ ) zu den Mengen erster Stufe eines Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$ ; der auf  $M_{a_1}^1$  folgende Abschnitt zweiter Stufe von  $\mathfrak{S}$  bestehe aus den Mengen  $M_{a_1 a_2}^1$  ( $a_2 = 1, 2, \dots$ ); jeder Abschnitt dritter Stufe von  $\mathfrak{S}$  bestehe aus den Mengen  $M_{b_1}^2$  ( $b_1 = 1, 2, \dots$ ); jeder auf  $M_{a_1 a_2}^1$  folgende Abschnitt vierter Stufe bestehe aus den Mengen  $M_{a_1 a_2 a_3}^1$  ( $a_3 = 1, 2, \dots$ ), jeder auf  $M_{b_1}^2$  folgende Abschnitt fünfter Stufe aus den Mengen  $M_{b_1 b_2}^2$  ( $b_2 = 1, 2, \dots$ ), jeder Abschnitt sechster Stufe aus den Mengen  $M_{c_1}^3$  ( $c_1 = 1, 2, \dots$ ) usf. Dann ist offenbar  $\mathfrak{S}$  disjunkt und  $A$  der Kern von  $\mathfrak{S}$ .

Sei nun  $E$  ein metrischer Raum. Dann gilt:

**42-2-2.** Jede  $F_\sigma$ -Menge in  $E$  ist Kern eines monotonen disjunkten Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$  in  $E$  abgeschlossener Mengen.

Sei  $A$  ein  $F_\sigma$ , also  $A = \bigcap_{n_1} F_{n_1}$ , wo  $F_{n_1}$  abgeschlossen; die Mengen  $F_{n_1}$  seien die Mengen erster Stufe des gesuchten Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$ .

Setzen wir  $H_0 = A$ ,  $H_{n_1} = \bigcap_{i=1}^{n_1} F_i$  ( $n_1 = 1, 2, \dots$ ), so können wir schreiben:  $A = \bigcap_{n_1} (F_{n_1} - H_{n_1-1})$ , wo nun die Summanden disjunkte  $F_\sigma$  sind; also ist  $F_{n_1} - H_{n_1-1} = \bigcap_{n_2} F_{n_1, n_2}$ , wo die  $F_{n_1, n_2}$  abgeschlossene Mengen bedeuten;

sie seien die Mengen zweiter Stufe von  $\mathfrak{C}$ ; die Abschnittsummen zweiter Stufe  $S_{n_1} = S_{F_{n_1, n_1}} = F_{n_1} - H_{n_1-1}$  sind dann disjunkt, und es ist  $S_{n_1, n_1} = S(F_{n_1} - H_{n_1-1}) = A$ . Setzen wir  $H_{n_1, 0} = A$ ,  $H_{n_1, n_1} = \bigcup_{i=1}^{n_1} F_{n_1, i}$  ( $n_2 = 1, 2, \dots$ ), so können wir schreiben:  $F_{n_1} - H_{n_1-1} = S(F_{n_1, n_2} - H_{n_1, n_2-1})$ , wo wieder die Summanden disjunkte  $F_\sigma$  sind; also ist  $F_{n_1, n_2} - H_{n_1, n_2-1} = S_{n_1, n_2, n_2}$ , wo die  $F_{n_1, n_2, n_2}$  abgeschlossene Mengen bedeuten; sie seien die Mengen dritter Stufe von  $\mathfrak{C}$ ; die Abschnittsummen dritter Stufe  $S_{n_1, n_2} = S_{F_{n_1, n_2, n_2}} = F_{n_1, n_2} - H_{n_1, n_2-1}$  sind dann disjunkt, und es ist:  $S_{n_1, n_2, n_2} = A$ . Indem man so weiter schließt, erhält man ein monotones Suslinsches Schema abgeschlossener Mengen  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , in dem für  $k \geq 2$  die Abschnittsummen  $k$ -ter Stufe disjunkt sind und für alle  $k$ :  $S_{n_1, n_2, \dots, n_k} = A$  ist. Nach 40-1-1 ist also  $A(\mathfrak{C}) = A$ .

**42-2-21.** Ist  $E$  separabel, so ist jede  $F_\sigma$ -Menge in  $E$  Kern eines disjunkten, in  $E$  regulären Suslinschen Schemas.

Wie wir beim Beweise von 40-3-5 sahen, ist jede in  $E$  abgeschlossene Menge Summe abzählbar vieler in  $E$  abgeschlossener Mengen von einem Durchmesser  $\leq \rho$ ; dasselbe gilt daher von jedem  $F_\sigma$  in  $E$ . Wir können also beim Beweise von 42-2-2 annehmen:  $d(F_{n_1, n_2, \dots, n_k}) \leq \frac{1}{k}$ . Dann ist das im Beweise von 42-2-2 angegebene Schema  $\mathfrak{C}$  disjunkt und regulär.

**42-2-3.** Jede Borelsche Menge in  $E$  ist Kern eines monotonen disjunkten Suslinschen Schemas  $\mathfrak{C}$  in  $E$  abgeschlossener Mengen.

Nach 33-4-4 genügt es zu zeigen: ist  $A \in \mathfrak{B}^2(E)$  ( $2 \leq \xi < \omega_1$ ), so ist  $A$  Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in  $E$  abgeschlossener Mengen. Wir beweisen dies durch transfinite Induktion. Da  $\mathfrak{B}^2(E)$  das System der  $F_\sigma$ -Mengen in  $E$  ist, ist die Behauptung nach 42-2-2 richtig für  $\xi = 2$ . Sei  $\xi > 2$ ; angenommen, die Behauptung sei richtig für alle  $\eta < \xi$ ; ist  $A \in \mathfrak{B}^\xi(E)$ , so ist nach 33-3-21 und 33-3-212  $A = S A_\eta$ , wo die  $A_\eta$  disjunkt und  $A_\eta \in \mathfrak{B}_\eta(\eta, < \xi)$ ; dann aber ist  $A_\eta = \bigcup_n A_{\eta, n}$ , wo  $A_{\eta, n} \in \mathfrak{B}^{\eta, n}(\eta, n < \eta, < \xi)$ ; nach Annahme ist also  $A_{\eta, n}$  Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in  $E$  abgeschlossener Mengen, nach 42-2-11 also auch  $A_\eta$ , und nach 42-2-1 auch  $A$ ; und nach 40-1-2 kann  $\mathfrak{C}$  auch monoton angenommen werden.

**42-2-31.** Ist  $E$  separabel, so ist jede Borelsche Menge  $B$  in  $E$  Kern eines disjunkten regulären Suslinschen Schemas in  $E$ .

Nach 42.2.3 ist  $B$  Kern eines monotonen disjunkten Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}'$  in  $E$  abgeschlossener Mengen  $F'_{m_1, m_2, \dots, n_k}$ ; nach 42.2.21 ist  $E$  Kern eines disjunkten regulären Schemas  $\mathfrak{S}''$  in  $E$  abgeschlossener Mengen  $F''_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Wir machen die Durchschnitte  $F'_{m_1} F''_{n_1}$  ( $m_1, n_1 = 1, 2, \dots$ ) zu den Mengen erster Stufe eines Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$ , die Durchschnitte  $F'_{m_1, m_2} F''_{n_1, n_2}$  ( $m_1, m_2, n_1, n_2 = 1, 2, \dots$ ) zu den Mengen zweiter Stufe von  $\mathfrak{S}$ , und zwar so, daß der auf  $F'_{m_1} F''_{n_1}$  folgende Abschnitt zweiter Stufe aus den Mengen  $F'_{m_1, m_2} F''_{n_1, n_2}$  ( $m_2, n_2 = 1, 2, \dots$ ) besteht; die Durchschnitte  $F'_{m_1, m_2, m_3} F''_{n_1, n_2, n_3}$  machen wir zu den Mengen dritter Stufe von  $\mathfrak{S}$ , und zwar so, daß der auf  $F'_{m_1, m_2} F''_{n_1, n_2}$  folgende Abschnitt dritter Stufe aus den Mengen  $F'_{m_1, m_2, m_3} F''_{n_1, n_2, n_3}$  ( $m_3, n_3 = 1, 2, \dots$ ) besteht usf. Da  $\mathfrak{S}'$  monoton und  $\mathfrak{S}''$  regulär, ist offenbar auch  $\mathfrak{S}$  regulär; da  $\mathfrak{S}'$  und  $\mathfrak{S}''$  disjunkt, ist auch  $\mathfrak{S}$  disjunkt; und es ist  $A(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S}') A(\mathfrak{S}'') = B E = B$ .

**42.2.32.** Ist  $E$  separabel und vollständig, so ist, damit  $B$  eine Borelsche Menge in  $E$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $B$  Kern eines disjunkten Suslinschen Schemas in  $E$  abgeschlossener Mengen sei.

Notwendig: Dies ist enthalten in 42.2.3. Hinreichend: Sei  $\mathfrak{S}$  ein disjunkttes Suslinsches Schema in  $E$  abgeschlossener Mengen  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  und  $B = A(\mathfrak{S})$ ; nach 40.1.2 können wir  $\mathfrak{S}$  als monoton voraussetzen. Bezeichnen wir mit  $\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  das von den Nachfolgern der Menge  $F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  gebildete Suslinsche Schema (§ 40, 1) und setzen  $A(\mathfrak{S}_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , so ist, weil  $\mathfrak{S}$  monoton, auch das Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}$  der Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  monoton; ferner bilden, weil  $\mathfrak{S}$  disjunkt, für jedes  $k$  die Mengen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ein abzählbares disjunkttes System in  $E$  analytischer Mengen; nach 42.1.2 und 42.1.1 gibt es also für jedes  $k$  ein System disjunkter Mengen  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{B}(E)$ , so daß  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ; dabei können wir, da  $\mathfrak{S}$  monoton, noch  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ersetzen durch  $B_{n_1} B_{n_2} \dots B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , und können somit auch das Suslinsche Schema der Mengen  $B_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  als monoton annehmen. Setzen wir  $C_{n_1, n_2, \dots, n_k} = B_{n_1, n_2, \dots, n_k} \cdot F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , so ist also auch das Suslinsche Schema  $\mathfrak{S}'$  der Mengen  $C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  monoton; ferner bilden für jedes  $k$  auch die Mengen  $C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ein disjunkttes System Borelscher Mengen in  $E$ . Wegen  $A_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \subseteq F_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  ist  $A(\mathfrak{S}) \subseteq A(\mathfrak{S}') \subseteq A(\mathfrak{S})$ . Da nach 40.1.4  $A(\mathfrak{S}) = A(\mathfrak{S})$ , ist also auch  $A(\mathfrak{S}') = A(\mathfrak{S}) = B$ ; setzen wir noch  $C^{(k)} = \bigcup_{n_1, n_2, \dots, n_k} C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , so ist nach 40.1.1:  $B = A(\mathfrak{S}') = \bigcup_k C^{(k)}$ ; wegen  $C_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{B}(E)$  ist aber auch  $C^{(k)} \in \mathfrak{B}(E)$ , also auch  $B \in \mathfrak{B}(E)$ .



Literatur: N. Lusin, C. R. 164 (1917) S. 91. F. Hausdorff, Mengenlehre S. 184.

**3. Abbildungssätze.** Wir behandeln nun, wie schon in § 33, 6 angekündigt, eingehender die Abbildung Borelscher Mengen. Gibt es eine schlichte (§ 1, 5) stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so sagen wir,  $B$  sei schlichtes stetiges Bild von  $A$ . Mit  $R_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  bezeichnen wir die Punktmenge des  $R_0$ , die aus allen mit  $n_1, n_2, \dots, n_k$  beginnenden Folgen  $((n_i))$  natürlicher Zahlen besteht. In Analogie zu 40-5-4 gilt:

**42-3-1.** *Damit die Menge  $B$  schlichtes stetiges Bild einer abgeschlossenen Menge  $C$  des  $R_0$  sei, ist notwendig und hinreichend, daß sie eine separable, absolut Borelsche Menge sei.*

Notwendig: Sei  $P$  eine schlichte stetige Abbildung von  $C$  auf  $B$ . Nach 23-1-31 ist  $B$  separabel, und nach 18-4-61 können wir annehmen,  $B$  sei Punktmenge eines vollständigen, separablen Raumes  $E$ . Wir setzen  $C \cdot R_{n_1, n_2, \dots, n_k} = C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  und bezeichnen mit  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  die abgeschlossene Hülle in  $E$  von  $P(C_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ , mit  $\mathfrak{C}$  das Suslinsche Schema der Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Wir zeigen nun, daß  $B = A(\mathfrak{C})$ ; wir haben also zu zeigen: ist  $b \in B$ , so auch  $b \in A(\mathfrak{C})$ , und ist  $b \in A(\mathfrak{C})$ , so auch  $b \in B$ . — Sei  $\nu = ((n_k))$ ,  $M_\nu = M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \dots$ ; dann ist  $A(\mathfrak{C}) = \bigcup_\nu M_\nu$ , wo sich die Summation über alle Folgen  $\nu$  natürlicher Zahlen erstreckt. Sei nun  $b \in B$ ; dann gibt es ein  $\nu \in C$ , so daß  $b = P(\nu)$ ; ist  $\nu = ((n_k))$ , so ist  $\nu \in C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  für alle  $k$ , also  $b \in P(C_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ , also auch  $b \in M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  für alle  $k$ , also  $b \in M_\nu$ , also  $b \in A(\mathfrak{C})$ . — Sei umgekehrt  $b \in A(\mathfrak{C})$ ; dann gibt es ein  $\nu$ , so daß  $b \in M_\nu$ ; ist  $\nu = ((n_k))$ , so ist also  $b \in M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  für alle  $k$ ; da  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  die abgeschlossene Hülle von  $P(C_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ , gibt es also ein  $b_k \in P(C_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ , so daß  $b_k b < \frac{1}{k}$ ; ist  $\nu_k = P^{-1}(b_k)$ , so ist  $\nu_k \in C_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ ; mithin gilt  $\nu_k \rightarrow \nu$ ; da  $\nu_k \in C$  und  $C$  abgeschlossen, ist  $\nu \in C$ , und wegen der Stetigkeit von  $P$  gilt  $P(\nu_k) \rightarrow P(\nu)$ , d. h.  $b_k \rightarrow P(\nu)$ ; wegen  $b_k b < \frac{1}{k}$  ist also  $b = P(\nu)$ , also  $b \in B$ . Damit ist gezeigt, daß  $B = A(\mathfrak{C})$ , und es ist weiter gezeigt: ist  $b \in M_\nu$ , so ist  $\nu \in C$  und  $b = P(\nu)$ ; d. h. es ist  $M_\nu = \{P(\nu)\}$ . — Daraus folgt nun weiter, daß das Schema  $\mathfrak{C}$  disjunkt ist; denn ist  $\nu \neq \nu'$ , so ist, weil  $P$  schlicht, auch  $P(\nu) \neq P(\nu')$ , also sind  $M_\nu$  und  $M_{\nu'}$  fremd. Da  $B = A(\mathfrak{C})$  war, ist also nach 42-2-32  $B$  eine Borelsche Menge in  $E$ , und da  $E$  vollständig, ist  $B$  eine absolut Borelsche Menge. Hinreichend: Sei  $B$  eine separable, absolut Borelsche Menge; nach 18-4-61 gibt es einen separablen, vollständigen Raum  $E \supseteq B$ ; nach 42-2-31 ist  $B$  Kern eines

disjunkten regulären Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$  in  $E$ ; nach 40.5.31 gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  der dem Schema  $\mathfrak{S}$  entsprechenden Menge  $C$  des  $R_0$  auf die Menge  $B$ , und nach 40.5.3 ist  $C$  abgeschlossen; da das Schema  $\mathfrak{S}$  disjunkt, ist offenbar die im Beweise von 40.5.31 angegebene eindeutige stetige Abbildung  $P$  von  $C$  auf  $B$  schlicht. Also ist  $B$  schlichtes stetiges Bild von  $C$ .

**42.3.2.** Ist  $B$  eine unabzählbare separable, absolut Borelsche Menge, so gibt es einen abzählbaren Teil  $B'$  von  $B$ , so daß  $B - B'$  schlichtes stetiges Bild des  $R_0$  ist.

Nach 42.3.1 gibt es eine schlichte, stetige Abbildung  $P$  einer abgeschlossenen Menge  $C$  des  $R_0$  auf  $B$ . Nach 24.2.21 und 24.2.2 kann  $C$  zerlegt werden in zwei fremde Summanden  $C = C' + C''$ , so daß  $C'$  abzählbar,  $C''$  homöomorph dem  $R_0$ . Sei  $Q$  eine homöomorphe Abbildung des  $R_0$  auf  $C''$ , und sei  $P'' = C'' \cap P$ ; dann ist  $Q|P''$  eine schlichte, stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $P(C'')$ . Da  $P(C'') = B - P(C')$  und  $P(C')$  abzählbar, ist die Behauptung bewiesen.

**42.3.3.** Ist  $B$  schlichtes stetiges Bild der separablen, absolut Borelschen Menge  $A$ , so ist auch  $B$  eine separable, absolut Borelsche Menge.

Der Beweis ist, bei Beachtung von 42.3.1, analog dem von 40.5.5.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 3 (1922) S.30; Mathem. Cluj 1 (1929) S. 18.

**4. Halbschlichte Abbildungen.** Die eindeutige Abbildung  $P$  von  $A$  auf  $B$  heiße halbschlicht, wenn es keine Punkte unabzählbarer Vielfachheit von  $P$  gibt (§ 41, 4), d. h. wenn jeder Punkt  $b \in B$  nur abzählbar viele Urbilder hat. Gibt es eine halbschlichte stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so nennen wir  $B$  ein halbschlichtes stetiges Bild von  $A$ . Wir werden zeigen, daß ein Analogon zu Satz 42.3.3 auch für halbschlichte Abbildungen gilt. Dazu benötigen wir einige Hilfsbetrachtungen.

**42.4.1.** Sei  $E$  ein vollständiger Raum,  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge,  $P$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $A$  auf die Menge  $B \subseteq E$ ; sind  $A_1, A_2, \dots, A_n$  Borelsche Mengen in  $A$ , und bedeutet  $C_i$  die Menge aller mindestens zweifachen Punkte von  $A_i \cap P$ , so ist jede zu einer der Mengen  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) fremde, in  $E$  analytische Menge  $M \subseteq P(A_1) \cup P(A_2) \cup \dots \cup P(A_n)$   $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ .

Da  $A_i$  separabel, ist nach 23.1.31 auch  $P(A_i)$ , mithin auch  $C_i$  und  $M$  separabel. Nach 33.5.2 ist  $A_i$  eine absolut Borelsche Menge; nach 41.4.1 ist somit  $C_i$  analytisch in  $E$ . Da  $C_i \cap M = \emptyset$ , gibt es nach 42.1.2 eine zu  $C_i$  fremde Borelsche Menge  $N$  in  $E$ , so daß  $M \subseteq N$ . Dann ist nach 33.4.7  $N \cap P(A_i)$  eine Borelsche Menge in  $P(A_i)$ ; setzen wir  $K = (A_i \cap P)^{-1}(N \cap P(A_i))$ , so ist also

nach 33-6-1  $K$  eine Borelsche Menge in  $A_1$ , also nach 33-5-2 eine separable, absolut Borelsche Menge. Da  $K \subseteq A_1$ ,  $P(K) C_1 = A$ , ist  $K \mid P$  eine schlichte stetige Abbildung, also ist nach 42-3-3  $P(K) = N P(A_1)$  eine absolut Borelsche Menge; wegen  $M \subseteq N$ ,  $M \subseteq P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$  ist  $M \subseteq N P(A_1)$ , und wegen  $N P(A_1) \subseteq B$  ist  $E - B \subseteq E - N P(A_1)$ ; d. h.  $M$  ist  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ .

Behalten wir die Bezeichnungsweise von Satz 42-4-1 bei, und setzen  $P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n) = D_0$ ,  $D_0 C_1 C_2 \dots C_k = D_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), so gilt:

**42-4-2.** Ist  $D_k$   $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ , so auch  $D_{k-1}$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ).

Nach Annahme gibt es eine Borelsche Menge  $B'$  in  $E$ , so daß  $D_k \subseteq B'$ ,  $B' (E - B) = A$ . Nach 40-5-5 ist  $D_0$  analytisch in  $E$ , nach 41-4-1 sind die Mengen  $C_i$  analytisch in  $E$ , und da  $B'$  eine Borelsche Menge in  $E$ , ist nach 40-3-3 auch  $E - B'$  analytisch in  $E$ ; also ist auch  $D_{k-1} - B' = D_0 C_1 C_2 \dots C_{k-1} (E - B')$  analytisch in  $E$ ; und da  $D_{k-1} - B'$  wegen  $D_k \subseteq B'$  fremd zu  $C_k$ , ist nach 42-4-1  $D_{k-1} - B'$   $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ ; wegen  $B' (E - B) = A$  ist auch  $D_{k-1} B'$   $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ , also nach 42-1-11 auch  $D_{k-1} = D_{k-1} B' + (D_{k-1} - B')$ .

**42-4-21.** Ist  $C_1 C_2 \dots C_n$   $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ , so ist auch die Menge  $D_0 = P(A_1) P(A_2) \dots P(A_n)$   $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ .

Dies folgt aus 42-4-2 wegen  $C_1 C_2 \dots C_n = D_n$ .

Wir bezeichnen nun mit  $R_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  die Menge aller Punkte des  $R_0$ , die dargestellt sind durch eine mit den Gliedern  $n_1, n_2, \dots, n_k$  beginnende Folge  $((n_i))$  natürlicher Zahlen. Jede Menge  $R_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  bezeichnen wir als ein Intervall des  $R_0$ , und zwar als ein Intervall  $k$ -ter Stufe; jedes solche Intervall ist nach § 33 (8) abgeschlossen im  $R_0$ , also nach 18-2-22, 18-5-11 vollständig; ferner ist nach § 9 (3-4):  $d(R_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = \frac{1}{k+1}$ .

**42-4-3.** Sei  $E$  ein vollständiger Raum und  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung des  $R_0$  auf die Menge  $B \subseteq E$ ; ist dann  $B$  keine Borelsche Menge in  $E$ , so gibt es ein disjunktes dyadisches Schema, in dem jede Menge  $k$ -ter Stufe  $A_{i_1, i_2, \dots, i_k}$  ein Intervall mindestens  $k$ -ter Stufe des  $R_0$  ist, und für jedes  $k$  der Durchschnitt der  $2^k$  Mengen  $P(A_{i_1, i_2, \dots, i_k})$  ( $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1$ ) nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$  ist.

Da  $B$  keine Borelsche Menge in  $E$ , ist  $B$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ . Nach 42-4-21 (für  $n = 1$ ) ist also auch die Menge  $C$  aller mindestens zweifachen Punkte von  $P$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ . Ist  $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$  die Menge aller Intervalle des  $R_0$ , so ist  $C = S P(I_{n_1}) P(I_{n_2})$ , wo sich die Summation über alle Paare  $I_{n_1}, I_{n_2}$  fremder Intervalle erstreckt; nach

42.1.11 ist also mindestens ein Summand  $P(I_{n_1})P(I_{n_2})$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ ; d. h. es gibt zwei fremde Intervalle  $A_0, A_1$  des  $R_0$ , so daß  $P(A_0)P(A_1)$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ . Bezeichnet dann  $C_{i_1}$  ( $i_1 = 0, 1$ ) die Menge aller mindestens zweifachen Punkte von  $A_{i_1} \cap P$ , so ist nach 42.4.21  $C_0 C_1$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ . Nun ist  $C_0 C_1 = SP(I_{n_1})P(I_{n_2})P(I_{n_3})P(I_{n_4})$ , wo sich die Summation über alle Quadrupel  $I_{n_1}, I_{n_2}, I_{n_3}, I_{n_4}$  disjunkter Intervalle erstreckt, von denen  $I_{n_1} \subset A_0, I_{n_2} \subset A_0, I_{n_3} \subset A_1, I_{n_4} \subset A_1$ ; nach 42.1.11 ist also mindestens ein Summand  $P(I_{n_1})P(I_{n_2})P(I_{n_3})P(I_{n_4})$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ ; d. h. es gibt in  $A_{i_1}$  ( $i_1 = 0, 1$ ) zwei fremde Intervalle  $A_{i_1,0}, A_{i_1,1}$ , so daß  $P(A_{0,0})P(A_{0,1})P(A_{1,0})P(A_{1,1})$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ ; die vier Intervalle  $A_{i_1,i_2}$  ( $i_1, i_2 = 0, 1$ ) des  $R_0$  sind von mindestens zweiter Stufe. Bezeichnet nun  $C_{i_1,i_2}$  die Menge aller mindestens zweifachen Punkte von  $A_{i_1,i_2} \cap P$ , so ist nach 42.4.21  $C_{00}C_{01}C_{10}C_{11}$  nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ ; daraus folgt wieder: es gibt in  $A_{i_1,i_2}$  zwei fremde Intervalle  $A_{i_1,i_2,0}, A_{i_1,i_2,1}$  von mindestens dritter Stufe, so daß der Durchschnitt der acht Mengen  $P(A_{i_1,i_2,i_3})$  ( $i_1, i_2, i_3 = 0, 1$ ) nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$ . Indem man so weiter schließt, erhält man das gewünschte dyadische Schema der Mengen  $A_{i_1,i_2,\dots,i_k}$ .

**42.4.4.** Jedes halbschlichte stetige Bild  $B$  des  $R_0$  ist eine absolut Borelsche Menge.

Sei  $P$  eine eindeutige stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $B$ . Nach 18.4.6 gibt es einen vollständigen Raum  $E \supseteq B$ . Angenommen, es wäre  $B$  keine Borelsche Menge in  $E$ ; sei dann  $D$  das durch das disjunkte dyadische Schema  $\mathfrak{S}$  von Satz 42.4.3 dargestellte dyadische Diskontinuum (§ 18, 9); wir zeigen, daß  $P(a') = P(a'')$  für je zwei Punkte  $a' \in D, a'' \in D$ . Wäre nämlich  $P(a') \neq P(a'')$ , und sind  $A'_{i_1}i'_{i_2}\dots i'_k$  bzw.  $A''_{i_1}i''_{i_2}\dots i''_k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) die den Punkt  $a'$  bzw.  $a''$  enthaltenden Mengen des Schemas  $\mathfrak{S}$ , so wäre wegen  $d(A'_{i_1}i'_{i_2}\dots i'_k) \rightarrow 0, d(A''_{i_1}i''_{i_2}\dots i''_k) \rightarrow 0$  und wegen der Stetigkeit von  $P$ :

$$P(A'_{i_1}i'_{i_2}\dots i'_k)P(A''_{i_1}i''_{i_2}\dots i''_k) = 1 \text{ für fast alle } k,$$

es wäre also auch der Durchschnitt der  $2^k$  Mengen  $P(A_{i_1,i_2,\dots,i_k})$  ( $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1$ ) leer für fast alle  $k$ , was unmöglich, weil für jedes  $k$  dieser Durchschnitt nicht  $\mathfrak{B}$ -trennbar von  $E - B$  ist. Da also  $P(a') = P(a'')$  für alle  $a' \in D, a'' \in D$ , und da nach 18.9.1  $D$  die Mächtigkeit  $\aleph$  hat, kann  $P$  nicht halbschlicht sein. Ist also  $P$  halbschlicht, so ist  $B$  eine Borelsche Menge in  $E$ , also eine absolut Borelsche Menge.

**42.4.41.** Jedes halbschlichte stetige Bild  $B$  einer separablen, absolut Borelschen Menge  $A$  ist eine absolut Borelsche Menge.

Da jede abzählbare Menge eine absolut Borelsche Menge ist, bedarf dies eines Beweises nur, wenn  $A$  un abzählbar ist. Dann gibt es nach 42-3-2 einen abzählbaren Teil  $A'$  von  $A$ , so daß  $A - A'$  schlichtes stetiges Bild des  $R_0$ . Sei  $P$  eine schlichte stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $A - A'$  und  $Q$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ ; setzen wir  $(A - A') \cap Q = Q'$ , so ist  $P|Q'$  eine halbschlichte stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $Q(A - A')$ ; also ist nach 42-4-4  $Q(A - A')$  eine absolut Borelsche Menge; und da  $B = Q(A - A') + Q(A')$  und  $Q(A')$  abzählbar, ist auch  $B$  eine absolut Borelsche Menge.

**42-4-5.** Ist  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge des Raumes  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , und ist jede Schicht  $A_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) abzählbar, so ist auch die Projektion  $A'$  von  $A$  in den Raum  $E^{(2)}$  eine absolut Borelsche Menge.

Dies folgt aus 42-4-41, denn ordnen wir jedem Punkte  $a \in A$  seine Projektion in den Raum  $E^{(2)}$  zu, so ist dies eine halbschlichte stetige Abbildung von  $A$  auf  $A'$ .

Wir nennen die Funktion  $f$  auf  $A$  schlicht, wenn sie keine mehrfachen Werte hat, d. h. wenn es zu jedem  $y \in \bar{R}_1$  höchstens ein  $a \in A$  mit  $f(a) = y$  gibt. Wir nennen die Funktion  $f$  auf  $A$  halbschlicht, wenn sie keine Werte un abzählbarer Vielfachheit hat, d. h. wenn es zu jedem  $y \in \bar{R}_1$  nur abzählbar viele  $a \in A$  mit  $f(a) = y$  gibt.

**42-4-6.** Ist  $f(x)$  eine halbschlichte Bairesche Funktion auf der separablen, absolut Borelschen Menge  $A$ , so ist ihre Wertmenge eine Borelsche Menge des  $\bar{R}_1$ .

Nach 18-4-61 gibt es einen separablen vollständigen Raum  $E \supseteq A$ . Nach 35-9-3 ist die Menge  $[f(x) = y]$  eine Borelsche Menge in  $A \times R_1$ ; wie beim Beweise von 41-3-1 sieht man, daß sie auch eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , also eine separable, absolut Borelsche Menge ist. Die Wertmenge von  $f$  ist die Projektion von  $[f(x) = y]$  in den  $\bar{R}_1$ , und da  $f$  halbschlicht, folgt die Behauptung aus 42-4-5.

Umgekehrt gilt:

**42-4-7.** Jede Borelsche Menge des  $R_1$  ist die Wertmenge einer schlichten stetigen Funktion auf einer abgeschlossenen Menge des  $R_0$ .

Dies ist ein Spezialfall von 42-3-1.

**42-4-8.** Ist  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge, und ist  $P$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so ist für jedes  $k$  die Menge  $B_k$  aller mindestens  $k$ -fachen Punkte von  $P$  eine absolut Borelsche Menge.

Der Beweis ist analog dem von 41-4-1; nur sind jetzt die dort mit  $P(H)$  bezeichneten Mengen nach 42-4-41 absolut Borelsche Mengen.

**42-4-81.** Ist  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge, und ist  $P$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so ist für jedes  $k$  die Menge  $B'_k$  aller  $k$ -fachen Punkte von  $P$  eine absolut Borelsche Menge.

Denn ist  $B_k$  die Menge aller mindestens  $k$ -fachen Punkte von  $P$ , so ist  $B'_k = B_k - B_{k-1}$ ; die Behauptung folgt also aus 42-4-8.

**42-4-82.** Ist  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge, und ist  $P$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $A$  auf  $B$ , so ist die Menge aller Punkte unendlicher Vielfachheit von  $P$  eine absolut Borelsche Menge.

Der Beweis ist analog dem von 41-4-2.

**42-4-9.** Ist  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge des Raumes  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , und ist jede Schicht  $A_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) abzählbar, so ist die Menge aller  $b \in E^{(2)}$ , für die die Schicht  $A_b^{(1)}$  aus mindestens  $k$  (bzw. aus  $k$ , bzw. aus unendlich vielen) Punkten besteht, eine absolut Borelsche Menge.

Dies ist enthalten in 42-4-8 (bzw. in 42-4-81, bzw. in 42-4-82).

**42-4-91.** Ist  $f(x)$  eine halbschlichte Bairesche Funktion auf der separablen, absolut Borelschen Menge  $A$ , so ist die Menge aller mindestens  $k$ -fachen Werte (bzw. aller  $k$ -fachen Werte, bzw. aller Werte unendlicher Vielfachheit) von  $f$  eine Borelsche Menge des  $\bar{R}_1$ .

Der Beweis ist, unter Berufung auf 42-4-9, analog dem von 42-4-6.

Literatur: N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 171ff.

**5. Borelsche Mengen, deren Schichten abzählbar sind.** Wir betrachten nun Borelsche Mengen  $A$  in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , deren jede Schicht  $A_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) abzählbar ist. Wir beweisen zunächst einige Hilfsätze.

Sei  $A$  eine beliebige Menge  $\subseteq E^{(1)} \times E^{(2)}$ ; wir bezeichnen die  $\xi$ -te Kohärenz (§ 12, 8) der Schicht  $A_b^{(1)}$  ( $b \in E^{(2)}$ ) mit  $A_{b\xi}$ . Dann gilt:

**42-5-1.** Ist  $E^{(1)}$  separabel und vollständig, und gibt es zu jedem  $\xi < \omega_1$  ein  $b \in E^{(2)}$ , so daß  $A_{b\xi} \supset \Lambda$ , so gibt es in  $E^{(1)}$  ein disjunktes dyadisches Schema bestehend aus Mengen  $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$  von folgender Art: zu jedem  $k$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) und zu jeder Ordinalzahl  $\xi < \omega_1$  gibt es ein  $b \in E^{(2)}$ , so daß jeder der  $2^k$  Durchschnitte  $A_{b\xi} C_{i_1 i_2 \dots i_k} \supset \Lambda$  ( $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1$ ).

Da  $E^{(1)}$  vollständig, ist nach 18-5-11 jede in  $E^{(1)}$  abgeschlossene Menge vollständig; da  $E^{(1)}$  separabel, gibt es (für jedes  $n$ ) unter den Kugeln  $K_a \frac{1}{n}$  ( $a \in E^{(1)}$ ) des Raumes  $E^{(1)}$  nach 13-3-1 abzählbar viele, die  $E^{(1)}$  überdecken, etwa:  $K_{n1}, K_{n2}, \dots, K_{nm}, \dots$ ; seien  $K_1, K_2, \dots, K_r, \dots$  die sämtlichen Kugeln  $K_{nm}$  ( $n, m = 1, 2, \dots$ ) und sei  $K_\nu^0$  die abgeschlossene Hülle von  $K_\nu$ . Wir zeigen: es gibt unter den  $K_\nu$  zwei Kugeln  $K_{\nu_0}, K_{\nu_1}$  von folgenden Eigenschaften:

1.  $K_{\nu_1}^0 K_{\nu_1}^0 = A$ ; 2. zu jedem  $\xi < \omega_1$  gibt es ein  $b \in E^{(2)}$ , so daß  $A_{b\xi} K_{\nu_1} \supset A$ ,  $A_{b\xi} K_{\nu_1} \supset A$ . In der Tat, anderenfalls gäbe es zu jedem Paare  $K_{\nu'}, K_{\nu''}$  mit  $K_{\nu'}^0 K_{\nu''}^0 = A$  eine Ordinalzahl  $\xi_{\nu', \nu''} < \omega_1$ , so daß für jedes  $b \in E^{(2)}$  mindestens einer der beiden Durchschnitte  $A_{b\xi_{\nu', \nu''}} K_{\nu'}$ ,  $A_{b\xi_{\nu', \nu''}} K_{\nu''}$  leer ist; nach 8-4-1 gäbe es ein  $\xi^* < \omega_1$ , so daß alle  $\xi_{\nu', \nu''} < \xi^*$ ; dann wäre auch für je zwei Kugeln  $K_{\nu'}, K_{\nu''}$  mit  $K_{\nu'}^0 K_{\nu''}^0 = A$  und für jedes  $b \in E^{(2)}$  mindestens einer der beiden Durchschnitte  $A_{b\xi^*} K_{\nu'}$ ,  $A_{b\xi^*} K_{\nu''}$  leer; dann aber enthielte  $A_{b\xi^*}$  für jedes  $b \in E^{(2)}$  höchstens einen Punkt, es wäre also  $A_{b\xi^*+1} = A$  für alle  $b \in E^{(2)}$ , entgegen der Voraussetzung. — Nun nehmen wir an, es seien unter den  $2^k$  Kugeln  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$  ( $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1$ ) von folgenden Eigenschaften gefunden: 1. ihre abgeschlossenen Hüllen  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}^0$  sind disjunkt; 2. zu jedem  $\xi < \omega_1$  gibt es ein  $b \in E^{(2)}$ , so daß jeder der  $2^k$  Durchschnitte  $A_{b\xi} K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}} \supset A$ . Wir zeigen: dann gibt es unter den Kugeln  $2^{k+1}$  Kugeln  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}} \subseteq K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$  ( $i_{k+1} = 0, 1$ ) mit Radien  $\leq \frac{1}{k}$ , von folgenden Eigenschaften: 1. ihre abgeschlossenen Hüllen  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}}^0$  sind disjunkt; 2. zu jedem  $\xi < \omega_1$  gibt es ein  $b \in E^{(2)}$ , so daß jeder der  $2^{k+1}$  Durchschnitte  $A_{b\xi} K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}} \supset A$ . In der Tat, anderenfalls gäbe es zu jedem Systeme  $K_{\nu_{(\lambda)}}$  ( $\lambda = 1, 2, \dots, 2^{k+1}$ ) von  $2^{k+1}$  Kugeln  $K_{\nu}$ , deren abgeschlossene Hüllen disjunkt, deren Radien  $\leq \frac{1}{k}$  sind, und von denen je zwei in jeder der  $2^k$  Kugeln  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$  liegen, einen Index  $\xi_{\nu_{(1)}, \nu_{(2)}, \dots, \nu_{(2^{k+1})}} < \omega_1$ , so daß für jedes  $b \in E^{(2)}$  mindestens einer der  $2^{k+1}$  Durchschnitte  $A_{b\xi_{\nu_{(1)}, \nu_{(2)}, \dots, \nu_{(2^{k+1})}}} K_{\nu_{(\lambda)}}$  leer ist; nach 8-4-1 gäbe es ein  $\xi^* < \omega_1$ , so daß alle  $\xi_{\nu_{(1)}, \nu_{(2)}, \dots, \nu_{(2^{k+1})}} < \xi^*$ ; dann wäre auch für jedes der genannten Systeme von  $2^{k+1}$  Kugeln  $K_{\nu_{(\lambda)}}$  mindestens einer der  $2^{k+1}$  Durchschnitte  $A_{b\xi^*} K_{\nu_{(\lambda)}}$  leer; dann aber enthielte  $A_{b\xi^*}$  für jedes  $b \in E^{(2)}$  von mindestens einer der  $2^k$  Kugeln  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$  höchstens einen Punkt, für jedes  $b \in E^{(2)}$  wäre also mindestens einer der  $2^k$  Durchschnitte  $A_{b\xi^*+1} K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}} = A$ , entgegen der Art, wie die Kugeln  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$  gewählt waren. — Damit ist gezeigt, daß es unter den  $K_{\nu}$  für jedes  $k$  ein System von  $2^k$  Kugeln  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$  ( $i_1, i_2, \dots, i_k = 0, 1$ ) mit Radien  $\leq \frac{1}{k-1}$  und mit den Eigenschaften 1. und 2. gibt, und es ist  $K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k i_{k+1}}} \subseteq K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}$ . Setzen wir nun  $C_{i_1 i_2 \dots i_k} = K_{\nu_{i_1 i_2 \dots i_k}}^0$ , so haben wir das gesuchte disjunkte dyadische Schema.

Sei nun  $P$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $E^{(1)}$  auf eine Punktmenge  $B \subseteq E^{(2)}$ ; die Menge aller Punkte  $(x, P(x))$  von  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  ( $x \in E^{(1)}$ ) bezeichnen wir mit  $A$ ; dann ist für jedes  $b \in B$  die Schicht  $A_b = A_b^{(1)}$  von  $A$  auch die Urbildmenge  $P^{-1}(b)$  von  $b$ , also abzählbar. Wir zeigen nun:

**42-5-2.** Ist  $E^{(1)}$  separabel und vollständig, und ist  $P$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $E^{(1)}$  auf eine Punktmenge  $B \subseteq E^{(2)}$ , so gibt es eine Ordinalzahl  $\gamma < \omega_1$ , so daß für jedes  $b \in B$  die  $\gamma$ -te Kohärenz  $A_b$  des Urbildes  $A_b$  von  $b$  leer ist.

Anderenfalls gäbe es zu jedem  $\xi < \omega_1$  ein  $b \in B$ , so daß  $A_{b\xi} \supset A$ ; nach 42-5-1 gäbe es dann in  $E^{(1)}$  ein disjunktes dyadisches Schema bestehend aus Mengen  $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$ , so daß zu jedem  $k$  und zu jedem  $\xi < \omega_1$  ein  $b \in B$  gehört, für das jeder der  $2^k$  Durchschnitte  $A_{b\xi} C_{i_1 i_2 \dots i_k} \supset A$ , und mithin auch  $A_{b\xi} C_{i_1 i_2 \dots i_k} \supset A$  ist. Sei  $C$  das durch das dyadische Schema der  $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$  dargestellte dyadische Diskontinuum; dann müssen alle  $x \in C$  dasselbe Bild  $P(x)$  haben; denn anderenfalls gäbe es zwei Punkte  $x' \in C$ ,  $x'' \in C$  mit  $P(x') \neq P(x'')$ ; ist dann  $x'$  der Punkt  $x_{(i'_1)}$  und  $x''$  der Punkt  $x_{(i''_1)}$  von  $C$  (§ 18, 7), so wäre wegen  $x' \in C_{i'_1 i'_2 \dots i'_k}$ ,  $x'' \in C_{i''_1 i''_2 \dots i''_k}$  und wegen der Stetigkeit von  $P$  für fast alle  $k$ :  $P(C_{i'_1 i'_2 \dots i'_k}) \cdot P(C_{i''_1 i''_2 \dots i''_k}) = A$ ; dann aber wäre für jedes  $b \in B$  mindestens einer der beiden Durchschnitte  $A_{b\xi} C_{i'_1 i'_2 \dots i'_k}$ ,  $A_{b\xi} C_{i''_1 i''_2 \dots i''_k}$  leer, entgegen der Art, wie das dyadische Schema der  $C_{i_1 i_2 \dots i_k}$  gewählt war. — Da also alle  $x \in C$  dasselbe Bild  $P(x)$  haben, und da nach 18-9-1  $C$  un abzählbar ist, wäre  $P$  nicht halbschlicht, entgegen der Annahme.

**42-5-3.** Ist  $E$  separabel und vollständig, und ist  $P$  eine halbschlichte stetige Abbildung von  $E$ , so gibt es abzählbar viele Borelsche Mengen  $M$ , in  $E$ , so daß  $E = S M$ , und  $M, \perp P$  schlicht.

Wir bezeichnen wieder mit  $B$  das Bild  $P(E)$  von  $E$ , mit  $A_b$  die Urbildmenge  $P^{-1}(b)$  des Punktes  $b \in B$ , mit  $A_{b\eta}$  die  $\eta$ -te Kohärenz von  $A_b$ ; dann ist  $E = S_{b \in B} A_b$ . Nach 42-5-2 gibt es ein  $\gamma < \omega_1$ , so daß  $A_{b\gamma} = A$  für alle  $b \in B$ ; nach § 12 (8-2) ist also  $A_b = S_{\eta < \gamma} (A_{b\eta} - A_{b\eta+1})$ . Wir setzen nun:  $E_\eta = S_{b \in B} (A_{b\eta} - A_{b\eta+1})$ ,  $E_\eta^* = S_{b \in B} A_{b\eta}$  ( $\eta < \gamma$ ); dann ist  $E_\eta^* = E_{\eta+1}^* + E_\eta$ ,  $E = S_{\eta < \gamma} E_\eta$ . Es genügt also, zu zeigen: es gibt für jedes  $\eta < \gamma$  abzählbar viele Borelsche Mengen  $N_\eta$  in  $E$ , so daß  $E_\eta = S N_\eta$ , und  $N_\eta, \perp P$  schlicht. — Zu jedem  $a \in E_\eta$  gibt es nach Definition von  $E_\eta$  ein  $b \in B$ , so daß  $a \in A_{b\eta} - A_{b\eta+1}$ ; nach Definition der Kohärenzen (§ 12, 8) ist dann  $a$  isolierter Punkt von  $A_{b\eta}$ ; bezeichnet also  $H_1, H_2, \dots, H_i, \dots$  ein abzählbares



ausgezeichnetes System in  $E$  offener Mengen (§ 13, 1), so gibt es ein  $H_i$ , so daß  $a$  der einzige Punkt von  $H_i, A_{b\eta}$ , also auch der einzige Punkt  $x \in H_i, E_\eta^*$  mit  $P(x) = b$ ; setzen wir  $H_i, E_\eta^* \cap P = P_{\eta i}$ , so ist demnach  $b$  einfacher Punkt von  $P_{\eta i}$ ; ist umgekehrt  $b$  einfacher Punkt von  $P_{\eta i}$ , so ist  $P_{\eta i}^{-1}(b)$  isolierter Punkt von  $A_{b\eta}$ , also  $P_{\eta i}^{-1}(b) \in A_{b\eta} - A_{b\eta+1}$ , somit  $P_{\eta i}^{-1}(b) \in E_\eta$ . Wir sehen also: bezeichnet  $B_{\eta i}$  die Menge der einfachen Punkte von  $P_{\eta i}$ , so ist  $E_\eta = \bigcup_i P_{\eta i}^{-1}(B_{\eta i})$ . — Wir zeigen nun durch transfinite Induktion, daß die  $E_\eta^*$  ( $\eta < \gamma$ ) Borelsche Mengen in  $E$  sind. Das ist richtig für  $\eta = 0$ , da  $E_0^* = \bigcup_{b \in B} A_{b0} = \bigcup_{b \in B} A_b = E$ . Angenommen, es sei richtig für alle  $\xi < \eta$ ; ist dann  $\eta$  Grenzzahl, so ist  $A_{b\eta} = \bigcap_{\xi < \eta} A_{b\xi}$ , also, da  $A_{b\xi} \cap A_{b'\xi} = A$  für  $b \neq b'$ , auch  $E_\eta^* = \bigcap_{\xi < \eta} E_\xi^*$ , also ist, ebenso wie die  $E_\xi^*$ , auch  $E_\eta^*$  eine Borelsche Menge in  $E$ ; ist hingegen  $\eta$  eine isolierte Zahl, so ist  $E_\eta^* = E_{\eta-1}^* - E_{\eta-1}$ ; hierin ist, wie wir sahen,  $E_{\eta-1} = \bigcup_i P_{\eta-1 i}^{-1}(B_{\eta-1 i})$ ; da  $B_{\eta-1 i}$  die Menge der einfachen Punkte von  $P_{\eta-1 i} = H_i, E_{\eta-1}^* \cap P$ , und da nach Annahme  $E_{\eta-1}^*$  eine Borelsche Menge in  $E$ , ist nach 42.4.81  $B_{\eta-1 i}$  eine absolut Borelsche Menge, also auch eine Borelsche Menge in  $P_{\eta-1 i}(H_i, E_{\eta-1}^*)$ , somit ist nach 33.6.1  $P_{\eta-1 i}^{-1}(B_{\eta-1 i})$  eine Borelsche Menge in  $H_i, E_{\eta-1}^*$ , also nach 33.4.73 eine Borelsche Menge in  $E$ ; wegen  $E_{\eta-1} = \bigcup_i P_{\eta-1 i}^{-1}(B_{\eta-1 i})$  ist also auch  $E_{\eta-1}$  eine Borelsche Menge in  $E$ , also auch  $E_\eta^* = E_{\eta-1}^* - E_{\eta-1}$ . — Da also  $E_\eta^*$  eine Borelsche Menge in  $E$ , so ist, wie wir eben sahen (es ist nur  $\eta - 1$  durch  $\eta$  zu ersetzen), auch  $P_{\eta i}^{-1}(B_{\eta i})$  eine Borelsche Menge in  $E$ ; und da  $E_\eta = \bigcup_i P_{\eta i}^{-1}(B_{\eta i})$ , und da nach Definition von  $B_{\eta i}$  offenbar  $P_{\eta i}^{-1}(B_{\eta i}) \cap P$  schlicht, ist die Behauptung bewiesen.

Wir nennen eine Punktmenge  $A \subseteq E^{(1)} \times E^{(2)}$  eindeutig bezüglich  $E^{(1)}$  (bzw.  $E^{(2)}$ ), wenn es zu jedem  $a \in E^{(1)}$  höchstens ein  $b \in E^{(2)}$  gibt, so daß  $(a, b) \in A$  (bzw. wenn es zu jedem  $b \in E^{(2)}$  höchstens ein  $a \in E^{(1)}$  gibt, so daß  $(a, b) \in A$ ).

42.5.4. Sind  $E^{(1)}$  und  $E^{(2)}$  separabel und vollständig, und ist  $A$  eine Borelsche Menge in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , deren jede Schicht  $A_a^{(2)}$  ( $a \in E^{(1)}$ ) abzählbar ist, so gibt es abzählbar viele disjunkte, bezüglich  $E^{(1)}$  eindeutige Borelsche Mengen  $A$ , in  $E^{(1)} \times E^{(2)}$ , so daß  $A = \bigcup A_i$ .

Da nach 20.2.4 und 20.2.7  $E^{(1)} \times E^{(2)}$  separabel und vollständig ist, ist  $A$  eine separable, absolut Borelsche Menge; es gibt also nach 42.3.1 eine schlichte stetige Abbildung  $Q$  einer abgeschlossenen Menge  $C$  des  $R_0$  auf  $A$ . Wir definieren nun eine Abbildung  $P$  von  $C$  durch die Festsetzung: ist  $Q(c) = (x, y)$  ( $c \in C$ ,  $(x, y) \in A$ ), so sei  $P(c) = x$ . Die Abbildung  $P$  von  $C$  ist stetig und halbschlicht; da  $C$  separabel und nach 18.5.11 vollständig,

gibt es also nach 42.5.3 abzählbar viele Borelsche Mengen  $M_\nu$  des  $R_0$ , so daß  $C = \bigcup M_\nu$  und  $M_\nu \cap P$  schlicht; dann ist  $Q(M_\nu)$  eindeutig bezüglich  $E^{(1)}$ , es ist  $A = \bigcup Q(M_\nu)$ , und nach 42.3.3 ist  $Q(M_\nu)$  eine absolut Borelsche Menge. Setzen wir  $A_1 = Q(M_1)$ ,  $A_\nu = Q(M_\nu) - (Q(M_1) + \dots + Q(M_{\nu-1}))$  ( $\nu = 2, 3, \dots$ ), so leisten die Mengen  $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \dots$  das Verlangte.

Literatur: N. Lusin, *Leç. s. l. ensembles analytiques* S. 238ff.

**6. Minimalpunkte.** Sei  $A \subseteq E \times \bar{R}_1$ . Ein Punkt  $(a, b) \in A$  ( $a \in E, b \in \bar{R}_1$ ) heißt ein Minimalpunkt von  $A$ , wenn es keinen Punkt  $(a, y) \in A$  ( $y \in \bar{R}_1$ ) mit  $y < b$  gibt. Die Menge aller Minimalpunkte von  $A$  bezeichnen wir mit  $A^{(m)}$ .

**42.6.1.** Ist  $E$  separabel und ist  $A$  eine analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , so ist  $A - A^{(m)}$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$ .

Ist  $(a, b) \in A$ , so ist, damit  $(a, b) \in A - A^{(m)}$  sei, notwendig und hinreichend, daß es ein rationales  $r < b$  und einen Punkt  $(a, y) \in A$  mit  $y < r$  gebe. Bezeichnet  $A_r$  die Menge aller  $(x, y) \in A$  mit  $y < r$  und  $A'_r$  die Menge aller  $(x, y) \in A$  mit  $y > r$ , ferner  $E_r$  die Projektion von  $A_r$  in den Raum  $E$ , setzen wir endlich  $A'_r \cdot (E_r \times \bar{R}_1) = A''_r$ , so ist also  $A - A^{(m)} = \bigcup A''_r$ , wo sich die Summation über alle rationalen Zahlen  $r$  erstreckt. Wir haben also nur mehr zu zeigen, daß  $A''_r$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$ . — Die Menge  $A_r$  (bzw.  $A'_r$ ) ist analytisch in  $E \times \bar{R}_1$  als der Durchschnitt von  $A$  und der in  $E \times \bar{R}_1$  offenen Menge aller  $(x, y) \in E \times \bar{R}_1$  mit  $y < r$  (bzw.  $y > r$ ); also ist  $E_r$  analytisch in  $E$  nach 40.6.11, somit ist  $E_r \times \bar{R}_1$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$  nach 40.7.2, somit ist auch  $A''_r$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$ , w. z. b. w.

**42.6.2.** Ist  $E$  separabel und ist  $A$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , so ist  $A^{(m)}$  eine komplementär-analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ .

Denn  $E \times \bar{R}_1 = A^{(m)} + (A - A^{(m)}) + (E \times \bar{R}_1 - A)$ , und hierin ist  $A - A^{(m)}$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$  nach 42.6.1, und  $E \times \bar{R}_1 - A$  ist als Komplement einer Borelschen Menge in  $E \times \bar{R}_1$  nach 33.4.2 selbst eine Borelsche, also nach 40.3.3 auch eine analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ .

**42.6.21.** Ist  $E$  separabel und vollständig, und ist  $A$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , deren Schichten  $A_x^{(2)}$  ( $x \in E$ ) abzählbar sind, so ist  $A^{(m)}$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ .

Verwenden wir dieselben Bezeichnungen wie beim Beweise von 42.6.1, so sind nun  $A_r$  und  $A'_r$  Borelsche Mengen in  $E \times \bar{R}_1$ , und nach 42.4.5 ist  $E_r$

eine Borelsche Menge in  $E$ ; also ist  $A - A^{(m)}$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , mithin auch  $A^{(m)}$ .

**42.6.3.** Zu jeder analytischen Menge  $B$  in  $E$  gibt es eine  $\mathfrak{B}_3$ -Menge (§ 33, 4)  $A$  in  $E \times \bar{R}_1$ , so daß  $B$  die Projektion von  $A^{(m)}$  in den Raum  $E$  ist.

Sei  $B$  eine analytische Menge in  $E$ ; dann gibt es nach 40.1.2 ein monotonen Suslinsches Schema  $\mathfrak{G}$  in  $E$  abgeschlossener Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , so daß  $B = A(\mathfrak{G})$ . Sei  $[y_{n_1}, z_{n_1}]$  ( $n_1 = 1, 2, \dots$ ) eine Folge disjunkter Intervalle des  $\bar{R}_1$ , so daß  $z_{n_1} < y_{n_1+1}$ ; sei  $[y_{n_1 n_2}, z_{n_1 n_2}]$  ( $n_2 = 1, 2, \dots$ ) eine Folge disjunkter Intervalle  $\subseteq [y_{n_1}, z_{n_1}]$ , so daß  $z_{n_1 n_2} < y_{n_1 n_2+1}$ ; sei  $[y_{n_1 n_2 n_3}, z_{n_1 n_2 n_3}]$  ( $n_3 = 1, 2, \dots$ ) eine Folge disjunkter Intervalle  $\subseteq [y_{n_1 n_2}, z_{n_1 n_2}]$ , so daß  $z_{n_1 n_2 n_3} < y_{n_1 n_2 n_3+1}$  usf. Sei  $M_{n_1 n_2 \dots n_k} = F_{n_1 n_2 \dots n_k} \times [y_{n_1 n_2 \dots n_k}, z_{n_1 n_2 \dots n_k}]$ ; dann ist  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  abgeschlossen in  $E \times \bar{R}_1$ , und je zwei  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  mit gleich viel Indizes sind fremd. Die  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bilden also ein monotonen Suslinsches Schema  $\bar{\mathfrak{G}}$  in  $E \times \bar{R}_1$  abgeschlossener Mengen, dessen Kern  $A = A(\bar{\mathfrak{G}})$  nach 40.1.1 eine  $\mathfrak{B}_3$ -Menge in  $E \times \bar{R}_1$  ist. Sei  $A'$  die Projektion von  $A$  in den Raum  $E$ ; wir zeigen nun, daß  $A' = B$ . Sei  $x^* \in B$ ; dann gibt es eine Indizesfolge  $((n_k^*))$ , so daß  $x^* \in F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \dots$ ; da  $[y_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}, z_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}] \subseteq [y_{n_1^* n_2^*}, z_{n_1^* n_2^*}]$ , gibt es ein  $y^* \in D_k [y_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}, z_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}]$ ; dann ist  $(x^*, y^*) \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \dots$ , also  $(x^*, y^*) \in A$ , mithin  $x^* \in A'$ . Sei umgekehrt  $x^* \in A'$ ; dann gibt es ein  $y^*$ , so daß  $(x^*, y^*) \in A$ ; mithin gibt es eine Indizesfolge  $((n_k^*))$ , so daß  $(x^*, y^*) \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \dots$ ; dann aber ist  $x^* \in F_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \dots$ , also  $x^* \in B$ . — Nun zeigen wir:  $B$  ist auch die Projektion von  $A^{(m)}$  in den Raum  $E$ . Da wir eben gezeigt haben, daß  $B$  die Projektion von  $A$  ist, genügt es zu zeigen: in jeder nicht leeren Schicht  $A_x^{(2)}$  von  $A$  ( $x \in E$ ) gibt es einen Punkt von  $A^{(m)}$ . Sei also  $A_x^{(2)} \supset A$ ; unter allen Mengen  $M_{n_1}$  mit  $M_{n_1} A_x^{(2)} \supset A$  gibt es eine von kleinstem Index  $n_1^*$ ; unter allen Mengen  $M_{n_1 n_2}$  mit  $M_{n_1 n_2} A_x^{(2)} \supset A$  gibt es eine von kleinstem Index  $n_2^*$  usf.; ist dann  $[y^*, z^*] = D_k [y_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}, z_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}]$ , so ist offenbar  $(x, y^*) \in A^{(m)}$ .

**42.6.4.** Ist  $E$  ein separabler Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist, so gibt es eine  $\mathfrak{B}_3$ -Menge  $A$  in  $E \times \bar{R}_1$ , für die  $A^{(m)}$  nicht analytisch in  $E \times \bar{R}_1$  ist.

Nach 40.3.2 gibt es eine analytische Menge  $B$  in  $E$ , die keine Borelsche Menge ist. Nach 42.6.3 gibt es eine  $\mathfrak{B}_3$ -Menge  $A$  in  $E \times \bar{R}_1$ , so daß

$B$  die Projektion von  $A^{(m)}$  in den Raum  $E$  ist. Dann kann  $A^{(m)}$  nicht analytisch in  $E \times \bar{R}_1$  sein; denn da  $A^{(m)}$  nach 42-6-2 komplementär-analytisch, wäre  $A^{(m)}$  sonst nach 42-1-3 eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , und da  $A^{(m)}$  eindeutig bezüglich  $E$ , wäre nach 42-4-5 auch  $B$  eine Borelsche Menge in  $E$ , entgegen der Annahme.

Literatur: St. Mazurkiewicz, Fund.math.10(1927)S.172. W. Sierpiński, Fund. math. 12 (1928) S. 211.

### § 43. Implizite Funktionen.

**1. Umkehrfunktionen.** Sei  $A$  eine Teilmenge des  $\bar{R}_1$ , sei  $f$  eine Funktion auf  $A$  und  $B$  die Wertmenge von  $f$  (§ 41, 3); dann ist auch  $B \subseteq \bar{R}_1$ . Ist insbesondere die Funktion  $f$  schlicht, so gibt es zu jedem  $y \in B$  genau ein  $x \in A$  mit  $f(x) = y$ ; ordnet man jedem  $y \in B$  dieses  $x \in A$  zu, so entsteht eine schlichte Funktion auf  $B$ , deren Wertmenge  $A$  ist; sie heißt die Umkehrfunktion von  $f$  und wird mit  $f^{(-1)}$  bezeichnet. Der Bereich von  $f^{(-1)}$  (§ 25, 4) ist die Wertmenge von  $f$ . Die die Funktion  $f^{(-1)}$  darstellende Menge (§ 35, 9)  $[f^{(-1)}(y) = x]$  ist identisch mit der die Funktion  $f$  darstellenden Menge  $[f(x) = y]$ .

**43-1-1.** Ist  $A$  abgeschlossen im  $\bar{R}_1$  und  $f$  eine schlichte stetige Funktion auf  $A$ , so ist auch der Bereich  $B$  von  $f^{(-1)}$  abgeschlossen und auch  $f^{(-1)}$  ist stetig.

Nach 15-2-31 ist  $A$  in sich kompakt, nach 23-3-1 ist also auch  $B$  in sich kompakt, also nach 15-2-31 abgeschlossen. Die Stetigkeit von  $f^{(-1)}$  folgt aus 24-1-1.

**43-1-2.** Ist  $A$  eine Borelsche Menge im  $\bar{R}_1$  und  $f$  eine schlichte Bairesche Funktion auf  $A$ , so ist auch der Bereich  $B$  von  $f^{(-1)}$  eine Borelsche Menge und auch  $f^{(-1)}$  ist eine Bairesche Funktion.

Nach 42-4-6 ist  $B$  eine Borelsche Menge. Sei  $A_z$  die Menge aller  $x \in A$  mit  $x > z$ ; da nach 35-3-4  $A_z \cap f$  eine Bairesche Funktion auf  $A_z$ , ist nach 35-9-3 die die Funktion  $A_z \cap f$  darstellende Menge  $M_z$  eine Borelsche Menge in  $A_z \times \bar{R}_1$ . Wegen  $A \in \mathfrak{B}(\bar{R}_1)$  ist auch  $A_z \in \mathfrak{B}(\bar{R}_1)$ , also ist  $A_z$  eine absolut Borelsche Menge, also nach 33-7-3 auch  $A_z \times \bar{R}_1$ , also nach 33-5-2 auch  $M_z$ . Die Menge  $[f^{(-1)}(y) > z]$  ist nun die Projektion der Menge  $M_z \subseteq A_z \times \bar{R}_1$  in den Raum  $\bar{R}_1$ ; da  $M_z$  eine separable absolut Borelsche Menge, ist also nach 42-4-5 auch  $[f^{(-1)}(y) > z]$  eine absolut Borelsche Menge, also ist nach 35-2-3  $f^{(-1)}$  eine Bairesche Funktion.

Eine Präzisierung von 43·1·2 in dem Sinne, daß die Umkehrfunktion einer  $\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi$ -Funktion gleichfalls eine  $\mathfrak{C}_\varepsilon^\xi$ -Funktion wäre, ist nicht möglich. Vielmehr gilt:

**43·1·3.** Zu jedem  $\xi < \omega_1$  gibt es eine schlichte  $\mathfrak{C}_\varepsilon^2$ -Funktion im  $\bar{R}_1$ , deren Wertmenge der  $\bar{R}_1$  ist, und deren Umkehrfunktion  $f^{(-1)} \sim \varepsilon \mathfrak{C}_\varepsilon^\xi(\bar{R}_1)$  ist.

Sei  $\eta \geq 3$  und  $\xi < \eta < \omega_1$ . Nach 33·9·3 gibt es eine Menge  $M' \subseteq \bar{R}_1$ , die genau eine  $\mathfrak{B}^\eta$ -Menge im  $\bar{R}_1$  ist; dann ist  $M'' = \bar{R}_1 - M'$  nach 33·4·2 genau eine  $\mathfrak{B}_\eta$ -Menge im  $\bar{R}_1$ ; da jede abzählbare Menge eine  $\mathfrak{B}^2$ -Menge ist, sind  $M'$  und  $M''$  unabzählbar; lassen wir aus  $M'$  und  $M''$  alle rationalen Punkte und die Punkte  $+\infty, -\infty$  weg, so sind also auch die übrigbleibenden Mengen  $M^*, M^{**}$  unabzählbar und  $M^*$  ist nach 33·4·51 genau eine  $\mathfrak{B}^\eta$ -Menge,  $M^{**}$  genau eine  $\mathfrak{B}_\eta$ -Menge im  $\bar{R}_1$ . Nach 42·3·2 gibt es abzählbare Teile  $A^*, A^{**}$  von  $M^*$  und  $M^{**}$ , so daß  $N^* = M^* - A^*$  und  $N^{**} = M^{**} - A^{**}$  schlichte stetige Bilder des  $R_0$ ; dabei ist  $\bar{R}_1 = N^* + N^{**} + A$ , wo  $A$  eine abzählbare, die Punkte  $+\infty, -\infty$  sowie alle rationalen Punkte des  $\bar{R}_1$  enthaltende Punktmenge bedeutet, die Mengen  $N^*, N^{**}, A$  disjunkt sind, und  $N^*$  genau eine  $\mathfrak{B}^\eta$ -Menge,  $N^{**}$  genau eine  $\mathfrak{B}_\eta$ -Menge im  $\bar{R}_1$  ist. — Seien  $I^*$  bzw.  $I^{**}$  die Menge aller positiven bzw. negativen irrationalen Punkte des  $\bar{R}_1$ ; nach 24·2·12 und 24·2·2 sind  $I^*, I^{**}$  homöomorph dem  $R_0$ ; also ist  $N^*$  bzw.  $N^{**}$  schlichtes stetiges Bild von  $I^*$  bzw.  $I^{**}$ ; d. h. es gibt eine schlichte stetige Funktion  $f^*$  auf  $I^*$ , deren Wertmenge  $N^*$  ist, und eine schlichte stetige Funktion  $f^{**}$  auf  $I^{**}$ , deren Wertmenge  $N^{**}$  ist. Wir definieren nun eine schlichte Funktion  $f$  im  $\bar{R}_1$  so, daß  $I^* \cap f = f^*, I^{**} \cap f = f^{**}$ , und so, daß die Wertmenge von  $f$  der  $\bar{R}_1$  ist. Zu dem Zwecke setzen wir:  $f(+\infty) = +\infty, f(-\infty) = -\infty$ , und haben, da  $f$  für die irrationalen  $y$  durch  $I^* \cap f = f^*, I^{**} \cap f = f^{**}$  bereits definiert ist, noch  $f$  für alle rationalen Punkte des  $\bar{R}_1$  zu definieren. Seien zunächst  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die sämtlichen nicht ganzzahligen rationalen Zahlen, und sei  $((x_n))$  eine Folge irrationaler Zahlen mit  $x_n - r_n \rightarrow 0$ ; dann sei  $f(r_1)$  die erste ins Intervall  $(f(x_1) - 1, f(x_1) + 1)$  fallende Zahl  $r_n$ , und wenn die Funktionswerte  $f(r_1), \dots, f(r_{k-1})$  schon bekannt sind, so sei  $f(r_k)$  die erste ins Intervall  $(f(x_k) - \frac{1}{k}, f(x_k) + \frac{1}{k})$  fallende, von  $f(r_1), \dots, f(r_{k-1})$  verschiedene Zahl  $r_n$ . Hierdurch ist  $f$  auch für alle nicht ganzzahligen rationalen  $x$  definiert. Für die Funktionswerte  $f(x)$  bei ganzzahligem  $x$  wählen wir nun die sämtlichen, bisher noch nicht als Funktionswerte von  $f$  verwendeten Zahlen der abzählbaren Menge  $A$  (unter denen gewiß alle ganzen Zahlen vorkommen). Hierdurch ist  $f$  als schlichte Funktion im  $\bar{R}_1$  definiert, deren Wert-

menge der  $\bar{R}_1$  ist. — Nun zeigen wir, daß  $f \in \mathfrak{G}_1^2(R_1)$ ; nach 37.1.21 genügt es zu dem Zwecke, zu zeigen:  $f$  ist stetig in jedem irrationalen Punkte des  $R_1$ . Sei also  $\bar{x}$  ein irrationaler Punkt des  $R_1$ , und sei etwa  $\bar{x} > 0$ ; da  $I^* 1f = f^*$  und  $f^*$  stetig war, genügt es, zu zeigen: für jede Folge rationaler Punkte  $p_\nu$  mit  $p_\nu \rightarrow \bar{x}$  gilt  $f(p_\nu) \rightarrow f(\bar{x})$ . Nun hatten wir oben mit  $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$  die sämtlichen nicht ganzzahligen rationalen Punkte des  $R_1$  bezeichnet, und  $((x_n))$  war eine Folge irrationaler Punkte mit  $x_n - r_n \rightarrow 0$ . Ist dann  $p_\nu = r_{n_\nu}$ , so folgt aus  $p_\nu \rightarrow \bar{x}$  auch  $x_{n_\nu} \rightarrow \bar{x}$ , also, da die  $x_{n_\nu}$  und  $\bar{x}$  irrational und  $I^* 1f = f^*$  stetig:  $f(x_{n_\nu}) \rightarrow f(\bar{x})$ ; und da  $|f(r_n) - f(x_n)| < \frac{1}{n}$  war, gilt auch  $f(r_{n_\nu}) \rightarrow f(\bar{x})$ , d. h.  $f(p_\nu) \rightarrow f(\bar{x})$ , w. z. b. w. — Nun ist nur mehr zu zeigen, daß  $f^{(-1)} \sim \varepsilon \mathfrak{G}_1^2(R_1)$ . Dazu genügt es nach 35.2.21 zu zeigen, daß  $[f^{(-1)}(\bar{y}) > 0] \sim \varepsilon \mathfrak{B}^2(R_1)$ . Nun ist  $[f^{(-1)}(\bar{y}) > 0]$  die Menge aller Werte von  $f(x)$  für  $x > 0$ ; und da  $I^* 1f = f^*$  und  $N^*$  die Wertmenge von  $f^*$  ist, entsteht  $[f^{(-1)}(\bar{y}) > 0]$  aus  $N^*$  durch Hinzufügen abzählbar vieler Punkte, ist also nach 33.4.51 ebenso wie  $N^*$  genau eine  $\mathfrak{B}^n$ -Menge im  $\bar{R}_1$ ; wegen  $\eta > \xi$  ist also  $[f^{(-1)}(\bar{y}) > 0] \sim \varepsilon \mathfrak{B}^2(R_1)$ , w. z. b. w.

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 3 (1922) S. 26.

**2. Die eine Funktion darstellende Menge.** Wir betrachten nun nochmals die in § 35, 9 eingeführte eine Funktion  $f$  darstellende Menge  $[f(\bar{x}) = \bar{y}]$ . Wir können nun sehen, daß die Umkehrung von 35.9.3 für  $\xi > 1$  nicht gilt. Sei in der Tat  $f$  die Funktion von 43.1.3 und  $f^{(-1)}$  ihre Umkehrfunktion; da  $f \in \mathfrak{G}_2^2(\bar{R}_1)$ , ist nach 35.9.3 die  $f$  darstellende Menge  $[f(\bar{x}) = \bar{y}] \in \mathfrak{B}_2(\bar{R}_1 \times \bar{R}_1)$ ; da  $[f^{(-1)}(\bar{y}) = \bar{x}] = [f(\bar{x}) = \bar{y}]$ , ist also auch die  $f^{(-1)}$  darstellende Menge eine  $\mathfrak{B}_2$ -Menge in  $\bar{R}_1 \times \bar{R}_1$ , aber es gilt, wenn  $\xi \geq 2$ , nicht  $f^{(-1)} \in \mathfrak{G}_2^2(\bar{R}_1)$ . — Wohl aber gilt:

**43.2.1.** Ist  $f$  eine Funktion auf der separablen, absolut analytischen Menge  $E$ , und ist  $[f(\bar{x}) = \bar{y}]$  eine analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , so ist  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$ .

Sei  $M = [f(\bar{x}) = \bar{y}]$ ,  $M_z$  die Menge aller  $(x, y) \in M$  mit  $y > z$  und  $M'_z$  die Menge aller  $(x, y) \in M$  mit  $y \leq z$ . Als Durchschnitt von  $M$  und der in  $E \times \bar{R}_1$  offenen (bzw. abgeschlossenen) Menge aller  $(x, y) \in E \times \bar{R}_1$  mit  $y > z$  (bzw. mit  $y \leq z$ ) ist  $M_z$  (bzw.  $M'_z$ ) analytisch in  $E \times \bar{R}_1$ ; da  $E \times \bar{R}_1$  nach 40.7.8 absolut analytisch, sind also nach 40.4.31 auch  $M_z$  und  $M'_z$  absolut analytisch. Da die Projektionen von  $M_z$  und  $M'_z$  in den Raum  $E$  die Mengen  $[f(\bar{x}) > z]$  und  $[f(\bar{x}) \leq z]$  sind, sind diese Mengen nach 40.6.1

absolut analytisch. Da  $E = [f(\dot{x}) > z] + [f(\dot{x}) \leq z]$ , sind also nach 42-1-21  $[f(\dot{x}) > z]$  und  $[f(\dot{x}) \leq z]$  Borelsche Mengen in  $E$ , also ist nach 35-2-3  $f$  eine Bairesche Funktion in  $E$ .

**43-2-2.** Ist  $E$  separabel und absolut analytisch, und ist  $M$  eine in  $E \times \bar{R}_1$  analytische Menge, in der es zu jedem  $x \in E$  genau einen Punkt  $(x, y) \in M$  gibt, so ist  $M$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ .

Durch die Menge  $M$  ist eine Funktion auf  $E$  definiert, für die  $[f(\dot{x}) = \dot{y}] = M$  ist; nach 43-2-1 ist  $f$  eine Bairesche Funktion auf  $E$ , nach 35-9-3 ist also  $M$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ .

**43-2-3.** Ist  $E$  separabel und absolut analytisch, und ist  $A$  eine bezüglich  $E$  eindeutige analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , so gibt es eine Bairesche Funktion  $f$  in  $E$ , so daß, wenn  $B$  die Projektion von  $A$  in den Raum  $E$  bedeutet:  $[B \mid f(\dot{x}) = \dot{y}] = A$ .

Nach 40-4-2 ist  $A$  auch analytisch in  $B \times \bar{R}_1$ ; nach 40-6-1 ist  $B$  absolut analytisch. Ordnen wir jedem  $x \in B$  das einzige  $y \in \bar{R}_1$  mit  $(x, y) \in A$  zu, so entsteht eine Funktion  $g$  auf  $B$ , die nach 43-2-1 eine Bairesche Funktion auf  $B$  ist. Nach 35-3-4 gibt es eine Bairesche Funktion  $f$  auf  $E$ , so daß  $B \mid f = g$ ; dann ist  $[B \mid f(\dot{x}) = \dot{y}] = A$ .

Ist  $A$  eine bezüglich  $E$  eindeutige komplementär-analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , so gilt ein analoger Satz nicht: Sei  $E$  ein separabler Youngscher Raum, dessen insichdichter Kern  $\supset A$  ist; dann gibt es nach 40-9-2 eine analytische Menge  $B$  in  $E$ , die keine Borelsche Menge ist; nach 42-6-3 gibt es eine Borelsche Menge  $C$  in  $E \times \bar{R}_1$ , so daß  $B$  die Projektion von  $C^{(m)}$  in den Raum  $E$ . Die Menge  $C^{(m)}$  ist eindeutig bezüglich  $E$  und nach 42-6-2 komplementär-analytisch in  $E \times \bar{R}_1$ . Gäbe es nun eine Bairesche Funktion  $f$  in  $E$ , so daß  $[B \mid f(\dot{x}) = \dot{y}] = C^{(m)}$ , so wäre nach 35-9-3  $[f(\dot{x}) = \dot{y}]$  eine Borelsche, also auch eine analytische Menge in  $E \times \bar{R}_1$ ; und da nach 40-7-2  $B \times \bar{R}_1$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$  ist, wäre auch  $C^{(m)} = (B \times \bar{R}_1) \cdot [f(\dot{x}) = \dot{y}]$  analytisch in  $E \times \bar{R}_1$ , also nach 42-1-31 auch eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ , und da nach 20-2-71  $E \times \bar{R}_1$  eine Youngsche, also absolut Borelsche Menge, wäre nach 33-5-2 auch  $C^{(m)}$  eine absolut Borelsche Menge; also wäre nach 42-4-5  $B$  eine Borelsche Menge in  $E$ , entgegen der Annahme.

Sind  $B$  und  $C$  Mengen in  $E \times \bar{R}_1$ , so bezeichnen wir als den unter  $C$  gelegenen Teil von  $B$ , in Zeichen:  $B \cup C$ , die Menge aller Punkte  $(x, y) \in B$ , zu denen es einen Punkt  $(x', y') \in C$  mit  $x' = x$ ,  $y' > y$  gibt.

**43-2.4.** Ist  $E$  separabel und vollständig, sind  $B$  und  $C$  analytische (bzw. Borelsche) Mengen in  $E \times \bar{R}_1$  und ist  $C$  eindeutig bezüglich  $E$ , so ist  $B$  u  $C$  eine analytische (bzw. Borelsche) Menge in  $E \times \bar{R}_1$ .

Sei  $C'$  die Projektion von  $C$  in den Raum  $E$ ; nach 40-6-11 (bzw. 42-4-5) ist  $C'$  eine analytische (bzw. Borelsche) Menge in  $E$ ; also ist nach 40-7-2 (bzw. 33-7-2)  $C' \times \bar{R}_1$  eine analytische (bzw. Borelsche) Menge in  $E \times \bar{R}_1$ . Nach 43-2-3 gibt es eine Bairesche Funktion  $f$  in  $E$ , so daß  $[C' \cap f(\mathcal{E}) = \mathcal{C}] = C$ ; nach 35-9-2 ist  $[f(\mathcal{E}) > \mathcal{C}]$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_1$ . Da  $B$  u  $C = B \cdot (C' \times \bar{R}_1) \cdot [f(\mathcal{E}) > \mathcal{C}]$ , folgt die Behauptung.

**3. Implizite Funktionen.** Wir setzen  $\bar{R}_2 = \bar{R}_1 \times \bar{R}_1$ , allgemein für  $n \geq 1$ :  $\bar{R}_{n-1} = \bar{R}_n \times \bar{R}_1$ ; dann haben die Punkte des Raumes  $\bar{R}_n$  die Gestalt  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  mit  $y_i \in \bar{R}_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Sei nun  $E$  ein metrischer Raum; wir betrachten den Raum  $E \times \bar{R}_n$ ; seine Punkte haben die Gestalt  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  mit  $x \in E, y_i \in \bar{R}_1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Seien  $f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) Bairesche Funktionen auf  $E \times \bar{R}_n$ . Wir betrachten das System der  $m$  Gleichungen:

$$(3) \quad f_j(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Setzen wir  $f = |f_1| + |f_2| + \dots + |f_m|$ , so ist nach 35-1-6 und 30-5-1 auch  $f$  eine Bairesche Funktion auf  $E \times \bar{R}_n$ , und das System (3) ist völlig äquivalent der einen Gleichung:

$$(3-1) \quad f(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0.$$

Wir beschränken also die Allgemeinheit in keiner Weise, wenn wir statt des Gleichungssystems (3) eine einzige Gleichung (3-1) betrachten.

**43-3.1.** Ist  $f$  eine Bairesche Funktion auf  $E \times \bar{R}_n$ , so ist die Menge  $M$  aller der Gleichung (3-1) genügenden Punkte von  $E \times \bar{R}_n$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_n$ .

Setzen wir  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) = u$ , so ist  $M$  die Menge aller  $u \in E \times \bar{R}_n$  mit  $f(u) = 0$ ; die Behauptung folgt also aus 35-2-31.

Wir sagen: im Punkte  $x^* \in E$  ist  $y_j$  durch die Gleichung (3-1) eindeutig definiert, wenn es mindestens einen dieser Gleichung genügenden Punkt  $(x^*, y_1, y_2, \dots, y_n) \in E \times \bar{R}_n$  gibt, und wenn für je zwei dieser Gleichung genügende Punkte  $(x^*, y'_1, y'_2, \dots, y'_n), (x^*, y''_1, y''_2, \dots, y''_n)$  gilt:  $y'_j = y''_j$ . Sei  $C_j$  die Menge aller  $x \in E$ , in denen  $y_j$  durch (3-1) eindeutig definiert ist; ist  $C_j \supset A$  und ordnen wir jedem  $x \in C_j$  den durch (3-1) definierten



Wert von  $y_j$  zu, so entsteht eine Funktion  $y_j(x)$  auf  $C_j$ , die wir die durch (3.1) definierte implizite Funktion  $y_j(x)$  nennen; die Menge  $C_j$  heißt dann der Bereich der impliziten Funktion  $y_j(x)$ .

**43-3-2.** Ist  $E$  separabel und vollständig, und ist  $f$  eine Bairesche Funktion auf  $E \times R_n$ , so ist der Bereich  $C_j$  der durch (3.1) definierten impliziten Funktion  $y_j(x)$  Differenz zweier analytischer Mengen in  $E$ .

Sei  $M$  die Menge aller der Gleichung (3.1) genügenden Punkte  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in E \times R_n$  und  $M'$  die Projektion von  $M$  in den Raum  $E \times \bar{R}_1$  der Punkte  $(x, y_1)$ ; nach 43-3-1 ist  $M$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_n = (E \times \bar{R}_1) \times \bar{R}_{n-1}$ , also eine separable absolut analytische Menge; also ist nach 40-6-1  $M'$  eine separable absolut analytische Menge  $\subseteq E \times \bar{R}_1$ ; bezeichnen wir noch mit  $M''$  die Projektion von  $M'$  in den Raum  $E$ , so ist also auch  $M''$  absolut analytisch. Nach 41-4-7 ist nun die Menge  $N$  aller  $x \in M''$ , die bei der Projektion von  $M'$  in den Raum  $E$  mindestens zwei Urbilder in  $M'$  haben, absolut analytisch. Da offenbar  $C_j = M'' - N$ , ist die Behauptung bewiesen.

Wir sagen:  $y_j$  ist durch (3.1) durchweg eindeutig definiert, wenn  $y_j$  für jedes  $x \in E$ , zu dem es überhaupt einen der Gleichung (3.1) genügenden Punkt  $(x^*, y_1, y_2, \dots, y_n) \in E \times \bar{R}_n$  gibt, eindeutig definiert ist.

**43-3-3.** Ist  $E$  separabel und vollständig, ist  $f$  eine Bairesche Funktion auf  $E \times \bar{R}_n$ , und ist  $y_j$  durch die Gleichung (3.1) durchweg eindeutig definiert, so ist der Bereich  $C_j$  der durch (3.1) definierten impliziten Funktion  $y_j(x)$  eine analytische Menge in  $E$ , und  $y_j(x)$  ist eine Bairesche Funktion auf  $C_j$ .

Ist  $M$  die Menge aller der Gleichung (3.1) genügenden Punkte von  $E \times \bar{R}_n$ , so ist  $C_j$  die Projektion von  $M$  in den Raum  $E$ ; da  $M$  nach 43-3-1 eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_n$ , also eine separable, absolut analytische Menge ist, so ist  $C_j$  nach 40-6-1 eine separable, absolut analytische Menge. — Die die Funktion  $y_j(x)$  darstellende Menge  $[y_j(x) = \bar{y}]$  ist offenbar die Projektion von  $M$  in den Raum  $E \times \bar{R}_1$  der Punkte  $(x, y_1)$ ; sie ist also nach 40-6-1 eine absolut analytische Menge, also auch eine analytische Menge in  $C_j \times \bar{R}_1$ , mithin ist  $y_j(x)$  nach 43-2-1 eine Bairesche Funktion auf  $C_j$ .

**43-3-4.** Ist  $E$  separabel und vollständig, ist  $f$  eine Bairesche Funktion auf  $E \times \bar{R}_n$ , und gibt es zu jedem  $x \in E$  höchstens einen der Gleichung (3.1) genügenden Punkt  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in E \times \bar{R}_n$ , so ist der Bereich  $C$  der  $n$  durch (3.1) definierten impliziten Funktionen  $y_j(x)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) eine Borelsche Menge in  $E$ , und jede dieser Funktionen ist eine Bairesche Funktion auf  $C$ .

Sei  $M$  die Menge aller der Gleichung (3.1) genügenden Punkte von  $E \times \bar{R}_n$  und  $M'$  die Projektion von  $M$  in den Raum  $E$ ; für den Bereich  $C_j$  von  $y_j(x)$  gilt dann:  $C_j = M'$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). Da nach 43.3.1  $M$  eine Borelsche Menge in  $E \times \bar{R}_n$ , also eine separable, absolut Borelsche Menge, und da es zu jedem  $x \in M'$  genau ein  $(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \in M$  gibt, ist aber  $M'$  nach 42.4.5 eine Borelsche Menge in  $E$ . — Daß die  $y_j(x)$  Bairesche Funktionen auf  $C = M'$  sind, ist in 43.3.3 enthalten.

Literatur: H. Lebesgue, Journ. de math. (6) 1 (1905) S. 192. N. Lusin, Lec. s. l. ensembles analytiques S. 222. P. Novikoff, Fund. math. 17 (1931) S. 8.

#### § 44. Lusinsche Siebe.

1. Abzählbare Siebe. Seien  $E$  und  $K$  beliebige Mengen, und  $\mathfrak{M}$  ein System von Teilen der Menge  $E$ ; jedem  $k \in K$  sei eine Menge  $M^k \in \mathfrak{M}$  zugeordnet. Wir bezeichnen das System<sup>1)</sup>  $\mathfrak{L}$  aller  $M^k$  ( $k \in K$ ) als Lusinsches Sieb in  $\mathfrak{M}$ , wenn jeder Menge  $M^k$  ( $k \in K$ ) eine reelle Zahl  $y(M^k)$  zugeordnet ist, und zwar so, daß für  $k \neq k'$  auch  $y(M^k) \neq y(M^{k'})$  ist; die Zahl  $y(M^k)$  nennen wir die Höhe von  $M^k$ . Ist  $K$  abzählbar, so nennen wir  $\mathfrak{L}$  ein abzählbares Sieb. Ist das System der Mengen  $M^k$  von  $\mathfrak{L}$  bei Ordnung nach wachsender Höhe wohlgeordnet, so heißt das Sieb  $\mathfrak{L}$  wohlgeordnet.

Die Menge aller  $x \in E$ , die einer Mengenfolge  $((M^{k_n}))$  aus  $\mathfrak{L}$  mit abnehmenden Höhen ( $y(M^{k_{n+1}}) < y(M^{k_n})$ ) angehören, bezeichnen wir als die durch das Sieb  $\mathfrak{L}$  erzeugte Menge; wegen 7.1.4 kann das auch so ausgesprochen werden: damit ein Punkt  $x \in E$  zu der durch  $\mathfrak{L}$  erzeugten Menge gehöre, ist notwendig und hinreichend, daß die Menge aller  $M^k \in \mathfrak{L}$  mit  $x \in M^k$  (bei Ordnung nach wachsender Höhe) nicht wohlgeordnet sei. Ist das Sieb  $\mathfrak{L}$  wohlgeordnet, so ist also die durch  $\mathfrak{L}$  erzeugte Menge  $= A$ .

Zwei Siebe heißen äquivalent, wenn sie dieselbe Menge erzeugen. Entsteht das Sieb  $\mathfrak{L}'$  aus  $\mathfrak{L}$  durch Weglassen eines (bei Ordnung nach wachsender Höhe) wohlgeordneten Teilsystemes, so sind  $\mathfrak{L}$  und  $\mathfrak{L}'$  äquivalent.

Das Sieb  $\mathfrak{L} \supset A$  heißt regulär, wenn es in ihm keine Menge kleinster Höhe gibt, oder — was dasselbe heißt — wenn es zu jeder Menge  $M^{k^*} \in \mathfrak{L}$  unendlich viele  $M^k \in \mathfrak{L}$  mit  $y(M^k) < y(M^{k^*})$  gibt.

**44.1.1.** Zu jedem nicht wohlgeordneten Siebe  $\mathfrak{L}$  gibt es ein äquivalentes reguläres Sieb  $\mathfrak{L}'$ .

<sup>1)</sup> Zwei zu verschiedenen  $k$  gehörige Mengen  $M^k$  gelten im folgenden als verschieden, auch wenn sie aus denselben Elementen bestehen.

Sei  $\mathfrak{L}_z$  das System aller  $M^k \in \mathfrak{L}$  mit  $y(M^k) \leq z$ . Ist  $\mathfrak{L}$  nicht regulär, so gibt es Zahlen  $z$ , für die  $\mathfrak{L}_z$  (bei Ordnung nach wachsender Höhe) wohlgeordnet ist; sei  $z_0$  das Supremum dieser  $z$ ; da  $\mathfrak{L}$  nicht wohlgeordnet, ist  $z_0 < +\infty$ ; offenbar ist  $\mathfrak{L}_{z_0}$  wohlgeordnet, also sind  $\mathfrak{L}' = \mathfrak{L} - \mathfrak{L}_{z_0}$  und  $\mathfrak{L}$  äquivalent und es ist  $\mathfrak{L}' \supset \Lambda$ . Sei  $M^{k'} \in \mathfrak{L}'$ ; dann gibt es unendlich viele  $M^k \in \mathfrak{L}'$  mit  $y(M^k) < y(M^{k'})$ ; denn gäbe es nur endlich viele, so wäre das System aller  $M^k \in \mathfrak{L}$  mit  $y(M^k) \leq y(M^{k'})$  wohlgeordnet, was wegen  $y(M^{k'}) > z_0$  unmöglich ist; also ist  $\mathfrak{L}'$  regulär.

**44-1-2.** Jede durch ein abzählbares reguläres Sieb  $\mathfrak{L}$  in  $\mathfrak{M}$  erzeugte Menge ist eine analytische Menge über  $\mathfrak{M}$ .

Wir konstruieren aus  $\mathfrak{L}$  ein Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}$  in folgender Weise. Die Mengen  $M_{n_1}$  erster Stufe von  $\mathfrak{S}$  seien die sämtlichen abzählbar vielen Mengen  $M^k (k \in K)$  von  $\mathfrak{L}$ ; die Nachfolger  $M_{n_1, n_2}$  der Menge  $M_{n_1}$  erster Stufe seien die sämtlichen Mengen von  $\mathfrak{L}$ , deren Höhen  $< y(M_{n_1})$  sind; die Nachfolger  $M_{n_1, n_2, n_3}$  der Menge zweiter Stufe  $M_{n_1, n_2}$  seien die sämtlichen Mengen von  $\mathfrak{L}$ , deren Höhen  $< y(M_{n_1, n_2})$  sind usw. Dann ist offenbar die durch das Sieb  $\mathfrak{L}$  erzeugte Menge identisch mit dem Kerne  $A(\mathfrak{S})$  des Suslinschen Schemas  $\mathfrak{S}$ .

Hiervon gilt folgende Umkehrung:

**44-1-3.** Ist  $\mathfrak{M}$  ein Ring, so wird jede analytische Menge  $A$  über  $\mathfrak{M}$  erzeugt durch ein abzählbares reguläres Sieb in  $\mathfrak{M}$ .

Nach 40-1-2 gibt es ein monotones Suslinsches Schema  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{M}$ , bestehend aus den Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , so daß  $A = A(\mathfrak{S})$ . Sei  $[y'_{n_1}, y_{n_1}]$  ( $n_1 = 1, 2, \dots$ ) eine Folge disjunkter Intervalle des  $R_1$  mit  $y_{n_1} < y'_{n_1-1}$ ; sei  $[y'_{n_1, n_2}, y_{n_1, n_2}]$  ( $n_2 = 1, 2, \dots$ ) eine Folge disjunkter Intervalle aus  $[y'_{n_1}, y_{n_1}]$  mit  $y_{n_1, n_2} < y'_{n_1, n_2+1}$ ; sei  $[y'_{n_1, n_2, n_3}, y_{n_1, n_2, n_3}]$  ( $n_3 = 1, 2, \dots$ ) eine Folge disjunkter Intervalle aus  $[y'_{n_1, n_2}, y_{n_1, n_2}]$  mit  $y_{n_1, n_2, n_3} < y'_{n_1, n_2, n_3+1}$  usw. Setzen wir  $y(M_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = y_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ , so wird aus dem Suslinschen Schema  $\mathfrak{S}$  ein reguläres abzählbares Sieb  $\mathfrak{L}$ . Sei  $A'$  die durch das Sieb  $\mathfrak{L}$  erzeugte Menge; wir zeigen, daß  $A' = A$ . — Sei  $a \in A$ ; dann gibt es eine Indizesfolge  $(n_k)$ , so daß  $a \in M_{n_1}, M_{n_1, n_2}, \dots, M_{n_1, n_2, \dots, n_k}, \dots$ ; da  $y(M_{n_1, n_2, \dots, n_k, n_{k+1}}) < y(M_{n_1, n_2, \dots, n_k})$ , ist auch  $a \in A'$ . Sei umgekehrt  $a \in A'$ ; dann gibt es in  $\mathfrak{L}$  eine Mengenfolge  $(M'_v)$  mit abnehmenden Höhen  $y(M'_v)$ , so daß  $a \in M'_v$  für alle  $v$ ; jede Menge  $M'_v$  ist eine der Mengen  $M_{n_1, n_2, \dots, n_k} \in \mathfrak{S}$ , sie habe die Indizes  $n'_1, n'_2, \dots, n'_r$ ; wegen  $y(M'_{v+1}) < y(M'_v)$  ist  $n'^{v+1}_1 \leq n'_1$ , fast alle  $n'_1$  haben also denselben Wert  $n^*_1$ ; ebenso haben fast alle  $n'_2$  denselben Wert  $n^*_2$  usw.; da  $\mathfrak{S}$  monoton, ist dann  $a \in M_{n^*_1, n^*_2, \dots, n^*_k}$  usw.; es ist also  $a \in M_{n^*_1, n^*_2, \dots, n^*_k}$  für alle  $k$ , d. h. es ist  $a \in A$ .

Literatur: N. Lusin, *Fund. math.* 10 (1927) S. 1. W. Sierpiński, *Fund. math.* 11 (1928) S. 16. C. Kuratowski u. E. Szpilrajn, *Fund. math.* 18 (1932) S. 160.

**2. Analytische Siebe.** Sei nun insbesondere  $E$  ein metrischer Raum,  $B$  eine beliebige Punktmenge in  $E \times R_1$ ; die sämtlichen Schichten  $B_y^{(1)}$  ( $y \in R_1$ ) von  $B$  bilden, wenn  $y$  als die Höhe von  $B_y^{(1)}$  betrachtet wird, ein Lusinsches Sieb  $\mathfrak{L}(B)$ , das wir als das durch die Menge  $B$  gelieferte Sieb bezeichnen. Die durch das Sieb  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Punktmenge  $A \subseteq E$  heißt die durch  $B$  gesiebte Menge; sie besteht aus allen  $x \in E$ , zu denen es in  $B$  eine Folge von Punkten  $(x, y_n)$  mit  $y_1 > y_2 > \dots > y_n > \dots$  gibt. Ist  $B \subseteq B'$  und  $A$  die durch  $B$  gesiebte,  $A'$  die durch  $B'$  gesiebte Menge, so ist  $A \subseteq A'$ .

Ist  $B$  eine analytische, bzw. Borelsche, bzw. abgeschlossene Menge in  $E \times R_1$ , so nennen wir das Sieb  $\mathfrak{L}(B)$  ein analytisches, bzw. Borelsches, bzw. abgeschlossenes Sieb in  $E$ .

**44-2-1.** Ist  $E$  separabel und vollständig, so ist die durch ein analytisches Sieb  $\mathfrak{L}(B)$  in  $E$  erzeugte Menge  $A$  analytisch in  $E$ .

Da  $E \times R_1$  separabel und vollständig, gibt es nach 40-5-4 eine eindeutige stetige Abbildung  $Q$  des  $R_0$  auf  $E \times R_1$ . Nach 33-8-1 gibt es eine Folge eindeutiger stetiger Abbildungen  $P_n$  des  $R_0$  auf sich selbst, so daß zu jeder Punktfolge  $(t_n)$  des  $R_0$  ein  $t \in R_0$  mit  $P_n(t) = t_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) gehört; wir setzen  $Q_n = P_n|Q$ ; dann ist auch  $Q_n$  eine eindeutige stetige Abbildung des  $R_0$  auf  $E \times R_1$ . Sei  $(x_n(t), y_n(t))$  ( $x_n(t) \in E$ ,  $y_n(t) \in R_1$ ) der Bildpunkt  $Q_n(t)$  von  $t \in R_0$ ; wegen der Stetigkeit von  $Q_n$  ist für je zwei Indizes  $n, n'$  die Menge aller  $t \in R_0$  mit  $x_n(t) = x_{n'}(t)$  abgeschlossen; also ist auch die Menge  $F$  aller  $t$  mit  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = \dots$  abgeschlossen im  $R_0$ ; wegen der Stetigkeit von  $Q_n$  ist ferner die Menge aller  $t$  mit  $y_n(t) < y_{n'}(t)$  offen im  $R_0$ ; also ist die Menge  $G$  aller  $t$  mit  $y_1(t) > y_2(t) > \dots > y_n(t) > \dots$  ein  $G_\delta$  im  $R_0$ . Wir setzen nun  $C = F \cdot G \cdot \bigcap_n Q_n^{-1}(B)$ ; da  $Q_n^{-1}(B)$  nach 40-5-1 analytisch im  $R_0$ , ist also auch  $C$  analytisch im  $R_0$ . Für alle  $t \in C$  ist  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = \dots$ ; hierdurch ist jedem  $t \in C$  ein Punkt  $x(t)$  ( $= x_1(t) = x_2(t) = \dots$ ) von  $E$  zugeordnet; die so definierte Abbildung  $Q^*$  von  $C$  ist eindeutig und wegen der Stetigkeit der  $Q_n$  stetig. Wir zeigen, daß  $A = Q^*(C)$ . Sei  $t \in C$ ; wegen  $C \subseteq \bigcap_n Q_n^{-1}(B)$  ist dann  $Q_n(t) \in B$ , d. h.  $(x(t), y_n(t)) \in B$ , und wegen  $C \subseteq G$  ist  $y_1(t) > y_2(t) > \dots > y_n(t) > \dots$ ; somit ist  $x(t) \in A$ ; damit ist gezeigt, daß  $Q^*(C) \subseteq A$ . Sei nun umgekehrt  $x \in A$ ; dann gibt es in  $B$  eine Folge von Punkten  $b_n = (x, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit  $y_1 > y_2 > \dots > y_n > \dots$ ; sei  $t_n \in Q^{-1}(b_n)$ ; nach Definition der  $P_n$  gibt es ein  $t \in R_0$ , so daß  $P_n(t) = t_n$  für alle  $n$ ; dann ist  $Q_n(t) = b_n$ ; mithin ist  $t \in \bigcap_n Q_n^{-1}(B)$ ; wegen  $x_n(t) = x$ ,  $y_n(t) = y_n$  ist ferner  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t) = \dots$  und  $y_1(t) > y_2(t) > \dots > y_n(t) > \dots$ , also ist  $t \in F \cdot G$ ; somit ist  $t \in C$ ; und wegen  $x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_n(t)$

$= \dots = x$  ist  $x(t) = x$ , d. h.  $x \in Q^*(C)$ ; damit ist gezeigt, daß auch  $A \subseteq Q^*(C)$ . Also ist  $A = Q^*(C)$ , w. z. b. w. — Da  $Q^*$  eindeutig und stetig und  $C$  analytisch im  $R_0$ , also separabel und absolut analytisch, ist nach 40-5-5 auch  $A$  absolut analytisch.

Die Umkehrung von 44-2-1 ist in den Sätzen 44-3-1, 44-3-11 enthalten.

Literatur: N. Lusin, *Leç. s. l. ensembles analytiques* S. 180.

**3. Spezielle Borelsche Siebe.** Ist  $\mathfrak{L}(B)$  ein Borelsches Sieb in  $E$ , und ist jede Schicht  $B_x^{(2)} (x \in E)$  von  $B$  abzählbar, so nennen wir  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ .

**44-3-1.** *Jede analytische Menge  $A$  des metrischen Raumes  $E$  wird erzeugt durch ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ .*

Sei  $\mathfrak{C}$  ein monotones, aus in  $E$  abgeschlossenen Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  bestehendes Suslinsches Schema mit  $A(\mathfrak{C}) = A$ . Ordnen wir der Menge  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  wie beim Beweise von 44-1-3 die Zahl  $y_{n_1 n_2 \dots n_k}$  zu und ist  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$  die Menge aller  $(x, y) \in E \times R_1$  mit  $x \in M_{n_1 n_2 \dots n_k}$ ,  $y = y_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , so ist  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$  abgeschlossen in  $E \times R_1$ ; die Summe  $B$  aller  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ;  $n_1, n_2, \dots, n_k = 1, 2, \dots$ ) ist also ein  $F_\sigma$  in  $E \times R_1$ ; somit ist  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ , und die durch  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge ist, wie beim Beweise von 44-1-3 gezeigt, die Menge  $A$ .

**44-3-11.** *Jede analytische Menge  $A$  des metrischen Raumes  $E$  wird erzeugt durch ein abgeschlossenes Sieb in  $E$ .*

Sei  $B$  die im Beweise von 44-3-1 definierte Menge,  $B^0$  ihre abgeschlossene Hülle, und  $A'$  die durch  $\mathfrak{L}(B^0)$  erzeugte Menge; wir werden zeigen, daß  $A = A'$ . Da  $A$  die durch  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge und  $B \subseteq B^0$ , ist  $A \subseteq A'$ ; es ist also nur mehr zu zeigen, daß  $A' \subseteq A$ , d. h. wir haben zu zeigen: ist  $(x, y_r) (r = 1, 2, \dots)$  eine Folge von Punkten aus  $B^0$  mit  $y_1 > y_2 > \dots > y_r > \dots$ , so ist  $x \in A$ . Da  $(x, y_r) \in B^0$  gibt es in  $B$  eine Folge von Punkten  $(x'_r, y'_r) (r = 1, 2, \dots)$ , so daß  $y'_1 > y'_2 > \dots > y'_r > \dots$  und  $x'_r \rightarrow x$ . Jeder Punkt  $(x'_r, y'_r)$  gehört zu einer der Mengen  $F_{n_1 n_2 \dots n_k}$ , sie habe die Indizes  $n_1^r, n_2^r, \dots, n_k^r$ ; wegen  $y_{r+1} < y_r$  ist auch  $n_1^{r+1} \leq n_1^r$ , fast alle  $n_1^r$  haben also denselben Wert  $n_1^*$ ; ebenso haben fast alle  $n_2^r$  denselben Wert  $n_2^*$  usw. Da das Suslinsche Schema der Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  monoton war, ist also  $x'_r \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  für fast alle  $r$ ,  $x'_r \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  für fast alle  $r$  usw. Da die Mengen  $M_{n_1 n_2 \dots n_k}$  abgeschlossen und  $x'_r \rightarrow x$ , ist also  $x \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$ ,  $x \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*}$  usw.; es ist also  $x \in M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \dots M_{n_1^* n_2^* \dots n_k^*} \dots$ , d. h. es ist  $x \in A$ , w. z. b. w.

Sei  $B$  irgendeine Menge  $\subseteq E \times R_1$  und  $A$  die durch das Sieb  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge. Ist dann  $x \in E - A$ , so gibt es in der Schicht  $B_x^{(2)}$  von  $B$  keine Punktfolge  $(x, y_n)$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) mit  $y_1 > y_2 > \dots > y_n > \dots$ ; d. h. die Menge  $B_x^{(2)}$  ist, nach wachsenden  $y$  geordnet, wohlgeordnet; ihre Ordinalzahl bezeichnen wir mit  $\xi_x$ ; wegen  $B_x^{(2)} \subseteq R_1$  ist nach 8-4-3  $\xi_x < \omega_1$ . — Sei nun  $M \subseteq E - A$ ; gibt es ein  $\xi^* < \omega_1$ , so daß  $\xi_x \leq \xi^*$  für alle  $x \in M$ , so heißt die Menge  $B$  (das Sieb  $\mathfrak{L}(B)$ ) limitiert auf  $M$ . Eine auf  $E - A$  limitierte Menge  $B$  (ein auf  $E - A$  limitiertes Sieb  $\mathfrak{L}(B)$ ) heiße limitiert.

Wir bezeichnen im folgenden mit  $I_{n_1, n_2, \dots, n_k}$  die Menge aller Punkte  $((n_i))$  des  $R_0$ , deren erste  $k$  Stellen die Werte  $n_1, n_2, \dots, n_k$  haben. Ferner bezeichnen wir, wenn  $A \subseteq E$ ,  $B \subseteq E \times R_1$ , als den sich nach  $A$  projizierenden Teil von  $B$ , in Zeichen  $B p A$ , die Menge aller  $(x, y) \in B$ , für die  $x \in A$ . Ist  $A$  eine Borelsche Menge in  $E$  und  $B$  eine Borelsche Menge in  $E \times R_1$ , so ist auch  $B p A$  eine Borelsche Menge in  $E \times R_1$ , denn nach 33-7-2 ist  $A \times R_1$  eine Borelsche Menge in  $E \times R_1$ , und  $B p A = B \cdot (A \times R_1)$ .

**44-3-2.** Ist  $E$  separabel und vollständig,  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$  und  $A$  die durch  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge, so ist  $\mathfrak{L}(B)$  limitiert auf jeder zu  $A$  fremden analytischen Menge  $M$  in  $E$ .

Wir nehmen an,  $\mathfrak{L}(B)$  sei nicht limitiert auf  $M$ , und leiten daraus einen Widerspruch her. Nach 42-5-4 ist  $B = \bigcup_{\nu_1} B_{\nu_1}$ , wo die  $B_{\nu_1}$  bezüglich  $E$  eindeutige Borelsche Mengen in  $E \times R_1$  bedeuten; ist dann  $B u B_{\nu_1}$  der unter  $B_{\nu_1}$  liegende Teil von  $B$  (§ 43, 2), so gibt es, da  $B$  nicht limitiert auf  $M$ , nach 8-4-1 einen Index  $\nu_1$ , so daß auch  $B u B_{\nu_1}$  nicht limitiert auf  $M$ ; dann ist  $B_{\nu_1}$  un abzählbar. Nach 40-5-4 gibt es eine eindeutige stetige Abbildung  $P$  des  $R_0$  auf  $M$ , und nach 42-3-2 gibt es eine schlichte stetige Abbildung  $P_1$  des  $R_0$  auf eine Menge  $B^{(1)} \subseteq B_{\nu_1}$ , so daß  $B_{\nu_1} - B^{(1)}$  abzählbar; dann ist auch  $B u B^{(1)}$  nicht limitiert auf  $M$ ; und da  $M = P(R_0) = \bigcup_{n_1} S P(I_{n_1})$ ,  $B^{(1)} = P_1(R_0) = \bigcup_{n'_1} S P_1(I_{n'_1})$ , also:

$$(B u B^{(1)}) p M = \bigcup_{n_1, n'_1} (B u P_1(I_{n'_1})) p P(I_{n_1}),$$

gibt es zwei Indizes  $n_1, n'_1$ , so daß  $B u P_1(I_{n'_1})$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1})$ . Da nach 42-3-3  $P_1(I_{n'_1})$  eine Borelsche Menge, ist nach 43-2-4 auch  $B u P_1(I_{n'_1})$  eine Borelsche Menge in  $E \times R_1$ . Nach 42-5-4 ist  $B u P_1(I_{n'_1}) = \bigcup_{\nu_2} B_{\nu_2}^{(1)}$ , wo die  $B_{\nu_2}^{(1)}$  bezüglich  $E$  eindeutige Borelsche Mengen bedeuten; da  $B u P_1(I_{n'_1})$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1})$  ist, gibt es einen Index  $\nu_2$ , so daß auch  $B u B_{\nu_2}^{(1)}$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1})$  ist. Nach 42-3-2 gibt es eine schlichte stetige Abbildung  $P_2$  des  $R_0$  auf eine Menge  $B^{(2)} \subseteq B_{\nu_2}^{(1)}$ , so daß

$B_{n_1}^{(1)} - B^{(2)}$  abzählbar; dann ist  $B^{(2)} \subseteq Bu B^{(1)}$  und es ist auch  $Bu B^{(2)}$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1})$ ; wegen:

$$P(I_{n_1}) = S_{n_1} P(I_{n_1, n_1}), B^{(2)} = P_2(R_0) = S_{n_1'', n_1''} P_2(I_{n_1'', n_1''})$$

ist:

$$(Bu B^{(2)}) p P(I_{n_1}) = S_{n_2, n_1'', n_2''} (Bu P_2(I_{n_1'', n_1''})) p P(I_{n_1, n_1});$$

wegen  $P_2(I_{n_1'', n_1''}) \subseteq B^{(2)} \subseteq Bu P_1(I_{n_1'})$  ist auch:

$$Bu P_2(I_{n_1'', n_1''}) \subseteq Bu P_1(I_{n_1'}) (= S_{n_1'} Bu P_1(I_{n_1', n_1'})),$$

also:

$$Bu P_2(I_{n_1'', n_1''}) = S_{n_2} (Bu P_1(I_{n_1', n_1'}) \cdot Bu P_2(I_{n_1'', n_1'})),$$

mithin:

$$(Bu B^{(2)}) p P(I_{n_1}) = S_{n_2, n_1', n_1'', n_2''} (Bu P_1(I_{n_1', n_1'}) \cdot Bu P_2(I_{n_1'', n_1'})) p P(I_{n_1, n_1}),$$

und da  $Bu B^{(2)}$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1})$ , gibt es Indizes  $n_2, n_2', n_1', n_2''$ , so daß  $Bu P_1(I_{n_1', n_1'}) \cdot Bu P_2(I_{n_1'', n_1'})$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1, n_1})$ . Indem wir so weiter schließen, erhalten wir eine Folge schlichter stetiger Abbildungen  $P_1, P_2, \dots, P_i, \dots$  des  $R_0$  auf Mengen  $B^{(i)} \subseteq B$ , die bezüglich  $E$  eindeutig sind, und für die  $B^{(i+1)} \subseteq Bu B^{(i)}$  gilt, sowie Indizesfolgen  $((n_k)), ((n_k')), ((n_k'')), \dots, ((n_k^{(i)})), \dots$ , so daß die Menge:

$$Bu P_1(I_{n_1', n_1'} \dots n_k') \cdot Bu P_2(I_{n_1'', n_1''} \dots n_k'') \dots Bu P_k(I_{n_1^{(k)}, n_1^{(k)}} \dots n_k^{(k)})$$

nicht limitiert auf  $P(I_{n_1, n_1} \dots n_k)$  ist. Sei  $t^*$  der Punkt  $((n_k))$  des  $R_0$  und  $t_i$  der Punkt  $((n_k^{(i)}))$  des  $R_0$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), ferner  $x^*$  der Punkt  $P(t^*) \in M$  und  $(x_i^*, y_i^*)$  der Punkt  $P_i(t_i) \in B^{(i)}$ . Da  $Bu P_i(I_{n_1^{(i)}, n_1^{(i)}} \dots n_k^{(i)})$  für  $k \geq i$  nicht limitiert auf  $P(I_{n_1, n_1} \dots n_k)$ , gibt es sicher eine Folge von Punkten  $(x_k, y_k) \in P_i(I_{n_1^{(i)}, n_1^{(i)}} \dots n_k^{(i)})$  mit  $x_k \in P(I_{n_1, n_1} \dots n_k)$ ; wegen der Stetigkeit von  $P$  gilt dann  $x_k \rightarrow x^*$ ; da auch  $(x_i^*, y_i^*) \in P_i(I_{n_1^{(i)}, n_1^{(i)}} \dots n_k^{(i)})$  für alle  $k$ , folgt aber aus der Stetigkeit von  $P_i$  auch  $x_k \rightarrow x_i^*$ ; also ist  $x_i^* = x^*$ , also  $P_i(t_i) = (x^*, y_i^*)$ . Da  $B^{(i+1)} \subseteq Bu B^{(i)}$  und  $P_i(t_i) \in B^{(i)}$ , ist ferner  $y_{i+1}^* < y_i^*$ . Wir haben somit gefunden: ist  $\mathfrak{L}(B)$  nicht limitiert auf  $M$ , so gibt es in  $B$  eine Punktfolge  $(x^*, y_i^*)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), so daß  $x^* \in M$ ,  $y_{i+1}^* < y_i^*$ . Dann aber würde  $x^*$  zu der durch  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugten Menge  $A$  gehören, im Widerspruche zur Annahme  $M \subseteq E - A$ .

Literatur: W. Sierpiński, Fund. math. 17 (1931), S. 77. N. Lusin, Leç. s. l. ensembles analytiques S. 183.

4. Die Konstituenten. Sei wieder  $B$  eine beliebige Punktmenge in  $E \times R_1$  und  $\mathfrak{L}(B)$  das durch sie gelieferte Sieb. Wie in § 42, 6 bezeichnen

wir die Menge aller Minimalpunkte einer Menge  $M \subseteq E \times R_1$  mit  $M^{(m)}$ . Wir definieren nun zu jeder Ordinalzahl  $\xi$  eine Menge  $B_\xi$  durch:

$$(4) \quad B_0 = B; \quad B_\xi = B - \bigcup_{\eta < \xi} (B_\eta)^{(m)}.$$

Setzen wir noch  $(B_\xi)^{(m)} = C_\xi$ , so ist  $B_{\xi+1} = B_\xi - C_\xi$ . Die Projektion von  $C_\xi$  in den Raum  $E$  bezeichnen wir mit  $C_\xi^*$ . Offenbar ist  $B_\xi \supseteq B_{\xi'}$ ,  $C_\xi^* \supseteq C_{\xi'}^*$  für  $\xi < \xi'$ . Die Mengen  $C_\xi$  sind eindeutig bezüglich  $E$ ; ist  $x \in C_\xi^*$  und  $(x, y) \in C_\xi$ ,  $(x, y') \in B_{\xi'}$  ( $\xi < \xi'$ ), so ist  $y < y'$ ; insbesondere: ist  $x \in C_\xi^*$ ,  $(x, y) \in C_\xi$ ,  $(x, y') \in C_{\xi'}$  ( $\xi < \xi'$ ), so ist  $y < y'$ .

Wir setzen noch:

$$C_\xi^{**} = \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta^*,$$

wobei für  $\xi = 0$  zu setzen ist:  $\bigcup_{\eta < \xi} C_\eta^* = E$ ; dann ist  $C_\xi^* = C_{\xi-1}^{**}$  für alle  $\xi$ .

**44-4-1.** Ist  $x \in C_\xi^{**}$ , so hat die Schicht  $B_x^{(2)}$  von  $B$  die Gestalt:  $B_x^{(2)} = W_\xi + (B_\xi)_x^{(2)}$ , wo  $W_\xi$ , nach wachsenden  $y$  geordnet, eine wohlgeordnete Menge der Ordinalzahl  $\xi$  ist.

Ist  $x \in C_\xi^{**}$ , so gibt es zu jedem  $\eta < \xi$  genau einen Punkt  $(x, y_\eta) \in C_\eta$ , wobei  $y_\eta < y_{\eta'}$  für  $\eta < \eta'$  ( $< \xi$ ); die Menge  $W_\xi$  der Punkte  $y_\eta$  ( $\eta < \xi$ ) ist also wohlgeordnet, und hat nach 7-3-1 die Ordinalzahl  $\xi$ . Da  $B_\xi = B - \bigcup_{\eta < \xi} (B_\eta)^{(m)} = B - \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta$ , ist  $B_x^{(2)} = (B_\xi)_x^{(2)} + W_\xi$ .

**44-4-2.** Für  $\xi \geq \omega_1$  ist  $C_\xi^{**} = \Lambda$ .

Dies folgt aus 44-4-1 und 8-4-3.

Nun setzen wir:  $K_\xi = C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**}$ . Wegen 44-4-2 ist  $K_\xi = \Lambda$  für  $\xi \geq \omega_1$ . Die Mengen  $K_\xi$  ( $\xi < \omega_1$ ) heißen die Konstituenten von  $E$  bezüglich des Siebes  $\mathfrak{L}(B)$ . Das System der Konstituenten  $K_\xi$  ( $\xi < \omega_1$ ) ist disjunkt.

**44-4-3.** Es ist  $E = \bigcup_{\xi < \omega_1} K_\xi$ .

Denn wegen  $C_0^{**} = E$  ist  $E = \bigcup_{\xi < \omega_1} (C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**}) + C_{\omega_1}^{**} = \bigcup_{\xi < \omega_1} K_\xi + C_{\omega_1}^{**}$ ; die Behauptung folgt also aus 44-4-2.

**44-4-4.** Ist  $A$  die durch das Sieb  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge und  $x \in K_\xi$ , so ist, damit  $x \in A$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $(B_\xi)_x^{(2)} \supset \Lambda$  sei.

Notwendig: Ist  $(B_\xi)_x^{(2)} = \Lambda$ , so ist nach 44-4-1  $B_x^{(2)}$  wohlgeordnet, also  $x \in E - A$ . Hinreichend: Wegen  $x \in K_\xi (= C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^{**})$  ist  $x \sim_\varepsilon C_{\xi+1}^{**}$ , d. h.  $x \sim_\varepsilon C_\xi^*$ ; es ist also  $B_x^{(2)} C_\xi^* = \Lambda$ , d. h.  $B_x^{(2)} (B_\xi)_x^{(2)} = \Lambda$ ; ist also  $(B_\xi)_x^{(2)} \supset \Lambda$ , so gibt es in  $(B_\xi)_x^{(2)}$  kein kleinstes  $y$ , somit ist  $B_x^{(2)}$  nicht wohlgeordnet, also  $x \in A$ .

**44-4-41.** Ist  $A$  die durch das Sieb  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge, so ist  $K_\xi - A$  die Menge aller  $x \in E$ , für die die Schicht  $B_x^{(2)}$  bei Ordnung nach wachsenden  $y$  wohlgeordnet von der Ordinalzahl  $\xi$  ist.

Dies folgt unmittelbar aus 44-4-4 und 44-4-1.



**44-4-5.** Ist  $E$  separabel und vollständig und ist  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ , so ist  $B_\xi$  ( $\xi < \omega_1$ ) eine Borelsche Menge in  $E \times R_1$ .

Dies folgt wegen 42-6-21 aus der Definition (4) der Mengen  $B_\xi$  durch transfinite Induktion.

**44-4-51.** Ist  $E$  separabel und vollständig und ist  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ , so ist jede Konstituente  $K_\xi$  ( $\xi < \omega_1$ ) eine Borelsche Menge in  $E$ .

Wegen 44-4-5 und 42-6-21 sind die Mengen  $C_\xi = (B_\xi)^{(m)}$  Borelsche Mengen in  $E \times R_1$ . Da  $C_\xi$  eindeutig bezüglich  $E$ , ist nach 42-4-5 auch die Projektion  $C_\xi^*$  von  $C_\xi$  in den Raum  $E$  eine Borelsche Menge in  $E$ , also auch  $C_\xi^{**} = \bigcup_{\eta < \xi} C_\eta^*$ , also auch  $K_\xi = C_\xi^{**} - C_{\xi+1}^*$ .

**44-4-6.** Ist  $E$  separabel und vollständig, ist  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ , ist  $A$  die durch  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge und  $M$  eine zu  $A$  fremde analytische Menge in  $E$ , so gibt es ein  $\xi^* < \omega_1$ , so daß  $M \cap K_\xi = \emptyset$  für  $\xi > \xi^*$ .

Dies folgt aus 44-3-2 und 44-4-41.

**44-4-7.** Ist  $E$  separabel und vollständig und ist  $\mathfrak{L}(B)$  ein spezielles Borelsches Sieb in  $E$ , so ist, damit die durch  $\mathfrak{L}(B)$  erzeugte Menge  $A$  eine Borelsche Menge in  $E$  sei, notwendig und hinreichend, daß  $\mathfrak{L}(B)$  limitiert sei.

Notwendig: Ist  $A$  eine Borelsche Menge in  $E$ , so auch  $E - A$ ; die Behauptung ist also enthalten in 44-3-2. Hinreichend: Ist  $\mathfrak{L}(B)$  limitiert, so gibt es wegen 44-4-41 ein  $\xi^* < \omega_1$ , so daß  $K_\xi - A = \emptyset$  für  $\xi > \xi^*$ ; dann ist nach 44-4-3  $E - A = \bigcup_{\xi \leq \xi^*} (K_\xi - A)$ . Bezeichnen wir mit  $B_\xi^*$  die Projektion von  $B_\xi$  in den Raum  $E$ , so ist nach 44-4-4:  $K_\xi - A = K_\xi - B_\xi^*$ . Nach 44-4-51 ist  $K_\xi$  eine Borelsche Menge in  $E$ ; nach 44-4-5 und 42-4-5 ist  $B_\xi^*$  eine Borelsche Menge in  $E$ , also auch  $K_\xi - A$ , also auch  $E - A$ , also auch  $A$ .

Literatur: N. Lusin, *Lec. s. l. ensembles analytiques* S. 187. N. Lusin u. W. Sierpiński, *Journ. de math.* (9) 2 (1923) S. 53.

## Nachträge und Ergänzungen.

Am Schlusse von § 25, 4 (S. 181) ist einzufügen:

**25-4-2.** Ist  $f$  eine Funktion auf der separablen Menge  $A$ , so gibt es nur abzählbar viele Funktionswerte von  $f$ , die Maxima (bzw. Minima) sind.

Sei  $H_1, H_2, \dots, H_n, \dots$  ein abzählbares ausgezeichnetes System in  $A$  offener Mengen (§ 13, 1). Ist  $y$  ein Maximum von  $f$ , so gibt es ein  $a \in A$  und eine Umgebung  $U_a$ , so daß  $f(a) = y$  und  $f(x) \leq y$  für alle  $x \in U_a$ ; also gibt es auch einen Index  $n_y$ , so daß  $a \in H_{n_y}$  und  $f(x) \leq y$  für alle  $x \in H_{n_y}$ ; ist auch  $z$  ein Maximum von  $f$ , so gibt es ebenso ein  $a' \in A$  und einen Index  $n_z$ , so daß  $f(a') = z$ ,  $a' \in H_{n_z}$ ,  $f(x) \leq z$  für alle  $x \in H_{n_z}$ . Ist  $z \neq y$ , so ist offenbar  $n_z \neq n_y$ , d. h. verschiedenen Maxima von  $f$  sind verschiedene Indizes  $n$  zugeordnet; also gibt es nur abzählbare viele Maxima von  $f$ .

Literatur: W. Sierpiński, C. R. Vars. 1912, S. 236; Prace mat.-fis. 27 (1916) S. 17.

Zu § 30, 2 (S. 234): Satz 30-2-1 hat zu lauten:

**30-2-1.** Ist  $A \in \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C})$ , so ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) \subseteq \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C})_\sigma$ ; ist  $A \in \mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ , so ist  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C}) \subseteq \mathfrak{F}(\mathfrak{C})_\sigma$ . Ist  $E \in \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$ , so ist  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})_\delta$ ; ist  $E \in \overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C})$ , so ist  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C}) \subseteq \overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})_\delta$ .

Zu § 30, 2 (S. 236): In 30-2-8 und 30-2-31 ist die Voraussetzung  $E \in \mathfrak{R}$  hinzuzufügen.

Zu § 31. Die in der Literatur zu § 31 angeführte Abhandlung von Sierpiński ermöglicht es, einige Sätze dieses Paragraphen einfacher und systematischer zu beweisen.

Man kann § 31, 5 (Das Mengensystem  $\mathfrak{R}_1^1$ ) und § 31, 6 (Das Mengensystem  $\mathfrak{R}^*$ ) unmittelbar an § 31, 1 schließen, indem man den Beweis von 31-6-1 durch den folgenden ersetzt:

Aus 3-7-4 folgt  $\mathfrak{R}^* \subseteq \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}^2$ . Bleibt zu zeigen  $\mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}^2 \subseteq \mathfrak{R}^*$ , d. h.: ist  $A \in \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}^2$ , so ist auch  $A \in \mathfrak{R}^*$ . Sei also  $A \in \mathfrak{R}_2 \mathfrak{R}^2$ ; dann ist  $A = \bigcup_i B_i = \bigcup_i C_i$  mit  $B_i \in \mathfrak{R}^1$ ,  $C_i \in \mathfrak{R}_1$ ; hierin ist weiter  $B_i = \bigcup_k B_{ik}$ ,  $C_i = \bigcup_k C_{ik}$

mit  $B_{ik} \in \mathfrak{R}$ ,  $C_{ik} \in \mathfrak{R}$ , und nach 2-5-2 kann angenommen werden:  $B_{ik+1} \supseteq B_{ik}$ ,  $C_{ik+1} \subseteq C_{ik}$ . Wir setzen:  $P_{ik} = B_{1k} B_{2k} \dots B_{ik} C_{ik}$ ,  $Q_n = P_{1n} + P_{2n} + \dots + P_{nn}$ . Dann ist  $Q_n \in \mathfrak{R}$ , es genügt also, zu zeigen:  $A = \lim_n Q_n$ , d. h.: ist  $a \in A$ , so ist auch  $a \in Q_n$  für fast alle  $n$ , und ist  $a \in A$ , so ist auch  $a \in Q_n$  für fast alle  $n$ . — Sei also  $a \in A$ ; dann gibt es ein  $i^*$ , so daß  $a \in C_{i^*}$ ; dann ist auch  $a \in C_{i^*,k}$  für alle  $k$ ; ferner ist  $a \in B_i$  für alle  $i$ ; zu jedem  $i$  gibt es also ein  $k_i$ , so daß  $a \in B_{ik}$  für  $k \geq k_i$ ; setzen wir  $k^* = \max(k_1, k_2, \dots, k_{i^*})$ , so ist also  $a \in B_{ik}$  für  $i = 1, 2, \dots, i^*$  und  $k \geq k^*$ ; also ist  $a \in P_{i^*,k}$  für  $k \geq k^*$ , also auch  $a \in Q_n$  für  $n \geq \max(i^*, k^*)$ . Sei sodann  $a \in A$ ; dann gibt es ein  $i^*$ , so daß  $a \in B_{i^*}$ ; dann ist auch  $a \in B_{i^*,k}$  für alle  $k$ , also auch  $a \in P_{i^*,k}$  für  $i \geq i^*$  und alle  $k$ ; ferner ist  $a \in C_i$  für alle  $i$ ; zu jedem  $i$  gibt es also ein  $k_i$ , so daß  $a \in C_{ik}$  für  $k \geq k_i$ ; setzen wir  $k^* = \max(k_1, k_2, \dots, k_{i^*})$ , so ist also  $a \in C_{ik}$  für  $i = 1, 2, \dots, i^*$  und  $k \geq k^*$ ; also ist  $a \in P_{i^*,k}$  für  $i = 1, 2, \dots, i^*$  und  $k \geq k^*$ ; und da, wie schon gezeigt:  $a \in P_{i^*,k}$  für  $i \geq i^*$  und alle  $k$ , ist  $a \in Q_n$  für  $n \geq k^*$ .

Zu Beginn von § 31, 2 füge man die Definition ein: Das Funktionensystem  $\mathfrak{S}$  auf  $E$  heiße (abweichend von der in der Algebra üblichen Terminologie) ein Ring, wenn aus  $f_1 \in \mathfrak{S}$  und  $f_2 \in \mathfrak{S}$  folgt:  $\max(f_1, f_2) \in \mathfrak{S}$ ,  $\min(f_1, f_2) \in \mathfrak{S}$ . Dann gilt:

**31-2-0.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so auch  $\mathfrak{S}^1$  und  $\mathfrak{S}_1$ .

In den Sätzen 31-2-2, 31-2-21, 31-2-3 und in Formel (2) S. 242 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei ein Ring.

Auf S. 244 füge man den Satz ein:

**31-3-0.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so auch  $\mathfrak{S}_1^1$ .

In den Sätzen 31-3-2, 31-3-31 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei ein Ring. Nach Satz 33-3-31 füge man ein:

Wir bezeichnen ein Funktionensystem  $\mathfrak{S}$ , für das  $\mathfrak{S}_1^1 = \mathfrak{S}$  ist, als ein  $\mu$ -System. Dann gilt:

**31-3-32.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{S}_1^1$  das kleinste  $\mu$ -System über  $\mathfrak{S}$ .

Nach 31-3-31 ist  $\mathfrak{S}_1^1$  ein  $\mu$ -System. Sei  $\mathfrak{X}$  ein  $\mu$ -System über  $\mathfrak{S}$ , d. h.  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X} = \mathfrak{X}_1^1$ ; aus  $\mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{X}$  folgt  $\mathfrak{S}_1^1 \subseteq \mathfrak{X}_1^1$ , also  $\mathfrak{S}_1^1 \subseteq \mathfrak{X}$ .

Auf S. 246 füge man den Satz ein:

**31-4-0.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so auch  $\mathfrak{S}^*$ .

Die Sätze 31-4-2, 31-4-4 sind zu ersetzen durch:

**31-4-2.** Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}^2$ .

Der Beweis, daß  $\mathfrak{G}^* \subseteq \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^2$ , bleibt ungeändert. Es ist noch zu zeigen, daß  $\mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^2 \subseteq \mathfrak{G}^*$ , d. h.: ist  $f \in \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^2$ , so ist auch  $f \in \mathfrak{G}^*$ . Sei also  $f \in \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^2$ ; dann ist  $f = \lim_i f'_i = \lim_i f''_i$ , wo  $f'_i \in \mathfrak{G}^1$ ,  $f''_i \in \mathfrak{G}_1$  und  $f'_{i+1} \leq f'_i$ ,  $f''_{i+1} \geq f''_i$ ; hierin ist weiter  $f'_i = \lim_k f'_{ik}$ ,  $f''_i = \lim_k f''_{ik}$  mit  $f'_{ik} \in \mathfrak{G}$ ,  $f''_{ik} \in \mathfrak{G}$ ,  $f'_{i,k+1} \geq f'_{ik}$ ,  $f''_{i,k+1} \leq f''_{ik}$ . Wir setzen:  $g_{ik} = \min(f'_{1k}, f'_{2k}, \dots, f'_{ik}, f''_{ik})$ ,  $f_n = \max(g_{1n}, g_{2n}, \dots, g_{nn})$ . Dann ist  $f_n \in \mathfrak{G}$ , es genügt also, zu zeigen:  $f = \lim_n f_n$ , d. h.: ist  $u < f(x)$ , so ist auch  $u < f_n(x)$  für fast alle  $n$ , und ist  $u > f(x)$ , so ist auch  $u > f_n(x)$  für fast alle  $n$ . — Sei also  $u < f(x)$ ; dann ist auch  $u < f'_i(x)$  für fast alle  $i$ ; sei etwa  $u < f'_{i^*}(x)$ ; dann ist auch  $u < f'_{ik}(x)$  für alle  $k$ ; ferner ist  $u < f'_i(x)$  für alle  $i$ ; zu jedem  $i$  gibt es also ein  $k_i$ , so daß  $u < f'_{ik}(x)$  für  $k \geq k_i$ ; setzen wir  $k^* = \max(k_1, k_2, \dots, k_{i^*})$ , so ist also  $u < f'_{ik}(x)$  für  $i = 1, 2, \dots, i^*$  und  $k \geq k^*$ ; also ist  $u < g_{ik}(x)$  für  $k \geq k^*$ , also auch  $u < f_n(x)$  für  $n \geq \max(i^*, k^*)$ . Sei sodann  $u > f(x)$ ; dann gibt es ein  $i^*$ , so daß  $u > f'_{i^*}(x)$ ; dann ist auch  $u > f'_{ik}(x)$  für alle  $k$ , also auch  $u > g_{ik}(x)$  für  $i \geq i^*$  und alle  $k$ ; ferner ist  $u > f'_{i^*}(x)$  für alle  $i$ ; zu jedem  $i$  gibt es also ein  $k_i$ , so daß  $u > f'_{ik}(x)$  für  $k \geq k_i$ ; setzen wir  $k^* = \max(k_1, k_2, \dots, k_{i^*})$ , so ist also  $u > f'_{ik}(x)$  für  $i = 1, 2, \dots, i^*$  und  $k \geq k^*$ ; also ist  $u > g_{ik}(x)$  für  $i = 1, 2, \dots, i^*$  und  $k \geq k^*$ ; und da, wie schon gezeigt:  $u > g_{ik}(x)$  für  $i \geq i^*$  und alle  $k$ , ist  $u > f_n(x)$  für  $n \geq k^*$ .

In den Sätzen 31.4-41, 31.4-5 kann nun die Voraussetzung,  $\mathfrak{I}$  sei autark und additiv, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{I}$  sei ein Ring. Der Beweis von 31.4-5 ist zu ersetzen durch:

Nach 31.3-0 ist  $\mathfrak{I}_1^1$  ein Ring, also nach 31.4-2:  $(\mathfrak{I}_1^1)^* = (\mathfrak{I}_1^1)_2 \cdot (\mathfrak{I}_1^1)^2$ . Hierin ist  $(\mathfrak{I}_1^1)_2 = ((\mathfrak{I}_1^1)^1)_1$ ; nach 31.3-3 ist  $(\mathfrak{I}_1^1)^1 = \mathfrak{I}^1$ , also  $(\mathfrak{I}_1^1)_2 = (\mathfrak{I}^1)_1 = \mathfrak{I}_2$ ; ebenso ist  $(\mathfrak{I}_1^1)^2 = \mathfrak{I}^2$ . Also ist nach 31.4-2:  $(\mathfrak{I}_1^1)^* = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}^2 = \mathfrak{I}^*$ .

Sodann füge man ein:

**31.4-51.** Ist  $\mathfrak{G}$  ein Ring, so ist  $(\mathfrak{G}^*)^1 = \mathfrak{G}^2$ ,  $(\mathfrak{G}^*)_1 = \mathfrak{G}_2$ .

Da nach 31.4-2  $\mathfrak{G}^* \subseteq \mathfrak{G}^2$ , ist  $(\mathfrak{G}^*)^1 \subseteq (\mathfrak{G}^2)^1$ ; da hierin  $\mathfrak{G}^2 = (\mathfrak{G}_1)^1$  und  $\mathfrak{G}_1$  nach 31.2-0 ein Ring, ist nach 31.2-21:  $(\mathfrak{G}^2)^1 = \mathfrak{G}^2$ , also  $(\mathfrak{G}^*)^1 \subseteq \mathfrak{G}^2$ . Da  $\mathfrak{G}_1 \subseteq \mathfrak{G}^*$ , ist auch umgekehrt  $\mathfrak{G}^2 = (\mathfrak{G}_1)^1 \subseteq (\mathfrak{G}^*)^1$ .

**31.4-52.** Ist  $\mathfrak{G}$  ein Ring, so ist  $\mathfrak{G}^*$  ein  $\mu$ -System.

Denn nach 31.4-51 ist  $(\mathfrak{G}^*)_1 = \mathfrak{G}_2 \mathfrak{G}^2$ , also nach 31.4-2  $(\mathfrak{G}^*)_1^1 = \mathfrak{G}^*$ .

In 31.4-6 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{I}$  sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{I}$  sei ein Ring.

Zu § 32, 2 (S. 252, 253): In Satz 32-2-1 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{G}$  sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{G}$  sei ein Ring. In Satz 32-2-11 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{G}$  sei völlig autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{G}$  sei ein Ring und ein  $\mu$ -System.

Zu § 34, 1 (S. 277): Neben 34-1-2, 34-1-21 treten die ganz ebenso zu beweisenden Sätze:

**34-1-20.** *Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{S}^\xi$  und  $\mathfrak{S}_\xi$  ein Ring.*

**34-1-22.** *Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring und  $\xi$  Grenzzahl, so ist auch das System (1-11) ein Ring.*

In 34-1-8, 34-1-31, 34-1-32 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei ein Ring.

Neben 34-1-4 tritt:

**34-1-40.** *Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$   $\mathfrak{S}^\xi$  und  $\mathfrak{S}_\xi$  ein  $\mu$ -System.*

Denn nach 34-1-8 und 34-1-32 ist  $(\mathfrak{S}^\xi)_1 = \mathfrak{S}_{\xi+1}$ ,  $(\mathfrak{S}^\xi)^1 = \mathfrak{S}^\xi$ , also nach 34-1-1:  $(\mathfrak{S}^\xi)_1^1 = \mathfrak{S}_{\xi+1} \mathfrak{S}^\xi = \mathfrak{S}^\xi$ .

Zu § 34, 2 (S. 279, 280): Aus 34-1-20 folgt:

**34-2-21.** *Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$  auch  $\mathfrak{S}_\xi^\xi$  ein Ring.*

In 34-2-8 und 34-2-31 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei autark, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei ein Ring. Aus 34-2-8 folgt dann:

**34-2-32.** *Ist  $\mathfrak{S}$  ein Ring, so ist für jedes  $\xi \geq 1$   $\mathfrak{S}_\xi^\xi$  ein  $\mu$ -System.*

In 34-2-6 und 34-2-61 kann die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei autark und additiv, ersetzt werden durch die Voraussetzung,  $\mathfrak{S}$  sei ein Ring.

---

## Sachregister.

- Abbildung 3, 148; A. analytischer Mengen 347; A. Borelscher Mengen 269, 374.
- abgeschlossen bis auf eine Menge erster Kategorie 137.
- abgeschlossen in einer Menge 61.
- abgeschlossene Halbgerade = Menge aller Punkte  $x \geq a$  oder  $x \leq a$  des  $R_1$ , des  $\bar{R}_1$ ; a. Hülle 57; a. Hülle in  $B$  62; a. Kugel 54; a. Menge 54, 58, 60, 81; a. Umgebung 55.
- abgeschlossenes Intervall im  $R_1$  413; im  $\bar{R}_1$  180; im  $R_n$  146; a. Mengensystem 10, 14; a. Sieb 393.
- abgesonderte Mengen 85, 87.
- Ableitungen einer Menge 76.
- Abschnitt einer wohlgeordneten Menge 35; A. eines Suslinschen Schemas 339.
- Abschnittsumme 339.
- absolut abgeschlossene Menge 118; a. analytische Menge 346; a. Borelsche Menge 269; a. perfekte Menge 123.
- absolute  $\mathfrak{B}_F^-, \mathfrak{B}_F^+, \mathfrak{B}_F^\pm$ -Menge 269; a. Eigenschaften 68.
- absolutes  $F_G$  118; a.  $G_G$  126; a. Maximum, Minimum 180, 185, 299.
- Abstand zweier Punkte 47, 184; eines Punktes von einer Menge 51, 93, 184; zweier Mengen 51, 94.
- absteigend wohlgeordnetes Mengensystem 81.
- Abweichung zweier Mengen 52, 108, 124.
- abzählbar unendliche Menge 23.
- abzählbare Menge 24.
- abzählbarer Ordnungstypus 30.
- abzählbares Sieb 391.
- additives Funktionensystem 238.
- Adhärenz 75.
- ähnliche Abbildung 30; ä. Mengen 30.
- ambige Bairesche Funktion 279, 284; a. Borelsche Menge 261, 264.
- analytische Menge über  $\mathfrak{M}$  342; a. Menge in  $E$  344; a. M. in Produkträumen 351.
- analytisches Sieb 393.
- Anfangszahl 43.
- äquivalente Aussagen 1; ä. Mengen 20; ä. Siebe 391.
- Äquivalenzsatz 41.
- asymmetrische Relation 20.
- aufsteigend wohlgeordnetes Mengensystem 80.
- ausgezeichnetes System offener Mengen 77.
- Aussage 1.
- Aussagenfunktion 1.
- Auswahl 9.
- Auswahlaxiom 9.
- Auswahlrelation 9.
- Auswahlüberdeckung 96.
- äußerer Punkt 59.
- autarkes Funktionensystem 236.
- B-Funktion 332.
- $\mathfrak{B}_F^-, \mathfrak{B}_F^+, \mathfrak{B}_F^\pm$ -Menge 264;  $\mathfrak{B}_1^-, \mathfrak{B}_1^+, \mathfrak{B}_1^\pm$ ,  $\mathfrak{B}_2^-, \mathfrak{B}_2^+, \mathfrak{B}_2^\pm$ -Mengen 264;  $\mathfrak{B}_2^2$ -Mengen 265, 303.
- $\mathfrak{B}$ -trennbar 369;  $\mathfrak{B}_F, \mathfrak{B}_F^\pm$ -trennbar 267;  $\mathfrak{B}_F^\pm$ -trennbar 266, 274.
- Bairesche Eigenschaft einer Funktion 356, einer Menge 354; B. Funktion über  $\mathfrak{C}$  277, 279; B. Funktion in  $E$  284, 302, 345.

- Bairesches System 278.  
 Begrenzung, Begrenzungspunkt 59.  
 beiderseitiger Häufungspunkt 171, 208.  
 Bereich 232; B. einer Funktion 4, 180;  
   B. einer impliziten Funktion 390;  
   B. einer Relation 3.  
 beschränkte Funktion 180, 185; b. Menge 52; b. M. in vollständigen Räumen 124; b. Menge von Zahlenfolgen 225; b. Punktfolge 113.  
 Bild, Bildmenge 3.  
 Bildpunkt 159.  
 Borelsche Menge über  $\mathbb{R}$  258, 261; B. Menge in  $E$  264, 344; B. M., deren Schichten abzählbar sind 379; B. M. in Produkträumen 270; B. M. und Bairesche Funktionen 280, 285.  
 Borelsches Sieb 393; B. System 260.  
 $G_\delta$ -,  $G_\delta^c$ -,  $G_\delta^c$ -Funktionen 284; mit Annäherung  $q$  eine  $G_\delta^c$ -Funktion 291; im Punkte  $a$  eine  $G_\delta^c$ -Funktion 292; im Punkte  $a$  mit Annäherung  $q$  eine  $G_\delta^c$ -Funktion 292.  
 $G_\delta^c$ -konvergent 309.  
 Cantorsches Diskontinuum 124.  
 Cauchysche Folge von Punkten 112; von nicht leeren Mengen 124.  
 charakteristische Funktion 5; ch. F. v.  $\lim A_n$ ,  $\lim A_n$ ,  $\lim A_n$  19; ch. F. einer bis auf eine Menge erster Kategorie offenen Menge 204; ch. F. einer Borelschen Menge 286; ch. F. einer Menge, die die Bairesche Eigenschaft hat 356.  
 $\delta$ -Körper 16;  $\delta$ -Prozeß 15;  $\delta$ -Ring 16, 260;  $\delta$ -System 15, 241, 260, 266.  
 Darboux'sche Funktion 186.  
 darstellende Menge (die eine Funktion d. M.) 295, 387.  
 Diagonalen: Ordnung einer Doppelfolge nach D. 5.  
 dicht geordnete Menge 29.  
 dichte Menge 63, 65.  
 dichter Ordnungstypus 30.  
 Differenz von Mengen 6.  
 disjunktes dyadisches Schema 122; d. dyadisches Teilschema eines Suslinschen Schemas 363; d. Mengensystem 10; d. Suslinsches Schema 370.  
 diskontinuierliche Menge 102.  
 Diskontinuum 122.  
 Distributivgesetze 6, 9, 10, 22.  
 Divergenzmenge einer Funktionenfolge 320.  
 Divergenzpunkt einer Funktionenfolge 211.  
 Doppelfolge 5, 7.  
 Dreiecksungleichung 48.  
 Dualbruch 25.  
 Durchschnitt einer Menge 52.  
 Durchschnitt von Mengen 6, 7.  
 Durchschnittsätze 94, 119.  
 dyadisch darstellbare Menge 121; d. rationale Zahl 25.  
 dyadische Folge 119; d. Ordnung einer Doppelfolge 5.  
 dyadischer Komplex 119.  
 dyadisches Diskontinuum 122, 127, 173; d. Schema 120.  
 echter Teil einer Menge 2.  
 eigentliches Maximum (Minimum) einer Funktion 181.  
 eindeutige Abbildung 4; e. Menge 382; e. Relation 4; e. stetige Abbildung 159, 295; e. st. A. eines dyadischen Diskontinuums auf ein Intervall 161, auf ein Quadrat 161; e. st. A. e. Intervalles auf ein Quadrat 167.  
 eindeutiges stetiges Bild = stetiges Bild 159.  
 ein-eindeutige Abbildung (Relation) 4.  
 einfach-gleichmäßige Konvergenz 211.  
 eingeschränkt: auf  $C$  e. Teilabbildung 156, Teilfunktion 180.  
 ein-mehrdeutige Abbildung (Relation) 4.  
 Einschließungssätze für Funktionen 252, 283, 287, 300; für Mengen 251, 263, 266.

- einseitige Hülle einer Funktion 208;  
 e. Schrankenfunktion 209.  
 einseitiger Grenzwert 209; e. Häufungspunkt 171, 208.  
 endliche Funktion 180; e. Zahl 177.  
 endlicher Systembruch 25.  
 Entfernung zweier Punkte 47, 184;  
 eines Punktes von einer Menge 51, 93,  
 184; zweier Mengen 51, 94.  
 erster Art (Unstetigkeitspunkt e. A.)  
 210; e. Kategorie s. Kategorie.  
 erstes Element einer Menge 29.  
 Erweiterung einer Abbildung 156;  
 einer eindeutigen Abbildung 164;  
 einer halbstetigen Funktion 300;  
 einer Homöomorphie 174; einer stetigen  
 Funktion 255.  
 Erweiterungssätze für Funktionen  
 254, 283, 288, 300, 388; für Mengen  
 253, 263, 267, 346.  
 Existenzsätze für analytische Mengen  
 352; für Bairesche Funktionen 294;  
 für Borelsche Mengen 274.  
  
 $F_\sigma$ -Mengen 60, 62, 131, 313.  
 ( $k$ )-facher Punkt einer Abbildung 361,  
 379; ( $k$ )-f. Wert einer Funktion 365,  
 379.  
 Faktorenraum 168.  
 fast alle Glieder einer Folge 5.  
 Feld einer Relation 20.  
 Folge 5; F. Bairescher Funktionen  
 309; F. Borelsche Mengen 312; An-  
 ordnung von Folgen natürlicher Zah-  
 len 45.  
 formal äquivalente Aussagenfunktio-  
 nen 1; f. ä. Relationen 3.  
 formale Implikation 1.  
 fremde Mengen 7.  
 Funktion 4, 180.  
  
 $G_\delta$ -Mengen 60, 62, 135, 138.  
 $\gamma^1$ -,  $\gamma_1$ -,  $\gamma_1^1$ -System 316.  
 Gebiet 102.  
 Gegenbereich einer Relation 3.  
 genau eine  $\mathfrak{B}_\varepsilon$ -,  $\mathfrak{B}_\varepsilon^2$ -,  $\mathfrak{B}_\varepsilon^2$ -Menge 274;  
 g. eine  $\mathfrak{C}_\varepsilon$ -,  $\mathfrak{C}_\varepsilon^2$ -,  $\mathfrak{C}_\varepsilon^2$ -Funktion 294.  
  
 geordnete Menge 29.  
 gerade Ordinalzahl 39.  
 geschlossenes Funktionensystem 238.  
 gesiebte Menge 393.  
 Gitterpunkt 50.  
 gleichgradig stetige Funktionenfolge,  
 Funktionenmenge 228.  
 Gleichheitsrelation 20.  
 gleichmäßig stetige Abbildung 156,  
 164; gl. st. Funktion 185, 299.  
 gleichmäßige Konvergenz 215, 216;  
 gl. K. in einem Punkte 214, 217;  
 Punkt gleichmäßiger K. einer Funk-  
 tionenfolge 218.  
 Grenzfunktion einer Funktionenfolge  
 211.  
 Grenzpunkt einer Punktfolge 109.  
 Grenzwandlung einer Funktionen-  
 folge 223; einer Funktionenmenge 227.  
 Grenzwerte einer Funktion 181, 199, 200.  
 Grenzzahl 38.  
 Grundzahl eines Systembruches 25.  
  
 halbbeschränkte Menge von Zahlen-  
 folgen 225.  
 Halbgerade s. abgeschlossene, offene  
 H.  
 halbkompakte Menge 95.  
 halboffenes Intervall im  $R_1$  413; im  
 $R_n$  180; im  $R_n$  146.  
 halbschlichte Abbildung 375, 381;  
 h. Funktion 378.  
 halbschlichtes stetiges Bild 375.  
 halbstetige Abbildung 148; h. Funk-  
 tion 296, 298, 304.  
 Häufungspunkt einer Menge 56, 68;  
 H. einer Punktfolge 108.  
 hebbär unstetige Funktion 198.  
 Höhe einer Menge in einem Sieb 391.  
 homöomorphe Abbildung 169; h.  
 Mengen (Räume) 47, 169.  
 Homöomorphie 169.  
 Hülle einer Funktion 188; H. e. F. bei  
 Vernachlässigung von  $\mathfrak{R}$ -Mengen 201.  
  
 Implikation 1.  
 implizite Funktion 390.  
 Induktion 38.



- Infimum einer Folge Bairescher Funktionen 315; einer Funktion 180; einer Zahlenmenge, Zahlenfolge 179.  
 innerer Punkt 55.  
 insichdichte Menge 71.  
 insichdichter Kern 74.  
 in sich kompakte Abbildung 150;  
   i. s. k. Menge 92, 121, 161; i. s. k. M. im  $R_n$  145.  
 in sich von erster, zweiter Kategorie 134.  
 Intervall im  $R_1$  413; im  $\bar{R}_1$  180; im  $R_n$  146.  
 Inverse einer geordneten Menge 29.  
 inverse Abbildung (Relation) 3, 152;  
   i. Schränkungstransformation 178.  
 inverser Ordnungstypus 30.  
 irrationaler Punkt des  $R_n$  50.  
 isolierte Menge 70, 85; i. Zahl 38.  
 isolierter Punkt 68.  
 isomefrische Räume 48.  
  
 Kardinalzahl 21.  
 Kategorie: Mengen erster, zweiter K. 130; von erster, zweiter K. in einem Punkte 131; in sich von erster, zweiter K. 134.  
 Kern eines Suslinschen Schemas 339.  
 Kernmenge einer Funktion 206.  
 Kette 100.  
 Klasse einer Baireschen Funktion 279, 284; Funktionen erster Kl. 302, 309; F. zweiter Klasse 305; F. dritter Klasse 307.  
 Kohärenz 75, 95.  
 kompakte Funktionenmengen 231;  
   k. Mengen 91; k. M. im  $R_n$  145;  
   k. M. in vollständigen Räumen 115;  
   k. Mengen von  $\mathbb{C}_f^2$ -Funktionen 310.  
 Komplement einer Menge 2, 6, 46.  
 komplementär-analytische Menge 352, 355, 358.  
 Komplex 5.  
 Komponente einer Menge 101.  
 Konstante 180.  
 Konstituente 397.  
 Kontinuum 102.  
 Kontinuumhypothese 44.  
  
 konvergente Folge Bairescher Funktionen 309; k. Folge stetiger Funktionen 220; k. Funktionenfolge 211; k. Mengenfolge 105; k. Punktfolge 109;  $\mathbb{C}_f^2$ -konvergente Funktionenfolge 309.  
 Konvergenzmenge einer Funktionenfolge 320.  
 Konvergenzpunkt einer Abbildung 157; einer Funktionenfolge 211.  
 Koordinaten eines Punktes im  $R_n$ , im  $R_m$  50.  
 Körper 12;  $\delta$ -,  $\sigma$ -Körper 16, 262, 266.  
 Kugel 48.  
  
 $\lambda$ -System 19, 251, 263, 266.  
 leere Menge 2; l. Relation 3.  
 letzte Ableitung 76; l. Kohärenz 76, 81.  
 letztes Element einer Menge 29.  
 Limes einer Folge von Ordinalzahlen 44; einer Mengenfolge 18; einer Punktfolge 109.  
 Limes superior, inferior einer Folge Bairescher Funktionen 316; einer Folge Borelscher Mengen 313; einer Folge stetiger Funktionen 305; einer Funktionenfolge 316; einer Mengenfolge 17.  
 limitierte Menge 395.  
 limitiertes Sieb 395.  
 lineare Menge 208.  
 linksseitig stetige Funktion 210.  
 linksseitige obere, untere reduzierte Schranke, Schrankenfunktion 209;  
   l. reduzierte Hülle einer Funktion 208.  
 linksseitiger Grenzwert 209; l. Häufungspunkt 171, 208.  
 lokal-zusammenhängende Menge 102, 164.  
 Lückenschnitt 32.  
 Lusinsches Sieb 391.  
  
 $\mu$ -System von Funktionen 400, von Mengen 249.  
 Mächtigkeit 21; M. des Kontinuums 26; M. eines Ordnungstypus 30.  
 Maximum einer Funktion 181, 399.  
 mehr-eindeutige Abbildung (Relation) 4.

- Menge 2.  
 Mengenfolge 7.  
 Mengensystem 10.  
 metrische Axiome 47; m. Menge (metrischer Raum) 47.  
 metrisierbarer Raum 91.  
 Metrisierung 88.  
 mindestens  $k$ -facher Punkt einer Abbildung 361, 378; m.  $k$ -facher Wert einer Funktion 365, 379.  
 Minimalpunkt einer Menge 383.  
 Minimum einer Funktion 181, 399.  
 Mittelpunkt einer Kugel 48.  
 monoton abnehmende (wachsende) Funktion 215, Funktionenfolge 214, Mengenfolge 16; Limes einer m. Mengenfolge 19, 106.  
 monotones Mengensystem 80; m. Suslinsches Schema 339.  
  
 nach 29.  
 Nachfolger in einem Suslinschen Schema 339.  
 Näherungseigenschaften Bairescher Funktionen 291.  
 Näherungsgrenze einer Mengenfolge 105.  
 Negation 1.  
 Netz 53.  
 nirgends dichte Menge 64, 65.  
 normale Funktionenmenge (Funktionenfolge) 229.  
 normaler Kern einer Funktionenmenge (Funktionenfolge) 229; n. Raum 86.  
 nulldimensionale Menge 103.  
 Nullfolge 173.  
  
 obere Entfernung zweier Mengen 52; o. Näherungsgrenze einer Mengenfolge 104; o. Schranke, o. Schrankenfunktion 190, 300; o. reduzierte Schranke, o. r. Schrankenfunktion 197, 300; o. Schranke, o. Schrankenfunktion bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{R}$ -Mengen 201, 300.  
 oberer Näherungspunkt einer Mengenfolge 104.  
  
 oberhalb stetige Abbildung 149; o. st. Funktion 296, 298; o. stetiges Zerlegungssystem 161.  
 offen bis auf eine Menge erster Kategorie 137.  
 offen in einer Menge 61.  
 offene Halbgerade = Menge aller Punkte  $x > a$  oder  $x < a$  des  $R_1$ , des  $\bar{R}_1$ ; o. Menge 46, 48, 54, 56, 60, 61, 81; o. M. im  $R_1$  103, im  $R_n$  146, 147; o. Teilfunktion 205.  
 offener Kern 56; o. K. in  $B$  62.  
 offenes Intervall im  $R_1$  413; im  $\bar{R}_1$  180; im  $R_n$  146.  
 Ordinalzahl 36.  
 ordnende Relation 29.  
 Ordnung 29; O. einer Baireschen Funktion 277, 279, 284; O. einer Borelschen Menge 258, 261, 264.  
 Ordnungstypus 30.  
  
 partiell stetige Funktion 327.  
 perfekte Ableitung 77; p. Menge 72, 88; p. Mengen in Youngschen Räumen 129; p. Teile analytischer Mengen 356.  
 perfekter Kern 75, 76.  
 Potenz von Mächtigkeiten 22; von Mengen 10.  
 Produkt von Aussagen 1; von Mächtigkeiten 22; von Mengen 9.  
 Produktmenge, Produktraum 141.  
 Projektion 168, 350, 378.  
 projizierender Teil (sich nach  $A$  pr. T. von  $B$ ) 395.  
 Punkt eines metrischen Raumes 47; eines topologischen Raumes 46; P. gleichmäßiger, ungleichmäßiger Konvergenz 218; P. un abzählbarer, unendlicher Vielfachheit einer Abbildung 361, 379.  
 Punktfunktion 180.  
 Punktmenge eines metrischen Raumes 47; eines topologischen Raumes 46.  
 punktwise ungleichmäßig konvergente Funktionenfolge 219; p. unstetige Funktion 194; p. u. F. bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{R}$ -Mengen 202, von Mengen erster Kategorie 204.

- quasigleichmäßige Konvergenz 213.  
 Radius einer Kugel 48.  
 Rand, Randmenge, Randpunkt 59.  
 rationaler Punkt des  $R_n$  50.  
 rechtsseitig stetige Funktion 210.  
 rechtsseitige obere, untere reduzierte Schranke, Schrankenfunktion 209;  
 r. reduzierte Hülle einer Funktion 209.  
 rechtsseitiger Grenzwert 209; r. Häufungspunkt 171, 208.  
 reduzierte Hülle einer Funktion 196;  
 r. Kugel 48; r. Schranke, Schrankenfunktion 197, 300; r. Schwankung, Schwankungsfunktion 199, 300; r. Umgebung 47, 48.  
 reduziertes dyadisches Diskontinuum 173.  
 reelle Funktion 28, 180.  
 reflexive Relation 20.  
 regulärer Raum 86.  
 reguläres Sieb 391; r. Suslinsches Schema 345.  
 Relation 3.  
 relativ abgeschlossene, offene Mengen 61.  
 Relativbegriffe 61, 68.  
 relative  $F_\sigma$ ,  $G_\delta$  62.  
 residual in einem Punkte 136.  
 Residualmenge 134.  
 Ring von Funktionen 400, von Mengen 11;  $\delta$ -Ring,  $\sigma$ -Ring 16, 260.  
 $\sigma$ -Körper 16, 262, 266;  $\sigma$ -Prozeß 15;  
 $\sigma$ -Ring 16, 260;  $\sigma$ -System 15, 241, 260, 266.  
 Schicht einer Menge 147.  
 schlichte Abbildung (Relation) 4;  
 schl. Funktion 378.  
 schlichtes stetiges Bild 374.  
 Schnitt 32.  
 Schrankenfunktionen 190, 300;  
 Schr. bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen 201, 300.  
 Schränkungstransformation 178.  
 Schwankung, Schwankungsfunktion 191, 300, 301; Schw. bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen 201, 300.  
 separable Menge 78.  
 separierte Menge 73, 85.  
 separierter Bestandteil 74.  
 sich auf  $\alpha$  zusammenziehende Umgebungsfolge, Folge offener Mengen 79.  
 Sieb 391; durch  $B$  geliefertes S. 393.  
 spezielles Borelsches Sieb 394.  
 Stellen eines Systembruches 25.  
 stetig bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen 202; st. bis auf eine  $\mathfrak{M}$ -Menge 203, 302; st. bis auf eine Menge erster Kategorie 204, 290; st. geordnete Menge 32.  
 stetige Abbildung 154; st. Erweiterung einer Abbildung 156; st. Funktion 88, 89, 183, 184, 191, 192, 296; st. Konvergenz 222.  
 stetiger Ordnungstypus 32.  
 stetiges Bild 159.  
 Stetigkeitseigenschaften Bairescher Funktionen 289.  
 Stetigkeitspunkt 183; St. partiell stetiger Funktionen 332.  
 Strecke des  $R_n$ , des  $R_\omega$  98.  
 Stück 58, 88.  
 Stufe: Abschnitt, Menge  $n$ -ter St. in einem Suslinschen Schema 339; Intervall  $n$ -ter Stufe im  $R_\omega$  376; Menge  $n$ -ter Stufe in einem dyadischen Schema 120.  
 Summe von Aussagen 1; v. Mächtigkeiten 21; v. Mengen 6, 7; v. Ordinalzahlen 36; v. Ordnungstypen 31.  
 Supremum einer Folge Bairescher Funktionen 315; einer Funktion 180; einer Zahlenmenge, Zahlenfolge 179.  
 Suslinsches Mengensystem 343; S. Schema 339.  
 symmetrische Relation 20.  
 symmetrisches Funktionensystem 239.  
 Systembruch 25.  
 Teil einer Menge 2; eines metrischen Raumes 48; eines topologischen Raumes 47.

Teilabbildung 156.  
 Teilfolge 5.  
 Teilfunktion 180, 205.  
 topologische Axiome 46; t. Menge (topologischer Raum) 46.  
 total imperfekte Menge 140, 359; t. ungleichmäßige Konvergenz 218; t. unstetige Funktion 193.  
 transfinite Induktion 38; tr. Ordinalzahl 36.  
 transitive Relation 20.  
 trennbar durch offene Mengen 86;  $\mathfrak{B}$ -trennbar 369;  $\mathfrak{B}_f$ ,  $\mathfrak{B}^f$ -trennbar 267;  $\mathfrak{B}_\xi$ -trennbar 266, 274.  
 Treppenfunktion 256, 283.  
 triadisch rational 25.  
 ( $n$ )-tupel 5.  
  
 überall von zweiter Kategorie 133.  
 überdeckendes System 81.  
 Überdeckungssätze 81, 95.  
 Überdeckungssystem 81.  
 Umgebung eines Punktes 47, 48; einer Menge 51.  
 Umgebungsfolge: sich auf  $a$  zusammenziehende U. 79.  
 Umkehrfunktion 385.  
 unabzählbare Menge 24; u. Vielfachheit eines Punktes einer Abbildung 361; u. V. e. Wertes einer Funktion 365.  
 unendliche Vielfachheit eines Punktes einer Abbildung 361, 379; u. V. e. Wertes einer Funktion 365, 379; u. Zahl 177.  
 unendlicher Raum 70; u. Systembruch 25.  
 ungerade Ordinalzahl 39.  
 ungleichmäßige Konvergenz 218.  
 Ungleichmäßigkeitsgrad einer Funktionenfolge 217.  
 uniforme Konvergenz 211.  
 Universalmengen 271, 352.  
 unmittelbar folgendes, vorangehendes Element 29; u. folgende Ordinalzahl 37; u. vorhergehende O. 38.  
 unstetige Funktion 183.

Unstetigkeitspunkt 183; U. erster Art 210; Verteilung der U. einer Funktion 192.  
 unter  $C$  gelegener Teil einer Menge 388.  
 untere Näherungsgrenze einer Mengenfolge 104; u. Schranke, u. Schrankenfunktion 190, 300; u. reduzierte Schranke, u. r. Schrankenfunktion 197, 300; u. Schranke, u. Schrankenfunktion bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen 201, 300.  
 unterer Näherungspunkt einer Mengenfolge 104.  
 unterhalb stetige Abbildung 148; u. st. Funktion 296, 298.  
 unverdichtete Menge 83.  
 unverdichteter Teil einer Menge 83.  
 unvollständige Grenzfunktion einer Funktionenfolge 321.  
 unzusammenhängende Menge 97.  
 Urbild 3.  
 Urbildmenge 3, 4; U. bei eindeutigen stetigen Abbildungen 160; bei oberhalb, unterhalb stetigen A. 152; bei stetigen A. 155; U. einer Funktion 232; eines Funktionensystems 234; U. stetiger Funktionen 187.  
  
 Verdichtete Menge 83.  
 verdichteter Teil einer Menge 83.  
 Verdichtungspunkt einer Menge 82.  
 Vergleichung von Mächtigkeiten 41.  
 Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen 200.  
 Vervollständigung eines Raumes 115.  
 volle Menge 2.  
 völlig autarkes Funktionensystem 238, 244; v. uniforme Konvergenz 211.  
 vollständige Menge 113.  
 vor 29.  
 Vorgänger in einem Suslinschen Schema 339.  
  
 Wahrheitswert 1.  
 Wertebereich einer Funktionenfolge 225.  
 Wertmenge einer Funktion 359, 378.  
 wohlgeordnete Menge 34.

- |   |  |
|---|--|
| wohlgeordnetes Sieb 391.<br>Wohlordnungssatz 39.<br><br>Youngsche Menge 126, 175.<br><br>Zahlklasse 43.<br>zusammengesetzte Abbildung (Relation) 3; z. Funktion 184.<br>zusammenhängende Abbildung 151; | z. Menge 97; z. M. des $R_1$ 98, des $\bar{R}_1$ 180.<br>Zusammensetzung Bairescher Funktionen 288; Z. eindeutiger stetiger Abbildungen 160; Z. oberhalb, unterhalb stetiger A. 154; Z. stetiger A. 155; Z. stetiger Funktionen 184.<br>zweite Kategorie s. Kategorie.<br>zwischen 29. |
|---|--|
-

## Verzeichnis der verwendeten Symbole.

$\Lambda$  (die leere Menge) 2.

$\{a\}$  (die nur aus dem Elemente  $a$  bestehende Menge) 2.

$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  (die aus den Elementen  $a_1, a_2, \dots, a_n$  bestehende Menge) 2.

$((y_n))$  (die Folge der Elemente  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$ ) 5.

$a \in A$  ( $a$  ist Element der Menge  $A$ ) 2.

$a \sim \varepsilon A$  ( $a$  ist nicht Element der Menge  $A$ ) 2.

$[\varphi(x)]$  (die durch die Aussagenfunktion  $\varphi(x)$  definierte Menge) 2.

$[\varphi(x, y)]$  (die durch die Aussagenfunktion  $\varphi(x, y)$  definierte Relation) 3.

$[f(x) > y], [f(x) < y], [f(x) \geq y], [f(x) \leq y], [f(x) = y]$  (Menge aller  $x$ , in denen  $f(x) > y$  ist, usf.) 187, 232.

$[f(x) > g(y)], [f(x) < g(y)], [f(x) \geq g(y)], [f(x) \leq g(y)], [f(x) = g(y)], [f(x) < g(y)]$  (Menge aller Punkte  $(x, y)$ , in denen  $f(x) > y$  ist, usf.) 294.

$P|Q$  (die aus  $P$  und  $Q$  zusammengesetzte Relation) 3.

$R^{-1}$  (die zu  $R$  inverse Relation) 3.

$f^{(-1)}$  (die Umkehrfunktion von  $f$ ) 385.

$A \upharpoonright P, A \upharpoonright f, A \upharpoonright M, A \upharpoonright \subseteq$  (die auf  $A$  eingeschränkte Abbildung  $P$ , Funktion  $f$  usf.) 156, 180, 253, 254.

$A \subseteq B, B \supseteq A$  ( $A$  ist Teil von  $B$ ) 2.

$A \subset B, B \supset A$  ( $A$  ist echter Teil von  $B$ ) 2.

$A \subseteq B$  86.

$A \sim B$  ( $A$  und  $B$  sind äquivalent, gleichmächtig) 20.

$A \simeq B$  ( $A$  und  $B$  sind ähnlich) 30.

$A \approx B$  ( $A$  und  $B$  sind homöomorph) 169.

$-A$  (Komplement einer Menge) 2, 46.

$A + B, AB, A.B, A - B$  (Summe, Durchschnitt, Differenz zweier Mengen) 6.

$A \times B$  (Produkt zweier Mengen) 9, 141.

$A^B$  (Potenz von Mengen) 10.

$\sum_{i=1}^k A_i, \sum_{m \in M} A_m, \sum_n A_n, \sum_{k, n} A_{k, n}$  (Summen von Mengen) 7.

$\bigcap_{i=1}^k A_i, \bigcap_{m \in M} A_m, \bigcap_n A_n, \bigcap_{k, n} A_{k, n}$  (Durchschnitte von Mengen) 7.

$\prod_{i=1}^k A_i, \prod_{m \in M} A_m$  (Produkte von Mengen) 9.

$a + b, a \cdot b, a^b, a^0$  (Summe, Produkt, Potenz von Mächtigkeiten) 21, 22.

$\sum_{m \in M} a_m, \prod_{m \in M} b_m$  (Summe, Produkt von Mächtigkeiten) 21, 22.

$\sum_p a_n$  (Summe von Zahlen) bedeutet  $\lim_n (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$ ; sind alle  $a_n \geq 0$  oder  $\leq 0$  so existiert dieser Limes immer; er kann auch  $= +\infty$ , oder  $= -\infty$  sein.

$\max(a_1, a_2, \dots, a_n), \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$  (die größte, kleinste unter den Zahlen  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ).

$\sup x$  oder  $\sup A$  (Supremum der Zahlenmenge  $A$ , d. h. kleinste Zahl, die von keinem  $x \in A$  überschritten wird) 179.

$\inf x$  oder  $\inf A$  (Infimum der Zahlenmenge  $A$ , d. h. größte Zahl, die von keinem  $x \in A$  unterschritten wird) 179.

$\sup a_n, \inf a_n$  (Supremum, Infimum der Zahlenfolge  $a_n$ , d. h. kleinste, bzw. größte Zahl, die von keiner Zahl  $a_n$  der Folge überschritten, bzw. unterschritten wird) 179.

$\sup f(x), \inf f(x)$  (Supremum, Infimum einer Funktion) 180.

$\limsup_n A_n, \liminf_n A_n, \lim_n A_n$  (Limes superior, Limes inferior, Limes einer Mengenfolge) 17, 18.

$\overline{\lim}_n A_n, \underline{\lim}_n A_n, \lim_n A_n$  (obere Näherungsgrenze, untere Näherungsgrenze, Näherungsgrenze einer Mengenfolge) 104, 105.

$\lim_n \alpha_n$  (Limes einer Folge von Ordinalzahlen) 44.

$\lim_n a_n, a_n \rightarrow a, a_n \rightarrow +\infty, a_n \rightarrow -\infty$  (Grenzpunkt einer Punktfolge) 109, 179.

$\limsup_n a_n, \liminf_n a_n$  (Limes superior, inferior einer Zahlenfolge, d. h. Supremum, bzw. Infimum aller Zahlen  $z$ , für die  $a_n \geq z$ , bzw.  $a_n \leq z$  für unendlich viele  $n$ ) 179.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x), f(x) \rightarrow b$  für  $x \rightarrow a$  (Grenzwert einer Funktion) 181.

$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x), \lim_{x \rightarrow a+0} f(x), f(a-0), f(a+0)$  (einseitige Grenzwerte einer Funktion) 209.

$\overline{\lim}_{f \in M} f(x), \underline{\lim}_{f \in M} f(x)$  (Limes superior, inferior einer Funktionenmenge) 227.

$a < a', a < A', A' < a, A < A'$  ( $a$  vor  $a'$  usw.) 29.

$\mathbb{Z}_\alpha$  ( $\alpha$ -te Zahlklasse) 43.

$\aleph$  (Mächtigkeit des Kontinuums) 26.

$\aleph_0$  (Mächtigkeit der Menge der natürlichen Zahlen) 23.

$\aleph_\alpha$  43.

- $\omega$  (Ordnungstypus der Menge der natürlichen Zahlen) 30.  
 $\omega_\alpha$  (Anfangszahl der Zahlklasse  $Z_\alpha$ ) 43.  
 $\omega_1$  (Anfangszahl von  $Z_1$ , kleinste nicht abzählbare Ordinalzahl) 44.  
 $\alpha^*$  (der zu  $\alpha$  inverse Ordnungstypus) 30.  
 $\eta$  (Ordnungstypus der Menge der rationalen Zahlen) 31.  
 $\lambda$  (Ordnungstypus der Menge der reellen Zahlen) 32.  
 $W(\alpha)$  (Menge der Ordinalzahlen  $< \alpha$ ) 36.  
 $+\infty, -\infty$  (unendliche Zahlen) 177.  
 $S(a), S(f)$  (Schränkungstransformation) 178, 180.  
 $S^{-1}(a)$  (inverse Schränkungstransformation) 178.  
 $R_0$  (Bairescher Nullraum) 50, 78, 104, 112, 114, 172.  
 $R_1$  (euklidische Gerade) 49, 114.  
 $\overline{R}_1$  178.  
 $R_n$  (euklidischer Raum von  $n$  Dimensionen) 49, 78, 99, 145.  
 $\overline{R}_n$  389.  
 $R_\omega$  (Hilbertscher Raum) 50, 78, 99, 114.  
 $Q_\omega$  89, 145.  
 $(a, b)$  (offenes Intervall des  $R_1$ , des  $\overline{R}_1$ , d. h. Menge aller der Ungleichung  $a < x < b$  genügenden Zahlen).  
 $[a, b]$  (abgeschlossenes Intervall des  $R_1$ , des  $\overline{R}_1$ , d. h. Menge aller der Ungleichung  $a \leq x \leq b$  genügenden Zahlen).  
 $[a, b), (a, b]$  (halboffene Intervalle des  $R_1$ , des  $\overline{R}_1$ , d. h. Menge aller der Ungleichung  $a \leq x < b$  bzw.  $a < x \leq b$  genügenden Zahlen).  
 $(a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n), [a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n], [a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n), (a_1, a_2, \dots, a_n; b_1, b_2, \dots, b_n]$  (offene abgeschlossene, halboffene Intervalle des  $R_n$ ) 146.  
 $U_a, U_A$  (Umgebung des Punktes  $a$ , der Menge  $A$ ) 47.  
 $U'_a$  (reduzierte Umgebung von  $a$ ) 47.  
 $U_{B\rho}$  (Umgebung  $\rho$  der Menge  $B$ ) 51.  
 $\overline{U}_{B\rho}$  (abgeschlossene Umgebung  $\rho$  der Menge  $B$ ) 55.  
 $K_{a\rho}$  (Kugel vom Mittelpunkt  $a$  und Radius  $\rho$ , Umgebung  $\rho$  von  $a$ ) 48.  
 $K'_{a\rho}$  (reduzierte Kugel,  $r$ . Umgebung  $\rho$  v.  $a$ ) 48.  
 $\overline{K}_{a\rho}$  (abgeschlossene Kugel) 54.  
 $ab$  (Entfernung, Abstand zweier Punkte) 47.  
 $||a-b||$  (Abstand zweier Punkte des  $\overline{R}_1$ ) 178.  
 $aB, \overline{AB}$  (Entfernung, Abstand eines Punktes von einer Menge, zweier Mengen) 51.  
 $d(A)$  (Durchmesser einer Menge) 52.  
 $d(A, B)$  (obere Entfernung zweier Mengen) 52.



- $e(A, B)$  (Abweichung zweier Mengen) 52.  
 $A^0$  (abgeschlossene Hülle von  $A$ ) 57.  
 $A^1$  (Menge der Häufungspunkte von  $A$ ) 56.  
 $A^\xi$  ( $\xi$ -te Ableitung von  $A$ ) 76.  
 $A_\xi$  ( $\xi$ -te Kohärenz von  $A$ ) 75.  
 $A^*$  (Menge der Verdichtungspunkte von  $A$ ) 83.  
 $A_g$  (Begrenzung von  $A$ ) 59.  
 $A_h$  (Menge der zu  $A$  gehörenden Häufungspunkte von  $A$ ) 68.  
 $A_1$  (offener Kern von  $A$  = Menge der inneren Punkte von  $A$ ) 55.  
 $A_i$  (Menge der isolierten Punkte von  $A$ ) 68.  
 $A_k$  (insichdichter Kern von  $A$ ) 74.  
 $A_r$  (Rand von  $A$ ) 59.  
 $A_s$  (separierter Bestandteil von  $A$ ) 74.  
 $A_u$  (unverdichteter Teil von  $A$ ) 83.  
 $A_v$  (verdichteter Teil von  $A$ ) 83.  
 $A^{(m)}$  (Menge der Minimalpunkte von  $A$ ) 383.  
 $A_I, A_{II}$  (Menge aller Punkte, in denen  $A$  von erster, zweiter Kategorie ist) 131.  
 $A_{III}$  (Menge aller Punkte, in denen  $A$  residual ist) 136.  
 $Bu C$  (unter  $C$  gelegener Teil von  $B$ ) 388.  
 $Bp A$  (sich nach  $A$  projizierender Teil von  $B$ ) 395.  
 $\alpha_{((k_n))}$  (der der dyadischen Folge  $((k_n))$  zugeordnete Punkt einer durch ein dyadisches Schema dargestellten Menge) 120.  
 $f^s(x), f_s(x), f_s^b(x)$  236.  
 $\bar{f}(a), \underline{f}(a)$  (obere, untere Schranke von  $f$  in  $a$ ) 190.  
 $\bar{f}^1(a), \underline{f}^1(a)$  (obere, untere reduzierte Schranke von  $f$  in  $a$ ) 197.  
 $\bar{f}_-^1(a), \bar{f}_+^1(a), \underline{f}_-^1(a), \underline{f}_+^1(a)$  (einseitige reduzierte obere, untere Schranke von  $f$  in  $a$ ) 209.  
 $\bar{f}^{(\mathfrak{M})}(a), \underline{f}^{(\mathfrak{M})}(a)$  (obere, untere Schranke von  $f$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen) 201.  
 $P_f^0(a), P^0(a)$  (Hülle von  $f$  in  $a$ ) 188.  
 $P_f^1(a), P^1(a)$  (reduzierte Hülle von  $f$  in  $a$ ) 196.  
 $P_{f-}^1(a), P_{f+}^1(a), P_-^1(a), P_+^1(a)$  (einseitige reduzierte Hüllen von  $f$  in  $a$ ) 208, 209.  
 $P_f^{(\mathfrak{M})}(a), P^{(\mathfrak{M})}(a)$  (Hülle von  $f$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $\mathfrak{M}$ -Mengen) 201.  
 $\omega_f(A)$  (Schwankung von  $f$  auf  $A$ ) 191.  
 $\omega_f(a), \omega(a)$  (Schwankung von  $f$  in  $a$ ) 191.

- $\omega_f^1(a)$ ,  $\omega^1(a)$  (reduzierte Schwankung von  $f$  in  $a$ ) 199.  
 $\omega^{(M)}(a)$  (Schwankung von  $f$  in  $a$  bei Vernachlässigung von  $M$ -Mengen) 201.  
 $\gamma(a)$  (Ungleichmäßigkeitsgrad einer Funktionenfolge im Punkte  $a$ ) 217.  
 $\sigma(a)$  (Grenzwandlung einer Funktionenfolge, einer Funktionenmenge im Punkte  $a$ ) 223, 227.  
 $F_\sigma$ ,  $G_\delta$  60.  
 $\mathfrak{M}_\sigma$ ,  $\mathfrak{M}_\delta$  (kleinstes  $\sigma$ -,  $\delta$ -System über  $M$ ) 15  
 $\mathfrak{M}_{\sigma\delta}$ ,  $\mathfrak{M}_{\delta\sigma}$  19.  
 $\mathfrak{M}^1$ ,  $\mathfrak{M}_1$  241.  
 $\mathfrak{M}^2$ ,  $\mathfrak{M}_2$  247.  
 $\mathfrak{M}^\xi$ ,  $\mathfrak{M}_\xi$  (System der Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung über  $M$ ) 258.  
 $\mathfrak{M}_1^1$  (kleinstes  $\mu$ -System über  $M$ ) 249.  
 $\mathfrak{M}_\xi^\xi$  (System der ambigen Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung über  $M$ ) 261.  
 $\mathfrak{M}_B$  (Borelsches System über  $M$ ) 260.  
 $\mathfrak{M}_A$  (System der analytischen Mengen über  $M$ ) 342.  
 $\mathfrak{M}^*$  (durch den  $\lambda$ -Prozeß aus  $M$  entstehendes System) 250, 399.  
 $\mathfrak{C}^1$ ,  $\mathfrak{C}_1$  241.  
 $\mathfrak{C}^2$ ,  $\mathfrak{C}_2$  247.  
 $\mathfrak{C}^\xi$ ,  $\mathfrak{C}_\xi$  (System der Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung über  $\mathfrak{C}$ ) 277.  
 $\mathfrak{C}_\xi^\xi$  (System der ambigen Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung über  $\mathfrak{C}$ ) 279.  
 $\mathfrak{C}_1^1$  (kleinstes  $\mu$ -System über  $\mathfrak{C}$ ) 244, 400.  
 $\mathfrak{C}_B$  (Bairesches System über  $\mathfrak{C}$ ) 278.  
 $\mathfrak{C}^*$  246, 400.  
 $\mathfrak{B}^\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi$ ,  $\mathfrak{B}^\xi(E)$ ,  $\mathfrak{B}_\xi(E)$  (System der Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ ) 264, 267.  
 $\mathfrak{B}_\xi^\xi$ ,  $\mathfrak{B}_\xi^\xi(E)$  (System der ambigen Borelschen Mengen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ ) 264, 267.  
 $\mathfrak{B}_B$ ,  $\mathfrak{B}_B(E)$ ,  $\mathfrak{B}(E)$  (System der Borelschen Mengen in  $E$ ) 266, 267, 344.  
 $\mathfrak{C}$ ,  $\mathfrak{C}_1^1$  (System der stetigen Funktionen in  $E$ ) 284.  
 $\mathfrak{C}^\xi$ ,  $\mathfrak{C}_\xi$ ,  $\mathfrak{C}^\xi(E)$ ,  $\mathfrak{C}_\xi(E)$  (System der Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ ) 284, 287.  
 $\mathfrak{C}_\xi^\xi$ ,  $\mathfrak{C}_\xi^\xi(E)$  (System der ambigen Baireschen Funktionen  $\xi$ -ter Ordnung in  $E$ ) 284, 287.  
 $\mathfrak{C}_B$ ,  $\mathfrak{C}_B(E)$  (System der Baireschen Funktionen in  $E$ ) 285, 287.  
 $\mathfrak{A}(E)$  (System der analytischen Mengen in  $E$ ) 344.  
 $\mathfrak{K}(E)$  (System der komplementär-analytischen Mengen in  $E$ ) 352.  
 $\mathfrak{G}(\mathfrak{C})$ ,  $\overline{\mathfrak{G}}(\mathfrak{C})$ ,  $\mathfrak{F}(\mathfrak{C})$ ,  $\overline{\mathfrak{F}}(\mathfrak{C})$  234.  
 $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, *)$ ,  $\mathfrak{C}(*, \mathfrak{M})$ ,  $\mathfrak{C}(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$  235.  
 $A(\mathfrak{C})$  (Kern des Suslinschen Schemas  $\mathfrak{C}$ ) 339.



















W  
2346